АЛГЕБРА

Групе

Дејства група

Зоран Петровић

28. март 2011.

Започнимо ову лекцију следећом дефиницијом.

Дефиниција 1 Нека је G група и X непразан скуп. Под дејством групе G на скупу X подразумевамо хомоморфизам $\varphi\colon G \to S_X$.

Дакле, овај појам и није непознат читаоцима. Већ смо у претходној лекцији користили овакве хомоморфизме у појединим примерима. Постоји други, еквивалентан начин, задавања дејства групе на скупу.

Дефиниција 2 Нека је G група и X непразан скуп. Под дејством групе G на скупу X подразумевамо функцију $\Theta\colon G \times X \to X$ за коју важи:

а) $\Theta(e, x) = x$, за све $x \in X$;

б) $\Theta(g, \Theta(h, x)) = \Theta(gh, x)$ за све $x \in X$ и $g, h \in G$.

Није тешко уверити се да су ове дефиниције еквивалентне. Наиме, ако је $\varphi\colon G \to S_X$ задат хомоморфизам, функцију $\Theta\colon G \times X \to X$, која задовољава тражене услове задајемо са

$$\Theta(g, x) := \varphi(g)(x).$$

Како је φ хомоморфизам, то је $\varphi(e) = id_X$, па је

$$\Theta(e, x) = \varphi(e)(x) = id_X(x) = x.$$

Такође је

$$\Theta(gh, x) = \varphi(gh)(x) = (\varphi(g) \circ \varphi(h))(x) = \varphi(g)(\varphi(h)(x)) =$$

$$= \varphi(g)(\Theta(h, x)) = \Theta(g, \Theta(h, x)).$$

Обратно, ако је задата функција $\Theta\colon G \times X \to X$, која има наведена својства, хомоморфизам $\varphi\colon G \to S_X$ дефинише се са

$$\varphi(g)(x) := \Theta(g, x).$$

Остављамо читаоцима да провере да је тако заиста добијен један хомоморфизам $\varphi\colon G \to S_X$.

Уместо $\Theta(g, x)$ често ћемо писати $g \cdot x$. Својства функције Θ се тада записују овако:

а) $e \cdot x = x$, за све $x \in X$;

б) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, за све $g, h \in G$ и $x \in X$.

Наравно, не треба „мешати“ ову ознаку са ознаком операције у групи G (операцију у групи често нећемо ни писати, као што смо и до сада радили у многим случајевима). У вези са дејством групе појављују се два значајна појма.

Дефиниција 3 Нека група G дејствује на непразном скупу X. Орбита елемента $x \in X$, у ознаци $\Omega(x)$, дефинише се са:

$$\Omega(x) := \{g \cdot x : g \in G\}.$$

Стабилизатор елемента $x \in X$, у ознаци Σ_x, дефинише се са:

$$\Sigma_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Наведимо неке примере дејства групе на скупу.

Пример 4 Нека је $X = \mathbb{R}^2$, а $G = \mathbb{Z}_2$. Тада је дејство групе G на скупу X задато са:

$$0 \cdot (x_1, x_2) = (x_1, x_2), \quad 1 \cdot (x_1, x_2) = (-x_1, -x_2).$$

Орбита елемента $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ је

$$\Omega(((x_1, x_2)) = \{(x_1, x_2), (-x_1, -x_2)\}.$$

Приметимо да је једино орбита елемента $(0, 0)$ једночлана, док су све остале двочлане. ♣

Пример 5 Нека је $X = \mathbb{C}$, а $G = \mathbb{C}_n$ (где је $n \geq 2$). Тада је дејство групе G на X задато са:

$$g \cdot x := gx.$$

Подсетимо се да је $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Дакле, $\mathbb{C}_n \subseteq \mathbb{C}$ и наведено дејство заиста јесте дефинисано. Орбита сваког комплексног броја $z \neq 0$ је

$$\Omega(z) = \left\{e^{\frac{2k\pi i}{n}} z : 0 \leq k < n\right\},$$

док је

$$\Omega(0) = \{0\}.$$

Дакле, свака орбита има или n елемената, или 1 елемент. ♣

Пример 6 Нека је G произвољна група и H нека њена подгрупа. Тада је задато дејство G на G/H са:

$$g \cdot (aH) := (ga)H.$$

У овом случају орбита ма ког елемента једнака је целом скупу X. За дејство које има само једну орбиту кажемо да је транзитивно. ♣

