

Валис



Слика 1: Џон Валис

Џон Валис (1616–1701) био је један од првих чланова Краљевског друштва у Енглеској и сматра се за најутицајнијег енглеског претходника Њутна. Био је професор на Оксфорду и на тој позицији је наследио Бригза о коме је било речи у теми о логаритмима. Године 1665. Валис је објавио две изузетно значајне књиге од којих се једна бави даљим развојем аналитичке геометрије („Трактат о конусним пресецима”), но друга је ипак посебнија, пошто није имала свог пандана. Ради се о књизи „Аритметика бесконачно малих” у коме је Валис извршио ’аритметизацију’ Кавалијеријевих идеја о недељивим. Он је гледао да те идеје ослободи геометријских разматрања попут оних манипулација које је изводио Кавалијери поредећи дужи у троуглу и паралелограму, а које смо видели у Кавалијеријевом поступку налажења, *de facto* интеграла $\int_0^a x^n dx$. Ево како он објашњава како се, на пример, долази до резултата $\int_0^1 x^3 dx$.

Он пореди суме трећих степена чланова аритметичког низа, за који заправо узима да је $0, 1, 2, \dots$ са сумама трећег степена највећег од њих. Наиме, ова сума трећих степена одговара троуглу који се састоји од паралелних дужи чије дужине чине аритметички низ (а полази се од тачке, темена троугла и рачунају се кубови њихових дужина), а сума трећег степена највећег од њих одговара сумама кубова дужи у паралелограму који се састоји од једнаких паралелних дужи (он каже да се „такорећи троугао састоји од паралелних дужи...”; наравно да је за ово „такорећи” било критике од стране других математичара касније). Како је

$$\begin{aligned}
\frac{0+1}{1+1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
\frac{0+1+8}{8+8+8} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\
\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \\
\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \\
\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125+125} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \\
\frac{0+1+8+27+64+125+216}{216+216+216+216+216+216+216} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{24},
\end{aligned}$$

он закључује да се по индукцији може закључити да је однос увек за $\frac{1}{4n}$ већи од $\frac{1}{4}$ уколико је n највећи члан којим степенујемо. Наравно да се не ради о строгој математичкој индукцији, и због тога је био критикован од стране француских математичара, него о наслуђивању правила на основу постојећих примера. Констатује да када имамо суму бесконачно много чланова (да не улазимо сада у питање како је то замислио да се реализује, јасно је интуитивно шта жели) онда тог додатка и нема, те је тражени однос $\frac{1}{4}$. Ово он констатује за све n од 1 до 10. Но, сада може да закључи и то да је $\int_0^1 \sqrt[n]{x} dx = \frac{n}{n+1}$. Наиме, функција $y = x^n$ може се записати и као $x = \sqrt[n]{y}$, те је површина испод криве $y = \sqrt[n]{x}$ (када је $0 \leq x \leq 1$), а која се може записати и као $x = y^n$ заправо комплемент површини испод криве $y = x^n$ када је $0 \leq x \leq 1$. Пошто за њу зна да је једнака $\frac{1}{n+1}$, ова друга је $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Онда он смело закључује да је површина испод криве $y = x^{m/n}$ (модерне ознаке, он је користио нешто другачије ознаке) једнака $\frac{1}{1+\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n}$.

Ево још једног његовог занимљивог закључивања, у коме је антиципирао касније Ојлерове резултате о Гама и Бета функцији. Знајући претходне резултате, он је могао да израчуна површине испод кривих $y = (x - x^2)^n$ за $0 \leq x \leq 1$ (дакле, *de facto* $\int_0^1 (x - x^2)^n dx$). Пошто је израчунао за неколико вредности n , закључио је да је резултат (у нашим садашњим ознакама) $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. С друге стране је знао да је интеграл $\int_0^1 (x - x^2)^{1/2} dx$ заправо површина полукруга полупречника 1/2, те мора бити једнак $\frac{\pi}{8}$. Но, није знао како да тог резултата директно дође пошто није знао како да 'развије' $(x - x^2)^{1/2}$ у нешто што би му омогућило рачунање, тј. није знао биномну формулу за експонент 1/2. Но, ипак је смело заменио $n = 1/2$ у горњу формулу и добио да је

$$\int_0^1 (x - x^2)^{1/2} dx = \frac{(\frac{1}{2}!)^2}{2!},$$

те је тако дао смисао изразу $\frac{1}{2}!$:

$$\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Подсетите се формула за Гама и Бета функцију.)

Још један његов вредан резултат, који носи назив по њему, је Валисова формула:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}.$$

Начин на који је дошао до ње је изузетно занимљив, али га ипак нећемо наводити.

Бароу



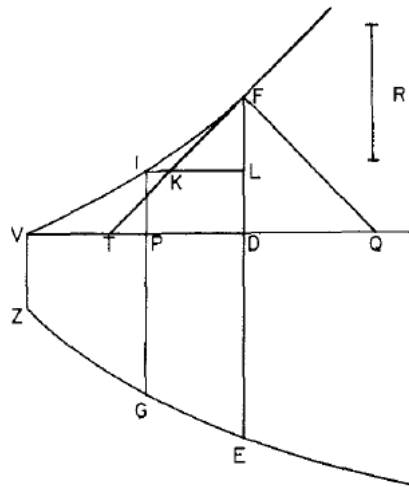
Слика 2: Исак Бароу

Исак Бароу (1630–1677) био је други енглески математичар који је извршио велики утицај на Њутна. Он је био професор на Кембриџу и његов приступ математици је био дијаметрално супротан од Валисовог. Није волео алгебарске формализме и сматрао је да алгебра треба да буде део логике, а не математике. Велики поштовалац грчке науке, уређивао је дела Еуклида, Аполонија и Архимеда. Његова два значајна дела су „Лекције из оптике” из 1669. и „Лекције из геометрије” из 1670. Њему је у припремама за објављивање ових дела помогао Њутн који је слушао његова предавања на Кембриџу. Као што је и сам Бароу рекао, „Лекције из геометрије”, које се састоје из 13 лекција, нису у потпуности сређене, али је ипак, на наговор пријатеља (Њутна) решио да их објави такве какве су „у природном

