

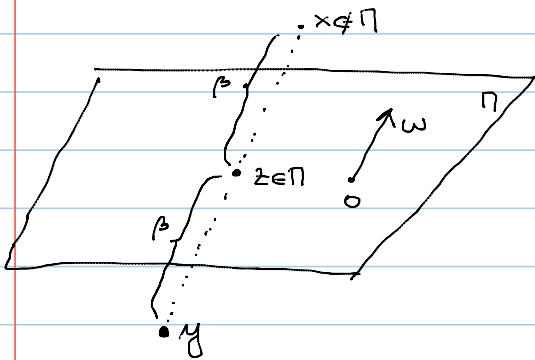
## Householderova metoda

- Svođenje matrice  $A$  u gornje-Hessenbergovu formu (ili trodiagonalnu matricu ukoliko je  $A$  simetrična).

### Geometrijska interpretacija:

Neka je  $w \in \mathbb{R}^n$  jedinični vektor :  $\|w\|_2^2 = w^* \cdot w = 1$ .

Vektor  $w$  određuje ravninu  $\Pi$  na koju je ortogonalan i koja sadrži  $O$ . Jednačina te ravnine je  $(x, w) = 0$  za svako  $x \in \Pi$  (jer su ortogonalni).



Za proizvoljno  $x \notin \Pi$ , tačka simetrična u odnosu na  $\Pi$  je:

$$y = x + \alpha \cdot w$$

Neka prava određena sa  $x$  i  $y$  seče  $\Pi$  u tački  $z = x + \beta \cdot w$ .

Pošto  $z \in \Pi$ , važi  $(z, w) = 0$ .

$$\Rightarrow (z, w) = (x + \beta w, w) = 0$$

$$\Rightarrow (x, w) + \beta \cdot \underbrace{(w, w)}_1 = 0 \quad (\text{jer je jedinični})$$

$$\Rightarrow \beta = -(x, w)$$

Tačka  $y$  je na duplo većoj udaljenosti od  $x$  ( $\alpha = 2\beta$ ):

$$y = x + \alpha w = x + 2\beta w = x - 2(x, w) \cdot w$$

$$= x - 2w(x, w) = x - 2\underbrace{w w^*}_{\text{matrica jer je } w \text{ kolona}} x$$

$$= \underbrace{(I - 2w w^*)}_{\text{Householderova matrica}} \cdot x$$

( $I$  je jedinična matrica  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ )

Householderova matrica

$$T = I - 2w w^*$$

## Osobine HH matrica:

1)  $T$  je Hermiteova  $T^* = T$

$$T^* = (I - 2ww^*)^* = I^* - 2(ww^*)^* = I - 2(w^*)^* w^* = I - 2ww^* = T$$

2)  $T$  je unitarna  $T^* = T^{-1}$

$$\begin{aligned} T^* \cdot T &= T \cdot T = (I - 2ww^*) \cdot (I - 2ww^*) \\ &= I - 2ww^* - 2ww^* + 4 \underbrace{ww^* ww^*}_{=1} \\ &= I - 4ww^* + 4ww^* \\ &= I \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T^* = T^{-1}$$

3a) Sopstvene vrednosti matrice  $T$  su  $\pm 1$ .

$\lambda(T)$  - s.vrednost od  $T$

$\frac{1}{\lambda}$  - s. vrednost od  $T^{-1}$

$$\lambda(T) = \frac{1}{\lambda(T^{-1})} \stackrel{(1,2)}{=} \frac{1}{\lambda(T)} \quad / \cdot \lambda$$

$$\lambda^2(T) = 1$$

$$\Rightarrow \lambda(T) = \pm 1$$

3b)  $T$  ima jednu sop.vrednost jednaku  $-1$  i  $n-1$  s.vrednosti jednaki  $1$ .

Hiperpravou  $(x, w) = 0$  ima  $n-1$  linearno nezavisnih vektora.

