Алгебра

21. 2. 2011.

1. Нека је $G = \cup_{n=1}^{\infty}\{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$. Доказати да G чини групу у односу на множење комплексних бројева.

2. Испитати који од следећих скупова чине групу у односу на операцију множења по модулу 14:
$$\{1,3,5\}, \quad \{1,3,5,7\}, \quad \{1,7,13\}, \quad \{1,9,11,13\}.$$

3. Показати да подскуп од $\{1,2,\dots,21\}$, који садржи неки паран број и број 11 не може чинити групу у односу на множење по модулу 22.

4. Написати таблицу множења за групу $\mathbb{D}_4$.

5. Одредити ред сваког елемента из $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_9$ и $\mathbb{Z}_{14}$.

6. Нека је g елемент групе G. Доказати да је $G = \{gx : x \in G\}$, при чему је $gx \neq gy$ за $x \neq y$.

7. Доказати да група парног реда мора имати непаран број елемената реда 2.

8. Нека сви елементи x, y, xy неке групе G имају ред 2. Доказати да је $xy = yx$.

9. Нека је $G = \mathbb{Q} \cap [0,1)$. На скупу G је задата операција $+$ са:
$$x + y = \begin{cases} x + y, & 0 \leq x + y < 1 \\ x + y - 1, & x + y \geq 1. \end{cases}$$
Показати да је G бесконачна Абелова група чији су сви елементи коначног реда.

10. Нека је
$$GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ac - bd = 1 \right\}.$$
Доказати да је $GL_2(\mathbb{Z})$ група у односу на операцију множења матрица. Нека су матрице A и B из $GL_2(\mathbb{Z})$ задате са:
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Одредити ред елемената A, B, AB, BA.

11. Наћи све подгрупе група $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_{12}$, D_4 и D_5.

12. Доказати да су елементи $\rho\sigma$ и $\rho^2\sigma$ генератори групе $\mathbb{D}_n$.

13. Одредити подгрупу од $\mathbb{D}_n$ генерисану елементима ρ^2 и $\rho^2\sigma$; посебно дискутовати случајеве парног и непарног n.

14. Нека је H <u>коначан</u> непразан подскуп групе G. Доказати да је $H \leq G$ ако и само ако за све $x, y \in H$ важи $xy \in H$.

15. Нека је G Абелова група и H скуп свих елемената из G који су коначног реда. Доказати да је H подгрупа од G.

16. Доказати да Абелова група $\mathbb{Q}$ <u>нема</u> коначан скуп генератора.

17. Одредити групу симетрија правоугаоника који није квадрат.

18. Примером показати да постоји група G, која има подгрупе K_1, K_2 и K_3 тако да је $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ такође подгрупа групе G, а да $K_i \nsubseteq K_j$ за све $i \neq j$.