

Iterativne metode

Polazeći od proizvoljnog vektora x_0 , rekurentnom formulom

$$x_{k+1} = G_k(x_0, x_1, \dots, x_k)$$

određuje se niz vektora koji pod određenim uslovima konvergiraju ka rešenju sistema $Ax=b$.

Dvoslojne, stacionarne, linearne iterativne metode za rešavanje sistema lin. j-na mogu se predstaviti.

$$x_{k+1} = G(x_k), \quad k=0,1,\dots$$

fj. $Ax=b \Rightarrow x_{k+1} = Bx_k + c$

Konvergenija familije dvoslojnih, stacionarnih, iterativnih metoda reda $p=1$ zasniva se na egzistenciji i jedinstvenosti nepokretne tačke operatora kontrakcije.

Banahova teorema (o nepokretnoj tački) i dokaz!
(isto kao i na UNM - otkucano u Banahova teorema.pdf)

Teorema (rađena na UNM).

Neka sistem $x=Bx+c$ ima jedinstveno rešenje. Tada iterativni proces $x_{k+1}=Bx_k+c, k=0,1,$ konvergira ka tom rešenju za svaki početni vektor x_0 akko su sve sopstvene vrednosti matrice B po modulu manje od 1.

Dokaz:

$\Rightarrow$: pps. $\exists \lambda_0(B)$ takva da $|\lambda_0(B)| > 1$

Neka je v_0 odgovarajući sop vektor $Bv_0 = \lambda_0 v_0$ i neka je x^* rešenje.

Uzmimo $x_0 = x^* + v_0$. Pošto konvergira za svaki početni vektor, dovoljno je pokazati da za ovaj neće $\Rightarrow$ kontradikcija.

$$x_k - x^* = (Bx_{k-1} + e) - (Bx^* + e)$$

$$= B(x_{k-1} - x^*)$$

$$= B[(Bx_{k-2} + e) - (Bx^* + e)]$$

$$= B^2(x_{k-2} - x^*)$$

$$= \dots =$$

$$= B^k \underbrace{(x_0 - x^*)}_{= v_0}$$

$$= B^k v_0$$

$$= B^{k-1} \cdot B \cdot v_0 = B^{k-1} \cdot \lambda_0 v_0 = \lambda_0 \cdot B^{k-2} \cdot B \cdot v_0 = \lambda_0^2 \cdot B^{k-2} v_0 = \dots$$

$$= \lambda_0^k \cdot v_0 \not\rightarrow 0 \text{ jer } |\lambda_0| > 1$$

$\Rightarrow \{x_k\}$ ne konvergira ka x^* (kontradikcija)

[$\Leftarrow$]: $\forall i, |\lambda_i(B)| < 1, \forall i$

Pokaži smo: $x_k - x^* = B^k(x_0 - x^*)$

Treba pokazati da $B^k \rightarrow 0$ (nezavisno od proizvoljnog x_0)

Podsećanje:

Žordanova matrica matrice A je $J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_m \end{pmatrix}$ gde je

$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_i}$, λ_i - sopst. vrednost od A , $n_1 + \dots + n_m = n$, $n = \dim(A)$.

Lema: Svaka kvadratna matrica A reda n slična je Žordanovoj matrici.

Iz sličnosti $\Rightarrow B = C^{-1} J C$ (gde je C neka regularna mat.)

$$B^2 = C^{-1} J C C^{-1} J C = C^{-1} J^2 C$$

!

$$B^k = C^{-1} J^k C$$

$$J^k = \begin{pmatrix} J_1^k & 0 \\ 0 & J_m^k \end{pmatrix} \quad (\text{stepenovanje blok-diagonalne mat})$$

Može se dokazati (indukcijom za $k > n_i$) da je svaki blok J_i^k oblika: (ne treba izvoditi za usmenič)

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & \binom{k}{1} \lambda_i^{k-1} & \dots & \binom{k}{n_i-1} \lambda_i^{k-n_i+1} \\ 0 & \lambda_i^k & & \binom{k}{n_i-2} \lambda_i^{k-n_i+2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \lambda_i^k \end{pmatrix}$$