Нека је ZGE нека крива чија је оса VD и нека су ортогоналне ординате на ову осу (VZ , PG , DE) такве да непрекидно расту од почетне ординате VZ . Нека је VIF крива таква да ако се постави права линија EDF ортогонално на VD , а која сече криве у тачкама E и F , а VD у тачки D , правоугаоник који је одређен дужином DF и датом дужином R једнак је површини $VDEZ$, а осим тога је тачка T таква да је $DE:DF = R:DT$. Ако се споје тачке T и F , онда ће TF додиривати криву VIF .

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt \right) = -Rg'(x) = -R \frac{g(x)}{DT} = -\frac{R}{DT} g(x) = -\frac{f(x)}{g(x)} g(x) = f(x).$$

4



Узмимо било коју тачку I на кривој VIF (најпре са исте стране F са које је и V) и кроз њу поставимо IG паралелно са VZ и IL паралелно са VD , које секу дате линије у тачкама као на слици. Тада је $LF : LK = DF : DT = DE : R$, односно $R \cdot LF = LK \cdot DE$.

Али, из природе наведених линија DF и LK , имамо да је $R \cdot LF$ једнако површини $PDEG$. Стога је $LK \cdot DE$ једнако површини $PDEG$ која је мања од $DP \cdot DE$. Те је $LK < DP = LI$. На сличан начин се показује да ако се I узме на другој страни од F (у односу на V), и иста конструкција понови, лако се показује да је $LK > DP = LI$.

Одавде је јасно да се цела права TKF налази испод криве VIF .

Он затим додаје да се на сличан начин тражено може добити ако ординате VZ , PG и DE опадају.

Ако постоји нека недоумица зашто је $R \cdot LF$ једнако површини $PDEG$, приметимо да је $R \cdot IP$ једнако површини $VPGZ$, те одатле следи и то што је наведено, јер је $LF = DF - DL = DF - IP$.

Њутн и Лајбниц

Да би се привело крају формирање *Calculus* било је потребно некако ујединити геометријски приступ (Кавалијери, Бароу) и рачунски (Декарт, Ферма, Валис) и прецизно истаћи везу између тражења тангенти и квадратуре. То су извели Њутн и Лајбниц, а касније су њихови следбеници наставили да појашњавају и развијају метод. Наравно, као што смо већ рекли, све је то најзад постављено на чврсте основе тек крајем деветнаестог века, али до главних резултата се дошло знатно раније.

Њутн је до своје верзије Calculusa дошао у годинама 1664–1668, док је Лајбниц своју верзију формирао у периоду 1672–1676. Јасно је да је Њутн дошао до резултата раније, али их је објавио доста касније, док је Лајбниц своју верзију објавио непосредно по откривању својих резултата. Лајбницова верзија је била практичнија и јаснија и брзо се развијала кроз радове браће Бернули, Ојлера и других. Маркиз де Лопитал (1661–1704)



Слика 4: Гијом Франсоа Антоан Маркиз де Лопитал

је објавио чак и уџбеник „Анализа бесконачно малих” 1696. године на француском у коме су ове идеје изложене. Он је ту навео да је и Њутн дошао до одговарајућих резултата, али је Лајбников метод знатно лакши и ефикаснији пре свега због погодније нотације. Занимљиво је напоменути да тај уџбеник заправо представља сређене лекције које је Лопиталу о новим резултатима држао Јохан Бернули.



Слика 5: Јохан Бернули (1667–1748)

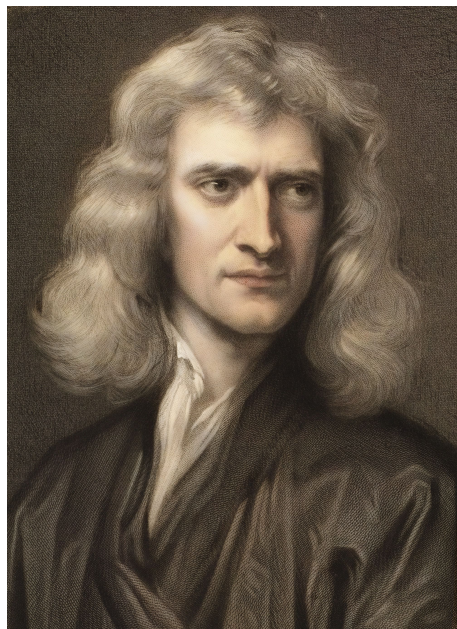
Рецимо, данас нам добро познато Лопиталово правило је заправо Бернулијев резултат. Наиме, за добар хонорар, Бернули је пристао да даје лекције Лопиталу, који је био врло способан математичар аматер, уз то веома имућан човек и племић. Бернули му је такође слао, према договору, своје нове резултате, које није смео да шаље другим математичарима. Питање је зашто је Бернули направио такав договор, пошто му је позиција професора у Гронингену ипак обезбеђивала довољно средстава. Вероватно је желео да искористи добар положај имућног племића. Све у свему, уџбеник је био одлично написан и објављиван је у више издања. Лопитал је умро као млад човек и после његове смрти Јохан Бернули је навео да су то његови резултати, посебно „Лопиталово правило”. Занимљиво је да му је ретко ко у то поверовао, пошто је он био познат по својим расправама о првенству открића, док је Лопитал важио за врло пристојну особу. Бернулијева прича је потврђена тек почетком двадесетог века налажењем одговарајуће кореспонденције и лекција које је он држао Лопиталу. У сваком случају, данас се сматра да је ту и Лопитал дао значајан допринос у излагању резултата.