Пример 7 Нека је G произвољна група и H нека њена подгрупа. Дејство групе H на скупу G задато је са:

$$h \cdot x := hx.$$

Јасно је да је орбита елемента $x \in G$ једнака десном косету Hx. ♣

Пример 8 Нека је G било која група и $X = G$. Дејство G на G задато је са:

$$g \cdot x = gxg^{-1}.$$

Приметимо да се у овом случају орбите поклапају са класама конјугације, док се стабилизатори елемената из G поклапају са централизаторима тих елемената. ♣

Већ је из дефиниције, а посебно из ових примера, јасно да се природно може увести релација еквиваленције на скупу на коме дејствује нека група тако да се класе еквиваленције поклапају са орбитама. Између осталог добијамо да је X дисјунктна унија различитих орбита.

Следећи став повезује орбиту неког елемента и његов стабилизатор.

Став 9 Нека је X непразан скуп и нека група G дејствује на X. Тада је $\Sigma_x \leq G$ за свако $x \in X$. Осим тога, постоји бијекција између G/Σ_x и $\Omega(x)$.

Доказ. Како је $e \cdot x = x$, видимо да $e \in \Sigma_x$. Уколико $g \in \Sigma_x$, то је $g \cdot x = x$. Тада је и

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = e \cdot x = x,$$

па закључујемо да и g^{-1} припада стабилизатору елемента x. Ако су $g, h \in \Sigma_x$, то је

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = x,$$

па $gh \in \Sigma_x$. Тако смо показали да је $\Sigma_x \leq G$.

Бијекцију $f\colon G/\Sigma_x \to \Omega(x)$ задајемо са

$$f(g\,\Sigma_x) := g \cdot x.$$

Проверимо најпре добру дефинисаност функције f.

$$\begin{aligned} g\,\Sigma_x = h\,\Sigma_x &\implies h^{-1}g \in \Sigma_x \\ &\implies (h^{-1}g)\cdot x = x \\ &\implies h^{-1}\cdot(g\cdot x) = x \\ &\implies h\cdot(h^{-1}\cdot(g\cdot x)) = h\cdot x \\ &\implies (hh^{-1})\cdot(g\cdot x) = h\cdot x \\ &\implies e\cdot(g\cdot x) = h\cdot x \\ &\implies g\cdot x = h\cdot x. \end{aligned}$$

Јасно је да је f „на“. Остаје само да се провери да је f „1–1“.

$$\begin{aligned} g\cdot x = h\cdot x &\implies h^{-1}\cdot(g\cdot x) = h^{-1}\cdot(h\cdot x) \\ &\implies (h^{-1}g)\cdot x = (h^{-1}h)\cdot x \\ &\implies (h^{-1}g)\cdot x = e\cdot x \\ &\implies (h^{-1}g)\cdot x = x \\ &\implies h^{-1}g \in \Sigma_x \\ &\implies g\,\Sigma_x = h\,\Sigma_x. \end{aligned}$$

□

Применом овог резултата у случају коначне групе, добијамо следећу последицу.

Последица 10 Уколико коначна група G дејствује на непразном скупу X, онда ред орбите ма ког елемента дели ред групе G. □

Искористимо до сада добијене резултате за доказ Кошијеве теореме.

