Алгебра

14. 3. 2011.

1. Нека је $H \leq S_n$ и нека $H \nsubseteq A_n$. Доказати да тачно половину елемената из H чине парне пермутације.
2. Доказати да је свака Абелова група реда pq, где су p и q различити прости бројеви, циклична.
3. Доказати да је свака Абелова група реда $p_1 \cdots p_n$, где су p_i различити прости бројеви, циклична.
4. Нека је G група реда $4n + 2$. Доказати да она садржи подгрупу реда $2n + 1$.
5. Испитати да ли у групи S_7 постоји елемент реда 12.
6. Испитати да ли у групи S_7 постоји елемент реда 8.
7. Одредити елемент максималног реда у групи S_9.
8. Нека су H и K подгрупе групе G. Доказати да је HK подгрупа ако и само ако је $HK = KH$.
9. Наћи све нормалне подгрупе у групама D_4 и D_5.
10. Нека је H нормална подгрупа групе G и K нормална подгрупа од H. Примером показати да K не мора бити нормална подгрупа од G.
11. Нека су H и K нормалне подгрупе групе G и нека је $H \cap K = \{e\}$. Доказати: $(\forall x \in H)(\forall y \in K) xy = yx$.
12. Ако је H <u>циклична</u> нормална подгрупа групе G, доказати да је свака подгрупа од H такође нормална подгрупа групе G.
13. Доказати да је сваки елемент количничке групе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ коначног реда, док у количничког групи $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ниједан елемент (сем неутрала) нема коначан ред.
14. Нека је A нормална подгрупа групе G и B нормална подгрупа групе H. Доказати да је $A \times B$ нормална подгрупа групе $G \times H$, као и да је $(G \times H)/(A \times B) \cong (G/A) \times (H/B)$.