Њутнове идеје су даље развијали Тејлор, Меклорен и други британски математичари. Разлог зашто су се тиме бавили само британски математичари треба најпре потражити у расправи о приоритету открића. Занимљиво је да је Њутн у почетку у потпуности признавао Лајбницу независно откриће, али је драстично променио мишљење када су му неки почели да причају како се *Calculus* на европском континенту у потпуности сматра за Лајбницово откриће. Кренуле су оптужбе за плагијат и свачега је ту било. Ми се тиме нећемо бавити. Јасно је да су обојица имали значајан удео у формирању *Calcu-*

lusa. Тек почетком деветнаестог века су британски математичари прихватили Лајбницеve ознаке, највише под утицајем Лапласових резултата. Њутнова ознака $\dot{x}$, за извод по времену, је ипак остала до данас. Физичари је посебно доста користе.

Најпре ћемо се позабавити Њутновим резултатима, пошто је ипак он до њих дошао раније.

Њутн



Слика 6: Исак Њутн

Исак Њутн (1643–1727) је, на препоруку ујака који је завршио Кембриџ уписао Тринити Колеџ 1661. године и свакако није планирао да постане математичар пошто је до тада врло мало учио математику. Чак се и на самом Кембриџу у то време веома мало предавала математика. Но, он је одмах кренуо да учи Еуклида, а потом и Ван Схутеново издање Декартове „Геометрије”, веома цењен у то време Отредов уџбеник „Кључ за математику”, Кеплерову „Оптику”, Вијетове радове и, наравно, Валисову „Аритметику”. Осим тога, слушао је и Бароуове лекције. После 1663. се упознао и са делима Галилеја, Ферма, Хајгенса и других математичара.

Од 1664. почиње сопствена истраживања. Први резултат до кога је дошао је била биномна теорема за рационалне изложнице. Заправо

је он само открио формулу, није је никада доказао, а није је ни сам објавио. Његова размишљања на ту тему налазе се у писмима која је слао Олденбургу, Немцу који је био стални секретар Краљевског друштва и који је водио интензивну кореспонденцију са многим мислиоцима у то време, нешто попут Марина Мерсена у Француској. Ради се о два писма, која су заправо настала као одговор на Лајбницово интересовање о томе шта је Њутн урадио у вези бесконачних редова. Ова писма су касније објављена у оквиру Валисове „Алгебре”.

Прво писмо је из јуна 1676. године. Оно почиње похвалама Лајбницу, који је, како каже Њутн, сигурно до свега тога дошао и сам, чак можда и боље, али кад се већ распитује шта су Енглези по том питању урадили, ево да он, који је до тога дошао пре неколико година, бар делимично испуни његове жеље.

Разломци се свode на бесконачне редове дељењем; а величине које у себи садрже корене, налажењем корена, извођењем операција са симболима као што се оне уобичајено раде за децималне бројеве. То су основе ових редукција. Али налажење корена се знатно упрошћава овом теоремом

$$(P + PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \text{итд.}$$

где је $P + PQ$ величина чији се корен или неки степен или корен неког степена тражи.

Овде најпре да кажемо да је Њутн користио малу другачију нотацију. У то време се уместо заграда користила црта изнад израза. Њутн је заправо писао $\overline{P+PQ}^{m/n}$. Ово и није необично колико нам се чини. Заправо остатак тога имамо у запису корена. Корен је заправо $\sqrt{\quad}$, а ми онда постављамо црту изнад свега што је под тим кореном. Дакле, да би било јасније, пишемо $\sqrt{a+b}$, а не само $\sqrt{a+b}$. Код Њутна је то овако записано: $\sqrt{a+b}$.

Њутн затим објашњава мало ову нотацију, па пише, на пример, да уместо $\sqrt{c:a^5}$ пише $a^{\frac{5}{3}}$ ($\sqrt{c}$: се користило за кубни корен). А и каже да A, B, C, D , представљају цео претходни израз. Па је $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n} AQ$ и слично за C и D . Даје и пример

$$(c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \text{итд,}$$

који детаљно образлаже.

Остали примери дају решење једначина $y^3 - 2y - 5 = 0$ и $y^3 + axy + a^2y - x^3 - 2a^3 = 0$, редове за $\sin x$, $\sin^2 x$, решење једног Кеплеровог проблема за елипсу, ректификацију лука елипсе и хиперболе, површину хиперболе уз помоћ развоја за логаритам, квадратуре квадратрисе и запремину одсечка ротационог елипсоида. Њутн не жели баш све да открије, те наводи резултате који су познати.

Наравно, овде је природно запитати се какве везе имају решења ове две наведене једначине са развојем у ред. Наиме, Њутн је 1669. године, када је проучио рад Меркатора „*Logarithmotechnia*” из 1668. и Грегорија „*De vera circuli et hyperbolae quadratura*” из 1667. у којима су разматрани и неки развоји у редове, саставио рукопис „О анализи једначинама са бесконачно много чланова”, који је објављен тек доста касније, 1711. године. У том делу разматра баш та два примера. Ево како је он то радио.

