

Relaksaciona metoda (opštenuje Gaus-Zajdelove metode)

$$Ax = b, \quad A = L + D + U$$

w.l $(L + D + U) \cdot x = b$, $w \in \mathbb{R}^+$ parametar metode
 $w(L + D + U)x = w \cdot b$ $/ +D -D$

$$(\underline{wL} + wD + \underline{wU} + \underline{D} - D)x = wb$$

$$(wL + D)x + (\underline{wD} + wU - \underline{D})x = wb$$

$(wL + D)x = -(\underline{wU} + (w-1)D)x + wb$

$$x = \underbrace{-(wL + D)^{-1} \cdot (wU + (w-1)D)}_B x + \underbrace{(wL + D)^{-1} \cdot wb}_C$$

$$x = Bx + C$$

$$B = -(wL + D)^{-1} \cdot (wU + (w-1)D)$$

$$C = (wL + D)^{-1} \cdot w \cdot b$$

za $w > 1$ - goruja relaksacija

$0 < w < 1$ - donja relaksacija

$w = 1$ - Gaus - Zajdel

$$\begin{array}{ccc} & \text{Gaus-Zaj.} & \text{Relax} \\ & \swarrow & \searrow \\ \overline{x_{k+1}} & & x_{k+1} = x_k + w \cdot \Delta x_k \\ \Delta x_k = \overline{x_{k+1}} - x_k & & \end{array}$$

Ako je $\overline{x_{k+1}}$ rešenje dobijeno Gaus-Zajdelom od x_k i označimo sa $\Delta x_k = \overline{x_{k+1}} - x_k$, onda je rešenje x_{k+1} dobijeno relaksacionom $x_{k+1} = x_k + w \cdot \Delta x_k$.
za $w = 1$ to je upravo Gaus-Zajdel, za $w > 1$ "otišli" smo dalje u tom pravcu, a za $w < 1$ kraće.

Napomena Relaksaciona metoda je dvostruka, stacionarna, linearna, reda 1 pa važi sve isto kao i za Jacobijevu i Gaus-Zajdelovu što se tiče konvergencije.

A u, dodatno važi i.

Teorema: Ako je A Hermitova ($A^* = A$) i pozitivno definitna matrica ($x^*Ax > 0, x \neq 0$), tada relaksaciona metoda konvergira za $0 < \omega < 2$.

Dokaz.

Odeđujemo ω tako da sve sop. vrednosti od B budu po modulu < 1 .

$$B = -(\omega L + D)^{-1} \cdot (\omega U + (\omega - 1)D)$$

λ - proizvoljna sop. vrednost od B

v - odgovarajući sops. vektor

$$Bv = \lambda v \Rightarrow$$

$$-(\omega L + D)^{-1} \cdot (\omega U + (\omega - 1)D) \cdot v = \lambda v$$

$$((1 - \omega)D - \omega U)v = \lambda(\omega L + D) \cdot v \quad | \cdot 2$$

$$2((1 - \omega)D - \omega U)v = 2\lambda(\omega L + D)v$$

$$2(\omega L + D) = 2\omega L + 2D$$

$$= \omega L + \omega L + 2D$$

$$= \omega L + \omega(A - D - U) + 2D$$

$$= (2 - \omega)D + \omega(L - U) + \omega \cdot A$$

$$A = L + D + U \Rightarrow L = A - D - U$$

$$2((1 - \omega)D - \omega U) = 2(D - \omega D - \omega U)$$

$$= 2D - 2\omega(D + U)$$

$$= 2D - \omega(D + U) - \omega(D + U)$$

$$= 2D - \omega(D + U) - \omega(A - L)$$

$$= (2 - \omega)D + \omega(L - U) - \omega A$$

$$A = L + D + U \Rightarrow D + U = A - L$$

Transformisane izraze vratimo u jednakost gore

$$\lambda[(2 - \omega)D + \omega(L - U) + \omega A] \cdot v = [(2 - \omega)D + \omega(L - U) - \omega A] \cdot v$$

$\cdot v$ skalarno

$$\Rightarrow \lambda[(2 - \omega)(Dv, v) + \omega((L - U)v, v) + \omega(Av, v)] =$$
$$= [(2 - \omega)(Dv, v) + \omega((L - U)v, v) - \omega(Av, v)]$$

$\sim$ skalarui proizvodi

(*)

A je pozitivno definitna $\Rightarrow (Av, v) = a > 0$.

Za vektor e_1 : $(Ae_1, e_1) = a_{11} > 0 \Rightarrow D$ je pozitivno definitna
 $\Rightarrow (Dv, v) = d > 0$

$$\begin{aligned} ((L-U)v, v) &= (Lv, v) - (Uv, v) \\ &= (Lv, v) - (L^*v, v) \\ &= (Lv, v) - (v, Lv) \\ &= (Lv, v) - \overline{(Lv, v)} \\ &= 2i \operatorname{Im}((Lv, v)) \\ &= i \cdot s, \quad s = 2 \operatorname{Im}((Lv, v)) \end{aligned}$$

$$\text{jer } A^* = A \Rightarrow L^* = U$$

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \\ z - \bar{z} &= x + iy - x + iy \\ &= 2iy = 2i \operatorname{Im}(y) \end{aligned}$$

Iz jednakosti (*) izvučemo λ i ubacimo ove oznake

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda &= \frac{(2-w) \cdot d + w \cdot is - wa}{(2-w)d + wis + wa} & \begin{matrix} / \cdot w \\ / \cdot w \end{matrix} \\ &= \frac{\frac{2-w}{w} \cdot d + is - a}{\frac{2-w}{w} d + is + a} \end{aligned}$$

$$\text{Označimo } \frac{2-w}{w} = \frac{2}{w} - 1 = f$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{fd + is - a}{fd + is + a} \quad \Rightarrow |\lambda| = \left| \frac{fd - a + is}{fd + a + is} \right| = \frac{|fd - a + is|}{|fd + a + is|}$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \sqrt{\frac{(fd - a)^2 + s^2}{(fd + a)^2 + s^2}}$$

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$$

Da bi metoda konvergirala, mora $|\lambda| < 1$

$\Rightarrow$ brojilac < imenioc

$$\Rightarrow (fd - a)^2 + s^2 < (fd + a)^2 + s^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{(fd - a)^2}_{>0} < \underbrace{(fd + a)^2}_{>0}$$

$$\Rightarrow f > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{w} - 1 > 0$$

$$\Rightarrow 0 < w < 2$$



Napomena: Ne postoji algoritam (osim u nekim specijalnim slučajevima - pogledati Matlab kolokvijum 2018 1) zadatak) za određivanje optimalnog w koje daje najbržu konvergenciju.

On se može odrediti eksperimentalnim putem, proveravajući više vrednosti (Matlab kolokvijum 2016)