Pošto je $|\lambda_i| < 1 \Rightarrow$ Svi elementi od $J_i^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$$\Rightarrow J_i^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow J^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow B^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow x^k - x^* \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \{x_k\} \text{ konvergira ka } x^* \quad \square$$

Napomena: Do ovog trenutka je sve isto kao na UNM. Prethodna teorema je bila potrebna da bi pokazali da će metoda konvergirati ukoliko je matrica A dijagonalno dominantna.

Pošto je $|\lambda_i(B)| \leq \|B\|$ i ako je $\|B\| < 1$ onda je sigurno, $|\lambda_i(B)| < 1$. (UNM)

Međutim, sada ^{NA 16} su nam od interesa slučajevi kada je $\|B\| > 1$, ali $|\lambda_i(B)| < 1$ tj. kada matrica A nije dijagonalno dominantna, ali konvergencija će postojati (na osnovu poslednje teoreme).

Na UNM su radene Jakobijeva metoda (metoda proste iteracije), Gaus-Žagdelova metoda.

Prvo ćemo ovo pokazati na njima, a zatim uvesti i nove metode.

Matricu sistema $Ax=b$ predstavljamo kao $A=L+D+U$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} & & U \\ L & D & \\ & & \end{bmatrix}$$

L - donje trougla sa 0

U - gornje trougla na dijagonali

D - dijagonalna

Jakobijeva metoda

$$Ax = b$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a_{11}} (-a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n) + b_1 \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} (-a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) + b_n \end{array}$$

↑
iz i -te jednačine izvučemo x_i , a sve
ostalo prebacimo na desnu stranu

Da bi predstavili u obliku $x = Bx + c$:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & & & 0 \end{bmatrix}$$

odnosno, matricno zapisano.

$$Ax = b, \quad A = L + D + U$$

$$\Rightarrow (L + D + U)x = b$$

$$Dx + (L + U)x = b$$

$$\hat{D}^{-1} Dx = -\hat{D}^{-1}(L + U)x + \hat{D}^{-1}b$$

$$x = \underbrace{-\hat{D}^{-1}(L + U)}_B x + \underbrace{\hat{D}^{-1}b}_C$$

$$\Rightarrow x = Bx + c$$

$$B = -\hat{D}^{-1}(L + U)$$

$$c = \hat{D}^{-1}b$$

Podsećanje: dijagonalna dominatnost (UNM).

Posto je $|\lambda_i(B)| \leq \|B\|$ za proizvoljnu normu, ako
izaberemo uniformnu normu dobijamo dijagonalnu
dominantnost po vrstama, tj.

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

dijagonalna dominatnost matrice A po vrstama

Da li je moguća dijagonalna dominantnost po kolonama?

Na UNM se znalo da može, ali nije se dokazivalo.

Kada sabiramo elemente vrste $\frac{a_{12}}{a_{11}} + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}$ možemo da izvučemo $\frac{1}{a_{11}}$ kao zajednički. Ali ako bi sabirali elemente kolone $\frac{a_{21}}{a_{22}} + \dots + \frac{a_{n1}}{a_{nn}}$ ne možemo ništa da izvučemo.

Zbog toga, posmatrajmo matricu $\hat{B} = -(L+U)D^{-1}$.

