Алгебра

21. 3. 2011.

1. Нека су H и K подгрупе групе G. Доказати да је HK подгрупа ако и само ако је $HK = KH$.
2. Наћи све нормалне подгрупе у групама D_4 и D_5.
3. Нека је H нормална подгрупа групе G и K нормална подгрупа од H. Примером показати да K не мора бити нормална подгрупа од G.
4. Нека су H и K нормалне подгрупе групе G и нека је $H \cap K = \{e\}$. Доказати: $(\forall x \in H)(\forall y \in K) xy = yx$.
5. Ако је H циклична нормална подгрупа групе G, доказати да је свака подгрупа од H такође нормална подгрупа групе G.
6. Доказати да је сваки елемент количничке групе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ коначног реда, док у количничког групи $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ниједан елемент (сем неутрала) нема коначан ред.
7. Нека је A нормална подгрупа групе G и B нормална подгрупа групе H. Доказати да је $A \times B$ нормална подгрупа групе $G \times H$, као и да је $(G \times H)/(A \times B) \cong (G/A) \times (H/B)$.
8. Доказати да је $f : G \to H$ хомоморфизам ако и само ако је $\{(x, f(x)) : x \in G\}$ подгрупа од $G \times H$.
9. Означимо са $f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где је $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ функције задате са $f_{a,b}(x) = ax + b$. Нека је $G = \{f_{a,b} : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}\}$ и $H = \{f_{1,b} : b \in \mathbb{R}\}$. Показати да је G група у односу на композицију функција, да је H нормална подгрупа групе G, као и да је $G/H \cong (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.