Za njih je  $Tx = x$  jer za svaku tačku  $x \in \Pi$  tačka simetrična u odnosu na  $\Pi$  je sama ta tačka.

Def. sop. vrednosti:  $Tx = \lambda x \Rightarrow \lambda = +1$  je sopstvena vrednost višestrukosti  $n-1$ .

Za vektor  $w \notin \Pi$  važi  $Tw = -w$  jer se  $w$  slika u  $-w$ .

pa je  $Tw = \underbrace{-1}_{\lambda} \cdot w$ , tj.  $-1$  je  $n$ -ta sop.vrednost.

$$4) \det(T) = -1.$$

Sledi iz 3b kao proizvod sopstvenih vrednosti.

5) Transformacije matricom  $T$  ne menjaju Euklidsku normu vektora

Neka je  $y$  dobijen transformacijom vektora  $x$  matricom  $T$ :

$$y = Tx$$

$$\|y\|_2^2 = (y, y) = (Tx, Tx) = (Tx)^* \cdot Tx = x^* \underbrace{T^* \cdot T}_{I \text{ (iz 2)}} \cdot x = x^* x = (x, x) = \|x\|_2^2$$

6) Skalarni proizvod  $(y, x)$  je realan broj. ( $y = Tx$ )  
 $(y, x) = x^* \cdot y = x^* T x = x^* T^* x = (Tx)^* \cdot (x^*)^* = \underline{(x^* T x)^*}$   
 $\Rightarrow x^* T^* x = (x^* T^* x)^* \Rightarrow \text{realan broj}$

### Određivanje matrice $T$ :

- Želimo da se  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  preslika u vektor kolinearnu vektoru  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ , tj.  $Tx = (k, 0, \dots, 0)^T$ .
- Da bi odredili  $T = I - 2ww^*$  dovoljno je da odredimo  $w$ .

(♥)

$$Tx = k \cdot e_1 \quad / \| \cdot \|$$

$$\|Tx\|_2^2 = \|ke_1\|_2^2 = |k|^2 \cdot \underbrace{\|e_1\|_2^2}_1 = |k|^2 \rightarrow \|x\|_2^2 = |k|^2$$

$$\|Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2 \quad (\text{osobina 5})$$

$$\text{Označimo } \sigma = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \Rightarrow \sigma^2 = |k|^2 \Rightarrow |k| = \sigma$$

$$\text{Pošto je } (Tx, x) = (ke_1, x) = x^* \cdot k \cdot e_1 = k \cdot |x_1| \cdot e^{-id}$$

$$(\text{eksponencijalni oblik kompleksnog br: } x_1 = |x_1| \cdot e^{id}, \text{ a minus } e^{-id} \text{ je zbog konjugata } x^*)$$

$$\text{Na osnovu osobine (5): } (Tx, x) \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot |x_1| \cdot e^{-id} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow k \in \mathbb{C} \text{ mora imati imenilac } e^{+id} \text{ (kako bi se anulirao)}$$

$$\Rightarrow k = \mp \sigma \cdot e^{id} \quad (\text{na osnovu } \uparrow : |k| = \sigma)$$

$$Tx = (I - 2ww^*)x = x - 2\underbrace{ww^*x}_{(\heartsuit)} = x - 2(x, w) \cdot w = k \cdot e_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{x - k \cdot e_1}_{\text{vektor}} = \underbrace{2}_{\text{skalar}} \underbrace{(x, w)}_{\text{vektor}} \Rightarrow \text{vektori } x - ke_1 \text{ i } w \text{ su kolinearni}$$

$$\Rightarrow w = \gamma \cdot (x - ke_1) \quad \gamma - \text{skalar}$$

$$\text{Pošto je } w \text{ jedinični} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\|x - ke_1\|_2}$$

$$\Rightarrow w = \frac{x - ke_1}{\|x - ke_1\|_2}$$

Treba još odrediti znak za  $k = \mp \sigma e^{id}$ . Zbog numeričke stabilnosti želimo da imenilac kod  $w$  ne bude blizak 0:

$$\begin{aligned}
 \|x - ke_1\|_2^2 &= (x - ke_1, x - ke_1) \\
 &= (x, x) - (ke_1, x) - (x, ke_1) + (ke_1, ke_1) \\
 &= \|x\|_2^2 - (ke_1, x) - (x, ke_1) + \underbrace{\|ke_1\|_2^2}_{\|k\|^2 = \sigma^2} \\
 &= \sigma^2 - (ke_1, x) - (x, ke_1) + \sigma^2
 \end{aligned}$$

$$|(ke_1, x)| = |x^* \cdot k \cdot e_1| = |k| \cdot |x_1| \cdot \underbrace{|e^{-id}|}_1 = \sigma \cdot |x_1|$$

$$(ke_1, x) = (x, ke_1) = \mp \sigma |x_1|$$

$$\rightarrow = 2\sigma^2 \pm 2\sigma |x_1|$$

$$= 2\sigma(\sigma \pm |x_1|)$$

\* Pošto u ovom koraku dolazi do "okretanja" znaka zbog minusa, da bi u ovom izrazu bilo  $\pm$  onda je kod zapisu  $k$  bilo  $\mp$

Pošto  $\sigma \geq 0$  (norma);  $|x_1| \geq 0$ , imenilac će biti veći ukoliko se ovde uzme znak  $+$ . To znači da kod  $k = \mp \sigma \cdot e^{id}$  treba izabrati znak  $-$

$$\Rightarrow k = -\sigma \cdot e^{id}$$

Konačno:

$$\begin{aligned}
 T &= I - 2ww^* = I - 2 \cdot \frac{x - ke_1}{\sqrt{2\sigma(\sigma + |x_1|)}} \cdot \underbrace{\frac{(x - ke_1)^*}{\sqrt{2\sigma(\sigma + |x_1|)}}}_{\in \mathbb{R}} \\
 &= I - \frac{(x - ke_1)(x - ke_1)^*}{\sigma(\sigma + |x_1|)}
 \end{aligned}$$

Označimo:  $u = x - ke_1$ ,  $\beta = \frac{1}{\sigma(\sigma + |x_1|)}$

$$\Rightarrow T = I - \beta \cdot u \cdot u^*$$

$$\sigma = \|x\|_2, \quad k = -\sigma \cdot e^{id}, \quad x_1 = |x_1| \cdot e^{id}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{id} = \frac{x_1}{|x_1|} = \text{sign}(x_1)$$

$$\Rightarrow k = -\sigma \cdot e^{id} \Rightarrow k = -\sigma \cdot \text{sign}(x_1)$$

- Kao i kod Givensove metode, matrica  $A_{n \times n}$  se transformiše u gornje-Hesenbergovu. Givens u svakoj iteraciji anulira 1 element pa je potrebno  $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$  iteracija, dok Ht u jednoj iteraciji anulira sve potrebne elemente odg. kolone pa je potrebno  $(n-2)$  iteracije.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

↓  
x

U prvoj iteraciji Ht biramo za x vektor koji će se preslikati u  $(k, 0, \dots, 0)^T$  iz prve kolone (sa cijem gornje-Hes.)  
 $\Rightarrow x = (a_{21}, \dots, a_{n1})^T$

$$T_1^{(n)} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1^{(n-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ k & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Da bi dobijena matrica bila slična polaznoj, potrebno je pomnožiti i sa desne strane sa  $T_1^{-1} = T_1^* = T_1$   
 $\Rightarrow A_1 = T_1 \cdot A \cdot T_1$

U m-tom koraku bira se x iz m-te kolone matrice  $A_{m-1}$ . Matrice T će se uvijek dopunjavati do dimenzije matrice A:

$$T_m^{(n)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & T^{(n-m)} \end{pmatrix}$$

Nakon  $n-2$  iteracije dobija se gornje-Hesenbergova matrica slična polaznoj