Најпре се позабавио нумеричким решењем горенаведене једначине $y^3 - 2y - 5 = 0$. Примећује да је једно решење близу двојци, те поставља $y = 2 + p$. Заменом у горњу једначину добија $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. Како је p мало, он занемарује део $p^3 + 6p^2$ и поставља $10p - 1 = 0$. Добија да је $p = 0,1$. Наравно, p није толико, али је близу, стога поставља $p = 0,1 + q$ и то ставља у једначину по p . Добија $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$. Зна да је q мало, па занемари $q^3 + 6,3q^2$ и добије $11,23q + 0,061 = 0$. Стога за q узима приближно $-0,0054$ (овде је извршио заокруживање, али нема то значаја) и поставља $q = r - 0,0054$. Добија једначину по r и занемаривањем виших степена добија $r = -0,00004853$ (као што и овде видите, Њутн је волео да рачуна). Тако да добија приближно решење једначине 2,09455147. Ево таблице коју је дао да прикаже рачун.

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147 = y$
$2 + p = y$	$+y^3 + 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $+2y - 4 - 2p$ $-5 - 5$ Summa $-1 + 10p - 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+p^3 + 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+6p^2 + 0,06 + 1,2 + 6,0$ $+10p + 1, + 10,$ $-1 - 1,$ Summa $+0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+6,3q^2 + 0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$ $+11,23q - 0,060642 + 11,23$ $+0,061 + 0,061$ Summa $+0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004854 + r = r$	

Затим прелази на, *de facto*, симболичко решавање једначине

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0.$$

Најпре тражи шта се добија када је $x = 0$. Добије једначину $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ и констатује да је решење $y = a$. Сада у почетну једначину

замени $y = a + p$ и посматра само линеарне и константне чланове по p , тј. $4a^2p + a^2x = 0$. Дакле, p је „приближно” $-\frac{1}{4}x$. Замени $p = -\frac{1}{4}x + q$ и понови поступак. На следећој табlici можемо видети тражени развој у и поступак рачунања.

$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \&c.$		
$+a+p=y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$ $+a^3 + a^2p$ $+a^2x + axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+ax^2$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{8}axq + 3aq^2$ $-a^2x + 4a^2q$ $-\frac{1}{2}ax^2 + axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a} + r = q$	$+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}ax^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{6}{64}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^3r + 3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$ $-\frac{1}{16}xq^3 - \frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}ax^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{6}{64}x^3$
$+4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2 + \frac{1}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$		

Вратимо се кореспонденцији Њутна и Лајбница преко Олденбурга. Лајбниц је одговорио на ово писмо у августу и у њему је навео неке своје резултате о квадратурама, алудирајући на то да има општи метод. Такође је навео неке примере редова, попут $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, који представља однос површине круга и њему описаног квадрата (дакле $\pi/4$).

Њутн је одговорио у октобру дужим писмом у коме је похвалио Лајбница на резултатима и навео да је и он дошао до таквих резултата. Па ће у овом писму указати на други начин како је дошао до неких развоја.

На почетку својих студија математике, када сам се упознао са радовима нашег славног Валиса, при разматрању редова чијим је уметањем он сам одредио површине круга и хиперболе, чињеница је да се у низу кривих чија је заједничка база или оса x а ординате

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}, (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, (1-x^2)^{\frac{2}{2}}, (1-x^2)^{\frac{3}{2}}, (1-x^2)^{\frac{4}{2}}, (1-x^2)^{\frac{5}{2}}, \text{ итд.}$$

ако се површине сваке друге међу њима, наиме

$$x, \quad x - \frac{1}{3}x^3, \quad x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, \quad x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7, \text{ итд.}$$

могу интерполирати, морали бисмо добити површине оних између њих, од којих је прва $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ круг: да бих интерполирао ове редове приметио сам да је код свих њих први члан x и да су други чланови $\frac{0}{3}x^3, \frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3$, итд. у аритметичком низу, и стога прва два члана реда који настаје уметањем треба да буду $x - \frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^3)$, $x - \frac{1}{3}(\frac{3}{2}x^3)$, $x - \frac{1}{3}(\frac{5}{2}x^3)$, итд. Да бих уметнуо остале чланове, приметио сам да су имениоци 1, 3, 5, 7, итд. у аритметичком низу, тако да само још вредности бројилаца треба одредити. Али, у датим површинама појављивале су се цифре бројева који су степени броја 11, наиме $11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4$, тј. најпре 1; онда 1,1; на трећем месту 1, 2, 1; на четвртом 1, 3, 3, 1; на петом 1, 4, 6, 4, 1, итд. И онда сам почео да размишљам како се остали бројеви у низу могу добити помоћу прва два и нашао сам да ако ставимо m за други број, остали се добијају непрекидним множењем чланова овог низа

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}, \text{ итд.}$$

На пример, ако је $m = 4$, онда ће $4 \times \frac{1}{2}(m-1)$, тј. 6 бити трећи члан и $6 \times \frac{1}{3}(m-2)$, тј. 4 ће бити четврти, $4 \times \frac{1}{4}(m-3)$, тј. 1 ће бити пети и $1 \times \frac{1}{5}(m-4)$, тј. 0 ће бити шести у ком тренутку се низ зауставља. У складу са тим сам применио ово правило и како је, за круг, други члан $\frac{1}{3}(\frac{1}{2}x^3)$, ставио сам $m = \frac{1}{2}$ и онда су чланови који су се појавили били

$$\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2} \text{ или } -\frac{1}{8}, \quad -\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3} \text{ или } +\frac{1}{16}, \quad \frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4} \text{ или } -\frac{5}{128},$$