Доказ Кошијеве теореме. Дакле, нека је G коначна група и p прост број који дели ред групе G. Треба доказати да у G постоји елемент реда p. У ту сврху, нека је $H = \langle a\rangle$ нека циклична група реда p и

$$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in G^p : x_1x_2\cdots x_p = e\}.$$

Приметимо пре свега да је $|X| = |G|^{p-1}$. Наиме, $x_1, \ldots, x_{p-1}$ могу бити ма који елементи групе G, а тада је $x_p = (x_1, \ldots x_{p-1})^{-1}$. Стога $p \mid |X|$. Дејство групе H на X задато је са:

$$a\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_p) := (x_2, \ldots, x_p, x_1).$$

Дакле, дејство одговара цикличном пермутовању дате p-торке. Приметимо да је довољно задати дејство генератора пошто је H циклична група (зашто?). Како ред орбите ма ког елемента дели ред групе H, закључујемо да је ред ма које орбите или 1 или p. Приметимо да је орбита елемента $(e, e, \dots, e)$ једночлана. Како је X дисјунктна унија различитих орбита, тј.

$$X = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup \cdots \sqcup \Omega_k,$$

за неке орбите $\Omega_1, \dots, \Omega_k$, и како постоји бар једна једночлана орбита закључујемо да мора постојати бар још једна таква. Наиме, уколико је нпр. Ω_1 једина једночлана орбита, добили бисмо једнакост

$$|G|^{p-1} = 1 + p(k-1).$$

Но, ово није могуће пошто $p \mid |G|$. Нека је $\Omega_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_p)\}$ једночлана орбита различита од $\{(e, e, \dots, e)\}$. Тада мора бити

$$a \cdot (x_1, x_2, \dots, x_p) = (x_1, x_2, \dots, x_p),$$

тј.

$$(x_2, \dots, x_p, x_1) = (x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Добијамо да је $x_1 = x_2 = \cdots = x_p$. Означимо тај елемент са g. По претпоставци, $g \neq e$, а осим тога, како $(g, g, \dots, g) \in X$, мора бити $g^p = e$. Закључујемо да је g тражени елемент реда p. □

Видели смо да је број елемената у орбити неког елемента једнак индексу стабилизатора. Да ли постоји веза између стабилизатора два елемента из исте орбите? Важи следећи став.

Став 11 Нека група G дејствује скупу X. Ако су елементи x и y из исте орбите, онда су њихови стабилизатори конјуговане подгрупе.

Доказ. По претпоставци постоји елемент $g \in G$ такав да је $y = g \cdot x$. Покажимо да је

$$\Sigma_y = g\, \Sigma_x\, g^{-1}.$$

$\subseteq$: Нека је $h \in \Sigma_y$. Како је $y = g \cdot x$, то је $x = g^{-1} \cdot y$. Добијамо

$$(g^{-1}hg) \cdot x = g^{-1} \cdot (h \cdot (g \cdot x)) = g^{-1} \cdot (h \cdot y) = g^{-1} \cdot y = x.$$

Дакле, $g^{-1}hg \in \Sigma_x$, па $h \in g\, \Sigma_x\, g^{-1}$.

$\supseteq$: Нека је $h \in \Sigma_x$. Тада је

$$(ghg^{-1}) \cdot y = g \cdot (h \cdot (g^{-1} \cdot y)) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y.$$

Дакле, $g\, \Sigma_x\, g^{-1} \subseteq \Sigma_y$. □

Нека G дејствује на X и нека је g елемент из G. Скуп свих фиксних тачака елемента g, у ознаци X^g задаје се са:

$$X^g := \{x \in X : g \cdot x = x\}.$$

Приметимо да важи следеће:

$$x \in X^g \iff g \in \Sigma_x.$$

Став 12 Нека G дејствује на X. Ако су елементи g и h конјуговани, онда постоји бијекција између скупова X^g и X^h.

Доказ. Нека је $g = khk^{-1}$. Дефинишимо функцију $f\colon X \to X$ са $f(x) = k \cdot x$. Покажимо да f успоставља бијекцију између X^h и X^g.

$$x \in X^h \Rightarrow h \cdot x = x \Rightarrow g \cdot f(x) = g \cdot (k \cdot x) = k \cdot (h \cdot (k^{-1} \cdot (k \cdot x)))$$

$$= k \cdot (h \cdot ((k^{-1}k) \cdot x)) = k \cdot (h \cdot (e \cdot x)) = k \cdot (h \cdot x) = k \cdot x = f(x).$$

Дакле, $f\left[X^h\right] \subseteq X^g$. Но, ако $y \in X^g$, није тешко проверити да $k^{-1} \cdot y \in X^h$ (проверите!), док је очигледно $f(k^{-1} \cdot y) = y$. Стога добијамо да f заиста успоставља тражену бијекцију. $\square$

Формула која одређује број различитих орбита је веома корисна у разним применама. Дајемо је у оквиру наредне теореме.

