Алгебра

7. 3. 2011.

1. Свакој пермутацији $\pi \in S_n$ придружимо пермутацију $\pi_* \in S_{n+2}$ на следећи начин: $\pi_*(i) = \pi(i)$, за $1 \leq i \leq n$, док је $\pi_*(n+1) = n+1$ и $\pi_*(n+2) = n+2$ уколико је π парна пермутација, а $\pi_*(n+1) = n+2$, $\pi_*(n+2) = n+1$, уколико је π непарна пермутација. Испитати да ли такво придруживање $\pi \mapsto \pi_*$ представља хомоморфизам групе S_n у групу A_{n+2}.
2. Показати да је свака коначна група реда n изоморфна некој подгрупи од A_{n+2}.
3. Ако је група $G \times H$ циклична, доказати да су и G и H цикличне групе.
4. Доказати да $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ није изоморфна са $\mathbb{Z}$.
5. Ако је $A \leq G$ и $B \leq H$, доказати да је $A \times B \leq G \times H$. Наћи подгрупу од $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ која није оваквог облика.
6. Испитати које су од следећих група изоморфне једна другој:
$$\mathbb{Z}_{24}, \quad D_4 \times \mathbb{Z}_3, \quad D_{12}, \quad A_4 \times \mathbb{Z}_2 \quad \mathbb{Z}_2 \times D_6, \quad S_4, \quad Z_{12} \times \mathbb{Z}_2.$$
7. Нека је G група реда 4, која није циклична. Доказати да је G изоморфна групи симетрија правоугаоника.
8. Доказати да је $D_{2n} \cong D_n \times \mathbb{Z}_2$ за све непарне $n \geq 3$.
9. Нека су H и K коначне подгрупе неке групе G и нека су редови тих подгрупа узајамно прости бројеви. Доказати да је $H \cap K = \{e\}$.
10. Ако је $H \leq G$, где је група G коначна и $|G| = m|H|$. Доказати да за свако $g \in G$ важи: $g^{m!} \in H$.
11. Одредити последњу цифру у развоју броја 5^{5^5} у систему са основом 7.
12. Одредити последњу цифру у развоју броја B^{B^B} у хексадекадном систему.