

Алгебра

16. 5. 2010.

1. Нека је p прост број и $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : p \nmid n\}$. Доказати да је R потпрстен од \mathbb{Q} .
2. Нека је R комутативан прстен. За елемент x кажемо да је нилпотентан уколико је за неко $n \geq 1$ испуњено $x^n = 0$. Доказати да скуп свих нилпотентних елемената чини идеал.
3. Ако је x нилпотентан елемент комутативног прстена са јединицом R доказати да је елемент $1 - x$ инвертибилан.
4. Нека је $R = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Показати да је R потпрстен од \mathbb{C} у коме је сваки елемент различит од 0 инвертибилан.
5. Нека је $R = I + J$ за неке идеале I, J прстена R . Доказати да је тада и $I^2 + J^2 = R$ ($I^2 = I \cdot I$).
6. Нека је S потпрстен прстена R и I идеал у R . Доказати или оповргнути: $S + I$ је потпрстен од R .
7. Показати да је пресек два потпрстена увек потпрстен, као и да унија не мора бити потпрстен.
8. Одредити идеал $I \triangleleft \mathbb{Z}$ задат са: $I = (\langle 45 \rangle + \langle 36 \rangle) \cap \langle 12 \rangle$.
9. Одредити праве делитеље нуле у прстенима \mathbb{Z}_{21} и \mathbb{Z}_{16} .
10. Одредити инвертибилне елементе у прстенима \mathbb{Z}_{15} и \mathbb{Z}_{36} и наћи њихове инверзе.
11. Одредити све идеале у прстенима \mathbb{Z}_{24} и \mathbb{Z}_{16} .
12. Испитати да ли је са $f(x) = \rho(x, 9)$ дефинисан један хомоморфизам $f: \mathbb{Z}_{36} \rightarrow \mathbb{Z}_9$ и у потврдном случају наћи $\text{Ker}(f)$.
13. Испитати да ли је са $f(x) = \rho(x, 6)$ дефинисан један хомоморфизам $f: \mathbb{Z}_{36} \rightarrow \mathbb{Z}_6$ и у потврдном случају наћи $\text{Ker}(f)$.