Ona je slična matrici B (ima iste sop. vrednosti), jer

$$\begin{aligned} \text{D.l. } \hat{B} &= -(L+U)D^{-1} \quad / \cdot D \\ D^{-1} \hat{B} D &= \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_B \underbrace{D^{-1} \cdot D}_I \end{aligned}$$

$\Rightarrow B, \hat{B}$ imaju iste sop. vrednosti

$\hat{B}$ je oblika:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & -\frac{a_{n2}}{a_{22}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\hat{B}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |\hat{b}_{ij}| = \max_j \sum_{i=1, i \neq j}^n \left| -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_j \sum_{i \neq j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| < |a_{jj}|, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

dijagonalna dominantnost po kolonama

Šta je q ? (koeficijent kontrakcije)

$$x = Bx + c$$

$$F(x) = Bx + c$$

$$F(x) - F(y) = Bx + c - By - c = B(x - y)$$

$\| \cdot \|$

$$\|F(x) - F(y)\| = \|B(x - y)\| \leq \underbrace{\|B\|}_{=q} \cdot \|x - y\|$$

Gauss - Zajdelova metoda

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 = -a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1} = -a_{nn}x_n + b_n \end{array} \right\}$$

$\downarrow$ koji se koriste iz $k+1$ iteracije $\downarrow$ iz k -te iteracije

$$Ax = b, A = L + D + U$$

$$(L + D + U)x = b$$

$$(L + D)x = -Ux + b$$

$$x = \underbrace{-(L + D)^{-1}U}_B x + \underbrace{(L + D)^{-1}b}_C$$

$$\Rightarrow x = Bx + C$$

$$B = -(L + D)^{-1}U$$

$$C = (L + D)^{-1}b$$

Važe isti uslovi za konvergenciju kao i kod Jakobija

Primeri

Ispitati konvergenciju Jakobijevu i Gauss - Zajdelove metode za sledeće matrice sistema.

Napomena: Na NAIb konvergenciju proveravati UVEK preko teoreme sa sop vrednostima, a ne preko dijagonalne dominatnosti

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_j = -D^{-1}(L + U) = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ za Jakobija

$$\det(B_j - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \text{Jakobi konvergenz}$$

$$B_{GZ} = -(L+D)^{-1} \cdot U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gaus-Zeidel

$$\det(B_{GZ} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2,3} \in \{0, 2, 2\}$$

$$|\lambda_{\max}(B_{GZ})| = 2 > 1$$

$\Rightarrow$ theorem ne garantuje konvergenciju G-Z metode.

2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \text{diag}(\text{diag}(A))$$

$$L = \text{tril}(A, -1)$$

$$U = \text{triu}(A, 1)$$

} Matlab

$$B_j = -\text{inv}(D) * (L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_c(B_j) = \text{eig}(B_j) = [1, 0.5, 0.5]$$

$\Rightarrow |\lambda_{\max}(B_j)| = 1 \not< 1 \Rightarrow$ nemamo konvergentnu Jakobijevu m.

$$B_{GZ} = -\text{inv}(L+D) * U = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.25 & -0.25 \\ 0.125 & 0.375 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_i(B_{GZ}) = \text{eig}(B_{GZ}) = [0, 0.3125 \pm 0.1654i]$$

$$\begin{array}{|l} z = x + iy \\ |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array}$$

$$|\lambda_{\max}(B_{GZ})| = 0.3536 \Rightarrow \text{G-Z konvergentna}$$

$$3) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix} \quad (\text{sami } \dots)$$

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_{\max}(B_j)| &= 0.444 < 1 \\ |\lambda_{\max}(B_{GZ})| &= 0.0185 < 1 \end{aligned} \right\} \text{ obe metode konvergiraju! }$$

U slučaju kad obe metode konvergiraju, brže će konvergirati ona metoda koja ima manji convergence rate, tj. $|\lambda_{\max}|$.

$|\lambda_{\max}(B_j)| > |\lambda_{\max}(B_{GZ})| \Rightarrow G-Z$ konvergira brže od Jacobija

$$4) \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{sami } \dots)$$

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_{\max}(B_j)| &= 0.6411 < 1 \\ |\lambda_{\max}(B_{GZ})| &= 0.7746 < 1 \end{aligned} \right\} \text{ obe metode konvergiraju}$$

Brže konvergira Jakobij jer $0.6411 < 0.7746$

Napomena: Ni jedna matrica iz ovih primera nije bila dijagonalno dominantna, ali je negde konvergencija postojala.
Konvergenciju UVEK proveravati na ovaj način.