

Unitarne transformacije

- * Unitarna matrica : $U^* = U^{-1}$
- * Važi : $U^*U = U \cdot U^* = I$.
- * Ako je U unitarna, U^* je unitarna.

Podsetiti se uslovljenosti za UNM.

Za rešavanje sistema linearnih jednačina (SLJ) $Ax = b$ možemo uvesti: $A^* \setminus Ax = b$
 $\Rightarrow \underbrace{A^*A}_I x = A^*b \Rightarrow x = A^*b$.

Međutim, za uslovljenost navodnjenog SLJ važi $\text{cond}(A^*A) \approx (\text{cond}(A))^2$, pa zbog toga želimo da transformišemo polazni sistem na neki drugi način tako da mu se uslovljenost ne pogorša. Jedan način su transformacije unitarnim matricama

Uvodimo pojam unitarne transformacije: $x \rightarrow Ux$, gde je U unitarna matrica.

Uvodimo skalarni proizvod: $(x, y) = y^* \cdot x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \bar{y}_i$

Važi $(Ax, y) = (x, A^*y)$

$(x, Ay) = (A^*x, y)$

Teorema: Neka je $A: V \rightarrow W$ linearni operator. Tada su ekvivalentna sledeća tvrđenja.

1) $(Ax, Ay) = (x, y)$

2) $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$

3) $A^*A = I$

Dokaz. sami

Iz teoreme. Za unitarnu matricu U važi:

$$(Ux, Uy) = (U^* U x, y) = (I x, y) = (x, y)$$

Ako je $x=y$:

$$\|Ux\|_2^2 = (Ux, Ux) = (x, x) = \|x\|_2^2$$

Euklidska
norma:
 $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$

$\Rightarrow \|Ux\|_2 = \|x\|_2$ tj. pri unitarnim transformacijama ne menja se Euklidska norma vektora.

$$\Rightarrow \text{Važi. } \|U\|_2 = \sup_x \frac{\|Ux\|_2}{\|x\|_2} = 1$$

$$\text{Takode: } \|U^{-1}\|_2 = \|U^*\|_2 = 1 \quad (\text{jer je } U^* \text{ unitarna})$$

$$\Rightarrow \underline{\text{cond}(U)} = \|U\|_2 \cdot \|U^{-1}\|_2 = \underline{1}$$

Teorema: Uslavljenost matrice pri unitarnoj transformaciji se ne menja (što garantuje stabilnost), tj.
 $\text{cond}(UA) = \text{cond}(A)$

Dokaz.

$$\underline{\|A\|_2} = \|U^* UA\|_2 \leq \underbrace{\|U^*\|_2}_1 \cdot \|UA\|_2 = \underline{\|UA\|_2} \leq \underbrace{\|U\|_2}_1 \cdot \|A\|_2 = \underline{\|A\|_2}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 \leq \|UA\|_2 \leq \|A\|_2$$

$$\Rightarrow \|UA\|_2 = \|A\|_2$$

$$\underline{\|A^{-1}\|_2} = \|A^{-1} U^{-1} U\|_2 \leq \|A^{-1} U^{-1}\|_2 \cdot \underbrace{\|U\|_2}_1 = \|A^{-1} U^{-1}\|_2 = \underline{\|(UA)^{-1}\|_2} \leq$$

$$\leq \|A^{-1}\|_2 \cdot \underbrace{\|U\|_2}_1 = \underline{\|A^{-1}\|_2}$$

$$\Rightarrow \|A^{-1}\|_2 \leq \|(UA)^{-1}\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2$$

$$\Rightarrow \|(UA)^{-1}\|_2 = \|A^{-1}\|_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{cond}(UA) &= \|UA\|_2 \| (UA)^{-1} \|_2 \\ &= \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 \\ &= \text{cond}(A) \end{aligned}$$



Householderova transformacija + QR za SLJ

Da bi rešili SLJ $Ax=b$, na osnovu prethodnog, želimo da ga transformišemo u njegov ekvivalentan sistem ali tako da se usloženost novodobijenog sistema ne pogorša. To radimo unitarnim transformacijama $Ux=U_b$.

Kako da odredimo matricu U ?

Na NAla radili smo Householderove matrice koje su unitarne. Možemo njih iskoristiti ovde.