и тако до бесконачности. Тако сам разумео да је површина кружног одсечка коју сам тражио

$$x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{3} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \quad \text{итд.}$$

Потом констатује да се тако могу формирати одговарајући редови и за остале случајеве. Но, онда је приметио да се и

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{6}{2}}, \quad \text{итд,}$$

тј.

$$1, \quad 1-x^2, \quad 1-2x^2+x^4, \quad 1-3x^2+3x^4-x^6, \quad \text{итд.}$$

могу на исти начин интерполирати као и површине које они одређују. Само нема имениоца 1,3,5,7, итд. Дакле, помоћу раније примећеног правила добио је да је

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \dots$$

као и развоје за $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ и $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. Тако је добио опште правило за развој које је презентовао у првом писму. Да би проверио те развоје помножио је $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\dots$ са самим собом и заиста добио $1-x^2$, јер су остали чланови реда нестали. Слично је $1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\dots$ помножио два пута са самим собом и добио заиста $1-x^2$, те је тако проверио и развој за $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. Напокон је извео и другачију проверу. Наиме, нашао је $\sqrt{1-x^2}$ помоћу стандардног метода којим се тражи квадратни корен из неког броја формирањем цифара, а који смо раније објаснили. Овде нам степени x -а представљају цифре. И наравно да је добио исти резултат.

Занимљиво је ово што је Њутн писао прокоментарисати. Видимо да је он „погађао” резултат на један доста једноставан начин. То вероватно није необично, пошто је био инспирисан Валисовим радом, а код њега тога доста има. Но, ипак је извршио проверу касније на други начин. Друга је ствар да он уопште не говори о обичном биномном развоју и одговарајућим коефицијентима (Паскалов троугао), него до тога долази из разматрања површине. Забавна је и напомена у вези степена броја 11. Нама је јасно да се тај феномен дешава због обичне биномне формуле и чињенице да је $11^n = (10+1)^n$. Но, тако можемо добити само биномне коефицијенте који су једноцифрени. Ако бисмо желели да добијемо двоцифрене, онда би требало посматрати 101^n . На пример $101^5 = \underline{1\ 05\ 10\ 10\ 05\ 01}$. За вишецифрене наравно треба гледати степене бројева 1001, 10001, итд.

Њутн потом у писму наводи следећи анаграм

6accdae13effi3l9n4o4qrr4s8t12vx.

Наравно, ми смо навикли на занимљивије анаграме, где треба од неке речи или реченице, које све имају смисла, пермутацијама слова направити нову реч или реченицу. Но, овде је само наведен број појединих слова. Ако би Лајбниц могао ово да распетља, добио би

Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvent fluxiones invenire et vice versa.

У преводу:

За дату једначину која укључује ма који број течних величина, наћи протоке, и обратно.

Пре него што прокоментаришемо „шта је писац хтео да каже”, наведимо, као занимљивост да су научници у то време користили анаграме да објаве неки свој резултат и да тако установе свој приоритет у проналаску. На пример, Хајгенс је 1655. објавио своје откриће Сатурновог месеца (то је тада био први, сада знамо да је то највећи његов сателит Титан) у облику анаграма:

ADMOUERE OCULIS DISTANTIA SIDERA NOSTRIS UUUUUUU CCCRRHNBQX.

Решење: *Saturno luno sua circumducitur diebus sexdecim horis quatuor*, у преводу: Сатурнов месец има орбитални период од 16 дана и 4 сата.

Дакле, Њутн је желео да обезбеди свој приоритет. У чему? Он ту наводи да има општи метод и то је његов метод флуksiја. Овде одмах треба рећи да смо у преводу анаграма превели, да се тако изразимо, и више него што је требало. Наиме, 'течне величине' ћемо убудуће звати 'флуенте', а нећемо користити ни термин 'проток', него флуksiја. Њутн је разматрао величине које се мењају у времену (то су те флуенте) и брзине њихових промена (флуksiје). Вратићемо се на ово врло брзо.

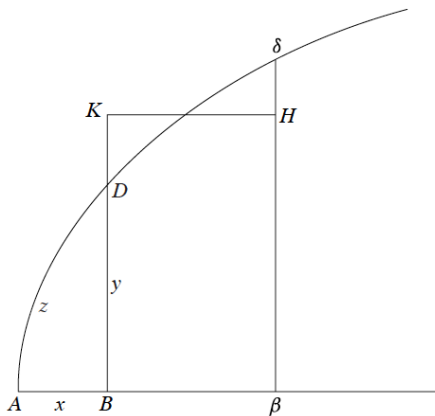
У писму наводи кратко како се налази квадратура криве $z^\theta(e + fz^\eta)^\lambda$ (овде уместо u користи z , док су f и e константе, а θ , λ и η рационалне константе). Заправо овде видимо основни његов метод решавања проблема квадратуре. На почетку свог раније споменутог дела „О анализи једначинама са бесконачно много чланова” Њутн наводи три правила за рачунање површине испод кривих.

Правило 1. Ако је $y = ax^{\frac{m}{n}}$, онда је површина испод y једнака $a\frac{n}{n+m}x^{\frac{n+m}{n}}$.

Правило 2. Ако је u сума више чланова, којих може бити и бесконачно, онда је површина испод u дата сумом површина за све чланове.