Теорема 13 Нека коначна група G дејствује на коначном скупу X. Тада је број различитих орбита једнак броју

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Доказ. Означимо тражени број различитих орбита са k. Дакле,

$$X = \Omega_1 \sqcup \cdots \sqcup \Omega_k,$$

где су Ω_i различите орбите. Посматрајмо скуп E задат са

$$E = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}.$$

„Пребројаћемо“ елементе у E на два начина. Приметимо најпре да је

$$E = \bigsqcup_{g \in G} \{g\} \times X^g.$$

Дакле,

$$|E| = \sum_{g \in G} |X^g|. \tag{1}$$

С друге стране,

$$E = \bigsqcup_{x \in X} \Sigma_x \times \{x\}.$$

Према томе,

$$|E| = \sum_{x \in X} \Sigma_x = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in \Omega_i} |\Sigma_x|.$$

Како елементи из исте орбите имају конјуговане стабилизаторе, то је $|\Sigma_x| = |\Sigma_y|$ уколико су x и y у истој орбити. Изаберимо по један елемент x_i из сваке од орбита Ω_i. Добијамо

$$|E| = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x \in \Omega_i} |\Sigma_{x_i}| = \sum_{i=1}^{k} |\Omega_i||\Sigma_{x_i}| = \sum_{i=1}^{k} [G : \Sigma_{x_i}]|\Sigma_{x_i}| = \sum_{i=1}^{k} |G| = k|G|. \quad (2)$$

Из (1) и (2) тражени резултат следи. □

За крај наводимо један пример примене управо доказане формуле.

Пример 14 Темена, средишта ивица и тежишта страна правилног тетраедра треба обележети коришћењем три боје. Показати да има укупно 400707 начина на који се то може извести.

Ово заправо уопште није тешко показати, ма колико то у почетку изгледало. Размотримо најпре проблем мало пажљивије. Рецимо да желимо да темена тетраедра обележимо са две боје, нпр. плавом и црвеном, али тако да је једно теме обележено плавом бојом, а остала црвеном. Јасно је да је то могуће урадити на само један начин. Наиме, треба имати у виду да темена немају никакве додатне ознаке. Према томе, било које од њих обележимо плавом бојом, а онда сва остала црвеном. Ако бисмо наш тетраедар заротирали, добили бисмо само другачији распоред темена, али то је тај исти тетраедар!

Ево како ћемо поступити при решавању задатка. Означимо сва темена бројевима $1, 2, 3$ и 4. Означимо ивицу чија су крајња темена a и b са $[a, b]$ (при чему је $a < b$). На крају, означимо страну на којој су темена a, b и c са $[a, b, c]$ (при чему је $a < b < c$). Дакле, укупно имамо $4 + 6 + 4$ тачке које желимо да обележимо са три боје. Нека је X скуп свих могућих обележених тетраедара (са овако означеним теменима, ивицама и странама) са три боје као у условима примера. Видимо да је $|X| = 3^{14}$. То наравно није тражени одговор. Наиме, многи од ових обележених тетраедара са означеним теменима, ивицама и странама, заправо представљају један те исти обележени тетраедар, само посматран из различитих углова (да се тако изразимо).

У нашем поједностављеном примеру обележавања темена са две боје тако да је једно теме обележено плавом, а остала црвеном, добили бисмо 4 различита означена тетраедра (у зависности од тога које од означених темена смо обележили плавом бојом), а заправо постоји само једно бојење, пошто темена нису означена у поставци задатка. Сваки од овако обележених тетраедара се ротацијом може превести у било који други. Тако поступамо и при решавању постављеног задатка. Наиме, посматрамо дејство групе ротација тетраедра на скупу X и интересује нас број различитих орбита, пошто су тетраедри из исте орбите само различити положаји једног те истог обележеног тетраедра.

