

# Алгебра

9. 5. 2011.

1. Одредити нормалну форму за Абелове групе задате генераторима  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и релацијама

(а)

$$\begin{aligned}9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 0 \\6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 11x_4 &= 0 \\3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0;\end{aligned}$$

(б)

$$\begin{aligned}4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 0 \\5x_1 + x_2 - x_3 + 12x_4 &= 0 \\2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - 3x_4 &= 0;\end{aligned}$$

(в)

$$\begin{aligned}7x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\9x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\2x_1 + 4x_2 - 2x_4 &= 0;\end{aligned}$$

(г)

$$\begin{aligned}5x_1 + 3x_2 - 3x_4 &= 0 \\2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\7x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0.\end{aligned}$$

2. Одредити инваријантне делитеље за групе

$$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{20}; \quad \mathbb{Z}_{28} \times \mathbb{Z}_{42}; \quad \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{16}.$$

3. Доказати да свака Абелова група реда 100 има елемент реда 10. Одредити инваријантне делитеље у случају да у таквој групи нема елемената реда већег од 10.
4. Класификовати све Абелове групе реда 81, 144 и 216.
5. Нека је  $p$  прост број и нека Абелова група реда  $p^n$  има  $p - 1$  елемената реда  $p$ . Доказати да је та група циклична.
6. Нека је  $G$  коначна Абелова група реда 360, која не садржи елементе реда 12, као ни елементе реда 18. Одредити инваријантне делитеље за  $G$ . Одредити број елемената реда 6 у групи  $G$ .
7. Доказати да је свака коначно генерисана нетривијална подгрупа групе  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  изоморфна или групи  $\mathbb{Z}_2$ , или групи  $\mathbb{Z}^s$  или групи  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^s$ , за неко  $s \geq 1$ .