Ponoviti HH matrice sa NAla (geometrijska interpretacija, osobine, izvotenje formula za dobijanje HH matrice)

Da bi rešili sistem $Ax=b$ primenjujemo konačan broj transformacija HH matricama kako bi dobili gornje-trouglastu matricu sistema.

$$T_0 \cdot A = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & * & & * \end{bmatrix} = A_1, \text{ gde je } T_0 \text{ Householderova mat.}$$

⋮

$$A_m = \begin{bmatrix} U & B \\ \hline 0 & C \end{bmatrix}, T_m = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hline 0 & T_m^{(n-m)} \end{bmatrix}$$

$$T_m \cdot A_m = \begin{bmatrix} U & * & B \\ \hline & k_m & * & * \\ \hline 0 & \vdots & \ddots & * \end{bmatrix} = A_{m+1}$$

⋮

$$T_{n-2} \cdot \dots \cdot T_1 \cdot \underbrace{T_0 \cdot A}_{A_1} = A_{n-1} = R = \begin{bmatrix} * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & * \end{bmatrix} \text{ gornje-trouglasta}$$

$$A = (T_{n-2} \cdot \dots \cdot T_1 \cdot T_0)^{-1} \cdot R$$

$$= T_0^{-1} T_1^{-1} \cdot \dots \cdot T_{n-2}^{-1} \cdot R$$

$$= \underbrace{T_0 \cdot T_1 \cdot \dots \cdot T_{n-2}}_{\text{označimo sa } Q} \cdot R$$

označimo sa Q

(jer za HH matricu važi $T^{-1} = T^* = T$)

$\Rightarrow A = QR$ gde je $Q = T_0 T_1 \dots T_{n-2}$, R gornje-trouglaona

Napomena. Proizvod unitarnih matrica je unitarna matrica.

T_i - unitarne $\Rightarrow T_0 \dots T_{n-2} = Q$ je unitarna

$$(T_1 T_2)(T_1 T_2)^* = (T_1 T_2) \cdot (T_2^* T_1^*) = T_1 (T_2 T_2^*) T_1^* = T_1 T_1^* = I$$

Napomena Proizvod HH matrica nije HH matrica.

$$\det(T \cdot T) = \underbrace{\det(T)}_{-1} \cdot \underbrace{\det(T)}_{-1} = 1 \Rightarrow T \cdot T \text{ nije HH jer bi}$$

bilo $\det(T \cdot T) = -1$
(osobine HH)

Za rešavanje sistema $Ax = b$:

$$A = QR \quad (\text{odredimo } Q, R)$$

$$Ax = b \Rightarrow \underbrace{QR}_{\cdot Q} x = b \Rightarrow \underline{R} x = Q^{-1} b = Q^* b$$

gornje-trouglaona

$Rx = Q^* b$ SLJ sa gornjetrouglaonom matricom (samo izračunavamo x_i)

ali zbog unitarnih transformacija uslojenost ovog sistema je ista kao i za polazni sistem.

Napomena. Kod sopstvenih vrednosti, matrica A se HH metodom transformisala u ujoj sličnu matricu u gornje-Hessenbergovoj formi. Oude matricu A transformišemo u gornje-trouglaonu koja joj nije slična.

Kod sopstvenih vrednosti, zbog sličnosti, matricu A smo množili sa T sa obe strane. Oude matricu A množimo samo sa leve jer treba promeniti (anulirati) samo elemente ispod dijagonale.

Sve ovo vodi do toga da će se vektor x_i birati na drugačiji način (u zavisnosti šta želimo da postignemo).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

↓

x_1 za Ht metodu
u slučaju sop. vrednosti

$$A_1 = TAT = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ \kappa & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{*} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

↓

x_1 za narednu iteraciju
Ht metode za sop. vred

⋮ nakon $n-2$ iteracije

A_{n-2} je gornje-Hessenbergova

! $A_{n-2} \sim A$

x_1 za Ht metodu u slučaju
SLJ

$$A = TA = \begin{bmatrix} \kappa & * & \dots & * \\ 0 & \boxed{*} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

↓

x_1 za narednu iteraciju
Ht metode za SLJ

⋮ nakon $n-1$ iteracije

A_{n-1} je gornje-trouglasta

Zadatak: Rešiti sistem $Ax=b$ (Ht + QR)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Rešenje.