Правило 3. Да би израчунали површину испод криве $f(x, y) = 0$, треба развити u као суму чланова облика $ax^{\frac{m}{n}}$ и применити Правило 1 и Правило 2.

Видели смо да је Валис извео то прво правило. Ево како је Њутн доказао то правило.



Треба да докаже да, ако је $ax^{\frac{m}{n}} = y$, онда је $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} =$ површина ABD . Заправо, он доказује обрат, тј. из претпоставке да је површина дата наведеном формулом, онда је и u тако као што је наведено!

Најпре је, као припрему, детаљно доказао специјалан случај, када је $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Са цртежа видимо ознаке, а још је $B\beta = o$ и $BK = v$. Ево како он доказује општи случај.

Ако се стави да је $\frac{na}{m+n} = c$ и $m+n = p$, тада је $cx^{\frac{p}{n}} = z$, или $c^n x^p = z^n$. Тада заменом $x+o$ уместо x и $z+ov$ (или, што је исто $z+ou$) уместо z , добија се

$$c^n(x^p + pox^{p-1} \text{ итд.}) = z^n + noyz^{n-1} \text{ итд.}$$

при чему испуштам остале чланове који ће на крају крајева нестати. Даље, ако одбацам једнаке $c^n x^p$ и z^n , а остале поделим са o , остаје

$$c^n px^{p-1} = nyz^{n-1} \left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}} \right)$$

или, када се подели са $c^n x^p$:

$$px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}} \quad \text{или} \quad pscx^{\frac{p-n}{n}} = ny.$$

Када се c замени својом вредношћу $\frac{na}{m+n}$, а p са $m+n$... добија се $ax^{\frac{m}{n}} = y$.

Дакле, он овде користи да су операције којима барата, а које су, *de facto* налажење интеграла $\int_0^x f(t)dt$ и извода, инверзне једна другој да би дошао до закључка. Заправо он наводи после и таблицу кривих и површина, односно, *de facto*, таблицу интеграла. У вези доказа можемо да кратко прокоментаришемо да му је o та мала величина (без обзира што на слици изгледа велико!) и да променом x за то o се површина z повећа за површину правоугаоника (свеједно да ли за страницу узме u или v и једно и друго је приближно, а на крају v постаје u — у доказу специјалног случаја, он користи v и ради развоје до краја, дакле детаљније и пажљивије).

Њутну је од централног значаја било то што је и са редовима могао да ради исто као и са коначним изразима. Ево шта је о томе рекао у овом делу:

И шта год да обична Анализа (мисли на алгебру) остварује помоћу једначина са коначно много чланова, нови метод може то исто да уради помоћу бесконачних једначина. Тако да нисам имао никакав проблем да му дам име Анализа. Пошто резоновање није мање сигурно него у претходном нити су једначине мање егзактне... Да закључимо, можемо безбедно да прихватимо да то све припада Аналитичкој вештини помоћу чега можемо одредити површине и дужине лукова кривих егзактно и геометријски.

Као што знамо, Вијет је за Алгебру користио назив Аналитичка вештина. О томе овде Њутн говори. Заправо са Њутном и његовим вештим коришћењем редова при рачунању површина, као и прихватањем од стране других математичара, почиње то терминолошко одвајање Алгебре, за коју се везују коначни изрази и Анализе која манипулише са бесконачним изразима (поједностављено говорећи наравно), а коју имамо данас.

Већ смо споменули флуенте и флуksiје. Њутн је припремио рад „О методу редова и флуksiја” до 1671, али је тај рад доста касније објављен. Дакле, ту имамо кинематичку идеју о величинама које „теку” у времену. На пример, тачка генерише линију, линија генерише површ. Такве величине се називају флуенте, а њихове брзине промене флуksiје. Код Њутна се на одређеним местима појављују и моменти који представљају бесконачно мале прираштаје таквих величина у бесконачно малим интервалима времена (то ће касније Њутн избегавати). У бесконачно малим интервалима сматра да су флуksiје константе, те се може сматрати да су моменти пропорционални њима.

Увео је и нотацију да означи тај свој рачун. Са a, b, c, d је означавао константе, са v, x, y, z флуksiје, а одговарајуће флуенте са l, m, n, r , док је бесконачно мали интервал времена био o . Касније је, у деведесетим годинама XVII века увео ознаке $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Саме флуksiје имају своје флуksiје, па је тако посматрао и $\ddot{x}$, па и $\ddot{\dot{x}}$. А флуенту чија је флуksiја x означавао је са $\dot{x}$. Површину испод криве y је означавао са Qu или са $\boxed{y}$.

Њутн је навео једноставан алгоритам којим би добијао везу између флуksiја на основу везе између флуенти. Наиме, ако би имао израз ax^n , он би га замењивао са $anx^{n-1}\dot{x}$. Тако би урадио за све чланове у изразу по свим флуентама и онда све то сабирао. На пример, ако има

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0, \quad (1)$$

добио би

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0. \quad (2)$$

То би оправдао на следећи начин. На x и y би додао бесконачно мале прираштаје $\dot{x}o$ и $\dot{y}o$ и заменио у једначину (1).