Група ротација правилног тетраедра је група A_4. По формули изведеној у претходној теореми, број различитих орбита је

$$\frac{1}{|A_4|}\sum_{\pi\in A_4}|X^{\pi}|.$$

Присетимо се да је $|X^g| = |X^h|$ уколико су елементи g и h конјуговани. Дакле, довољно је при примени горње формуле посматрати само по један елемент из сваке класе конјугације. Како су класе конјугације у групи A_4:

$$\{(123),(124),(134),(234)\};$$

$$\{(132),(142),(143),(243)\};$$

$$\{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\};$$

$$\{(1)\},$$

то добијамо да је број различитих орбита једнак

$$\frac{1}{12}\left(|X^{(123)}|\cdot 4+|X^{(132)}|\cdot 4+|X^{(12)(34)}|\cdot 3+|X^{(1)}|\cdot 1\right).$$

Одредимо $|X^{(123)}|$. Теме 4 може бити обележено било којом бојом. Ако је теме 1 обележено неком бојом, онда том бојом мора бити обележено и теме 2 и теме 3 пошто наведена ротација тетраедра преводи теме 1 у теме 2, теме 2 у теме 3, а теме 3 у теме 1, а ми посматрамо скуп фиксних тачака при дејству (123). Слично, ако је средиште ивице $[1,2]$ обележена неком бојом, онда том истом бојом мора бити обележено и средиште ивице $[2,3]$ и средиште ивице $[1,3]$. Исто то важи и за ивице $[1,4]$, $[2,4]$ и $[3,4]$. Тежиште стране $[1,2,3]$ може бити обележено ма којом бојом, али тежишта страна $[1,2,4]$, $[1,3,4]$ и $[2,3,4]$ морају бити обележена истом бојом. Добијамо да је

$$|X^{(123)}| = \underbrace{3}_{\text{теме } 4}\cdot\underbrace{3}_{\text{темена } 1,2,3}\cdot\underbrace{3}_{\text{ивице } [1,2],[1,3],[2,3]}\cdot\underbrace{3}_{\text{ивице } [1,4],[2,4],[3,4]}\cdot\underbrace{3}_{\text{страна } [1,2,3]}\cdot\underbrace{3}_{\text{стране } [1,2,4],[1,3,4],[2,3,4]} = 3^6.$$

Потпуно аналогно добијамо да је $|X^{(132)}| = 3^6$. С обзиром да је $X^{(1)} = X$, одредимо још и $|X^{(12)(34)}|$. У овом случају, темена 1 и 2 морају бити обележена истом бојом, као и темена 3 и 4. Средиште ивице $[1,2]$, као и ивице $[3,4]$ може бити обележено ма којој бојом, док средишта ивица $[1,4]$ и $[2,3]$ морају бити обележена истом бојом, као и средишта ивица $[1,3]$ и $[2,4]$. Тежишта страна $[1,2,3]$ и $[1,2,4]$ морају бити обележена истом бојом, као и средишта страна $[1,3,4]$ и $[2,3,4]$. Добијамо да је

$$|X^{(12)(34)}| = \underbrace{3}_{\text{темена } 1,2}\cdot\underbrace{3}_{\text{темена } 3,4}\cdot\underbrace{3}_{\text{ивица } [1,2]}\cdot\underbrace{3}_{\text{ивица } [3,4]}\cdot$$

$$\cdot \underbrace{3}_{\text{ивице}[1,4],[2,3]} \cdot \underbrace{3}_{\text{ивице }[1,3],[2,4]} \cdot \underbrace{3}_{\text{стране }[1,2,3],[1,2,4]} \cdot \underbrace{3}_{\text{стране }[1,3,4],[2,3,4]} = 3^8.$$

Дакле, број различитих орбита је

$$\frac{1}{12}\left(3^6 \cdot 4 + 3^6 \cdot 4 + 3^8 \cdot 3 + 3^{14} \cdot 1\right) = 400707.$$

♣