I iteracija. $x_1 = [2, 1, 2, 1]^T$

$$G = \|x_1\|_2 = 3.1623$$

$$\kappa = -5 \cdot \text{sign}(x_1(1)) = -3.1623$$

$$\beta = (G \cdot (G + |x_1(1)|))^{-1} = 0.0613$$

$$u = x_1 - \kappa \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 5.1623 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = I_{4 \times 4} - \beta \cdot \underbrace{u \cdot u^T}_{\text{matrica!}} = \begin{bmatrix} -0.6325 & -0.3162 & -0.6325 & -0.3162 \\ -0.3162 & 0.9387 & -0.1225 & -0.0613 \\ -0.6325 & -0.1225 & 0.7550 & -0.1225 \\ -0.3162 & -0.0613 & -0.1225 & 0.9387 \end{bmatrix}$$

Provera: ovo mora biti simetrična matrica (jer je HH^T)

$$T_1 = H_1 \quad (\text{jer su iste dimenzije, ne dopunjuemo je do } n)$$

$$A_1 = T_1 \cdot A = \begin{bmatrix} -3.1623 & -3.1623 & -11.3842 & -6.3246 \\ 0 & -0.1937 & 0.6639 & -0.1937 \\ 0 & -1.3874 & 5.722 & -2.3874 \\ 0 & -0.1937 & -1.3361 & 1.8063 \end{bmatrix}$$

Provera: na poziciji (1,1) je vrednost κ ispod su nule (zbog zaokruživanja, na papiru, mogu biti ≈ 0 , ali tretirati ih kao 0)

$$\text{II iteracija: } x_1 = [-0.1937, -1.3874, -0.1937]^T$$

$$\hat{b} = 1.4142, \quad \kappa = 1.4142, \quad \beta = 0.4398, \quad u = [-1.6079, -1.3874, -0.1937]^T$$

$$H_2 = I_{3 \times 3} - \beta u \cdot u^T = \begin{bmatrix} -0.1370 & -0.9811 & -0.1370 \\ -0.9811 & 0.1535 & -0.1182 \\ -0.1370 & -0.1182 & 0.9835 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & H_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (\text{dopunjuemo do } 4 \times 4)$$

$$A_2 = T_2 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} -3.1623 & -3.1623 & -11.3842 & -6.3246 \\ 0 & 1.4142 & 5.6569 & 2.1213 \\ 0 & 0 & -1.3640 & -0.3899 \\ 0 & 0 & -0.7346 & 2.0852 \end{bmatrix}$$

$$\text{III iteracija: } x_1 = [-1.3640, -0.7346]^T$$

$$\hat{b} = 1.5492, \quad \kappa = 1.5492, \quad \beta = 0.2216, \quad u = [-2.9132, -0.7346]^T$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} -0.8804 & -0.4742 \\ -0.4742 & 0.8804 \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & H_3 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = T_3 \cdot A_2 = \begin{bmatrix} -3.1623 & -3.1623 & -11.3842 & -6.3246 \\ 0 & 1.4142 & 5.6569 & 2.1213 \\ 0 & 0 & 1.5492 & -0.6455 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0207 \end{bmatrix} = R$$

$$T_3 T_2 T_1 \cdot Ax = b \Rightarrow \underbrace{T_3 T_2 T_1 A}_R x = \underbrace{T_3 T_2 T_1 \cdot b}_{Q^* = Q^T \text{ (jer je realna)}}$$

$$R x = Q^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1.2649 \\ 3.5355 \\ 2.1947 \\ -2.0207 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3.1623 x_1 - 3.1623 x_2 - 11.3842 x_3 - 6.3246 x_4 = 1.2649 \\ 1.4142 x_2 + 5.6569 x_3 + 2.1213 x_4 = 3.5355 \\ 1.5492 x_3 - 0.6455 x_4 = 2.1947 \\ 2.0207 x_4 = -2.0207 \end{cases}$$

Rešavamo "unazad" .

$$\begin{aligned} x_4 &= -1 \\ x_3 &= 1 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= -2 \end{aligned}$$