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0, \quad (3)$$

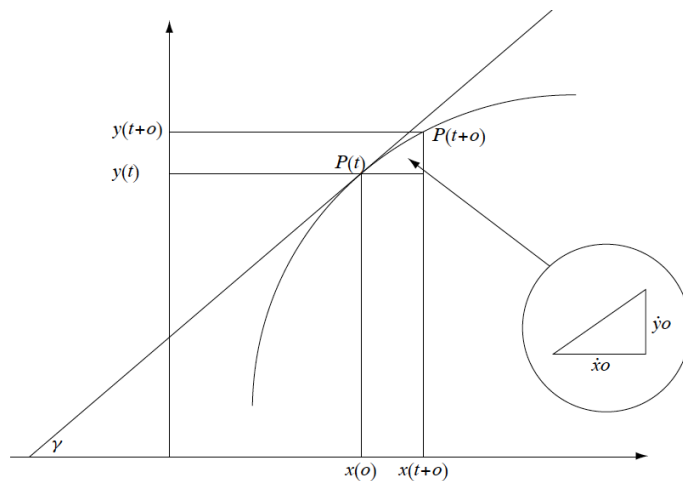
Средио би (3) користећи (1), делећи са o , а онда занемарио чланове који још у себи садрже o , јер је „ o бесконачно мало”. Тако би добио заиста (2).

Он се ту бавио проблемима максимума и минимума, налажења тангенте, кривине, површина, дужина лукова. Сви се ти проблеми свode на два проблема.

Проблем 1. Ако је познат пређени пут у сваком тренутку времена, наћи брзину у свакој тачки.

Проблем 2. Ако је позната брзина у свакој тачки, наћи пређени пут у свакој тачки.

Видимо да се ради о два инверзна проблема. Проблем налажења тангенти, екстремних вредности и кривине, свodi се на први проблем.



Имамо криву у равни дату једначином $f(x, y) = 0$. Како је $x(t+o) - x(t) = \dot{x}o$ (на слици уместо $x(o)$ треба да стоји $x(t)$) и $y(t+o) - y(t) = \dot{y}o$ и како је o бесконачно мало, може се сматрати да троугао који је издвојен на слици сличан троуглу који чине тачке пресека тангенте и x -осе, $(x(t), 0)$ и $P(t)$, те је

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\dot{y}o}{\dot{x}o} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Наравно, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ се може наћи раније наведеним алгоритмом. Екстремна тачка је дата са $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 0$, док је Њутн показао да је полупречник кривине ρ дат са

$$\rho = \frac{\left(1 + (\dot{y}/\dot{x})^2\right)^{3/2}}{(\ddot{y}/\dot{x}^2)}.$$

Године 1687. Њутн је објавио своје „Математичке принципе природне филозофије”. То је свакако једно од најзначајнијих научних дела икада. Пут који је довео до његовог објављивања је био занимљив и нимало једноставан. Нећемо се њиме бавити због недостатка времена, наведимо само као занимљивост да се, да би обезбедио објављивање тог дела, Едмонд Халеј (сви смо чули за Халејеву комету) обавезао да ће он финансирати издање тог дела. Наиме, Краљевско друштво је практично банкротирало издајући „Историју риба”, дело које се уопште није продавало. Пошто је Халеј обезбедио штампање Њутновог дела, добио је на поклон од друштва 50 примерака те књиге коју нико није желео да купи. Сматра се да је прво издање имало око 300 примерака.

Главни проблем је био да се на основу закона универзалне гравитације, по коме сила гравитације опада са квадратом растојања, установе Кеплерови закони, посебно да се планете крећу по елипсама са Сунцем у једној жижи. Постојао је и озбиљан технички проблем како при овим разматрањима редуковати тела, на оно што сада зовемо, материјалну тачку — како показати да се може претпоставити да је сва маса, на пример, Земље скупљена у тачку. Њутн је успео да разреши те и друге проблеме, попут кретања тела кроз средину која је пружала отпор (дакле, не кроз вакуум). Сам назив дела даје и критику раније Декартове филозофије која није одговарала физичкој стварности. Овде се ради о МАТЕМАТИЧКИМ ПРИНЦИПИМА а не о чисто филозофском размишљању.

Само дело је написано у геометријском духу, ту се практично флуksiје и не појављују. Но, на самом почетку дела налазимо, после основних закона (Њутнових закона како их сада зовемо) 11 математичких лема. Заправо прва глава прве књиге (дело се састоји од три књиге) носи назив Метод првих и завршних односа величина помоћу којих доказујемо тврђења која следе.

Ових 11 лема су разматрали многи аутора током више од 300 година од појављивања Њутновог дела. Занимљивости ради, 1995. године су изашле чак четири књиге које се баве Њутновим Принципима. Ми ћемо покушати само укратко да кажемо о чему се овде ради.

Лема I

Величине, или односи величина, који у сваком коначном времену конвергирају непрекидно ка једнакости, и пре истека тог времена се приближавају ближе једна другој од сваке дате разлике, постају напоскон једнаке.

Доказ следи

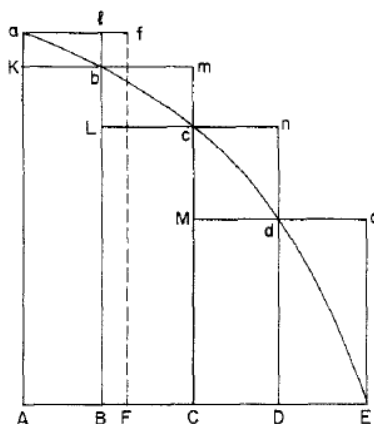
Ако то одричете, претпоставите да су напоскон различите и нека је D њихова крајња разлика. Онда се оне не могу примаћи више једнакости него што је та дата разлика D ; што је супротно претпоставци.

Видимо да овде имамо неки облик лимеса, односно закључак да ако имамо две величине чија разлика тежи 0, онда се њихове граничне вредности једнаке (садашњим језиком речено). Претпоставља се 'коначно време' да величине не би постале бесконачно велике. Ово је само коментар, не и озбиљна дискусија, видимо да могу да постоје разне примедбе на ово закључивање.

Лема II *de facto* говори о постојању интеграла монотоне функције.

Ако се у дату фигуру $AacE$, коју ограничавају праве линије Aa , AE и крива acE упише ма који број паралелограма Ab , Bc , Cd , итд. над једнаким базама AB , BC , CD , итд. и страницама Bb , Cc , Dd , итд. паралелним страници Aa фигуре; и паралелограми $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, итд. се комплетирају: тада ако

се претпостави да се ширине паралелограма смањују, и њихов број повећа до бесконачности, кажем да ће завршни односи које ће уписана фигура $AKbLcMdD$, описана фигура $AalbmcndoE$ и криволинијска фигура $AabcdE$ имати једна према другој бити односи једнакости.



Дакле, тврди се да количници ових површина теже ка 1, па се тиме имплицитно тврди и да све површине теже ка истој вредности. Доказ није тежак. Њутн констатује да је разлика између сума површина описаних и уписаних правоугаоника (он наравно каже паралелограма) једнака површини правоугаоника $ABla$, али та површина тежи ка нулу када се AB неограничено смањује. Дакле, он заправо показује да разлике ових површина теже нули, па онда добија тражено уз помоћ прве леме.

Следећа лема говори да се слично може закључити и ако основе нису једнаке. Заправо на горњој слици то видимо. Ту се претпостави да је највећа основа AF , па опет разлика буде мања од површине правоугаоника $AFfa$, која опет тежи нули.

Лема IV пореди две фигуре попут ових са претходне слике, од којих је једна увећана у односу на другу и тврђење је да ако се односи сума уписаних површина правоугаоника приближавају некој вредности, онда ће односи и тих површина бити једнаки тој вредности. Овде видимо нека једноставна својства интеграла (али монотоне функције). Лема V нам такође не представља проблем, она каже да су одговарајуће стране сличних фигура, било криволинијских било праволинијских, пропорционалне једна другој и да се површине сличних фигура односе као квадрати одговарајућих страница.

Но, касније леме су сложеније и више би времена однело да покушамо да их протумачимо. Рецимо само да постоје јаки аргументи да се

у њима препозна дефиниција извода функције, да се одређује извод синуса (заправо да се показује да $\frac{tg x}{x}$ и $\cos x$ теже истој вредности када се x приближава 0, а пошто се зна да се $\cos x$ приближава 1, онда имамо и познати резултат да $\frac{\sin x}{x}$ тежи ка 1, а то наравно одговара резултату да је извод синуса једнак косинусу). Такође се међу тим лемама крије и разматрање другог извода, а и Њутн-Лајбницова формула.

Њутн јесте био свестан проблема у вези његових КРАЉЊИХ ОДНОСА. Пошто он ту, *de facto*, разматра лимесе облика $\frac{0}{0}$; он покушава да објасни да то може да постоји мада се, јасно, не могу директно заменити вредности. Бискуп Џорџ Беркли је био велики, али и добронамеран критичар тих и сличних, непрецизно дефинисаних појмова и те критике су свакако озбиљно схватане и у даљем су чињени покушаји да се ствари поправе. Наравно, после доста времена смо дошли и до добро заснованог појма лимеса, али Њутн јесте те ствари антиципирао.

Лајбниц

Готфрид Вилхелм Лајбниц (1646–1716) рођен је у Лајпцигу у протестантској породици међу чијим је даљим прецима сигурно било и Словена. Да ли је баш био лужички Србин или не, нећемо овде расправљати. ☺



Слика 7: Лајбниц

Његов отац, Фридрих Лајбниц (1597–1652), био је професор филозофије морала на универзитету у Лајпцигу и имао је богату библио-

теку где је млади Лајбниц рано могао да почне са својим образовањем. Студирао је филозофију и право на универзитетима у Лајпцигу, Јени и Алтдорфу. Што се математичких знања тиче, ту је имао само елементарно образовање. Но, рано је замислио пројекат конструкције математичког језика помоћу кога би се дедуктивно закључивање могло изводити. Те његове идеје су антиципирале каснији развој алгебре логике у XIX веку. Тај програм он никада није ни напустио, те и на његова каснија математичка истраживања треба гледати у том светлу. Пошто је 1666. докторирао на универзитету у Алтдорфу, ушао је у службу надбискупа у Мајнцу. Положај надбискупа у Мајнцу је био изузетно важан у Светом римском царству. Наиме, надбискуп у Мајнцу је био један од седам људи који су бирали цара.

Лајбниц је године 1672–1676. провео у дипломатској мисији у Француској. Наиме, немачке државе су биле прилично ослабљене после тридесетогодишњег рата (1618–1648) и заправо је Царство постојало само на папиру. Било је много држава и територија које су могле да одржавају своју војску. Стога је постојала опасност од уједињене Француске и агресивне политика краља Луја XIV („Краљ Сунце”). Лајбницова идеја, коју је изложио у *Consilium Aegyptiacum*, је била да се пажња Француске са Немачке и Холандије скрене на турски Египат, да је то оно што би требало да интересује једног хришћанског краља. Но, када је стигао у Париз, није му био дозвољен пријем код краља, а један од краљевих министара му је рекао да крсташки ратови нису више интересантни. Заправо је већ тада Луј XIV решио да изврши инвазију на Холандију, на нацију „продавачица риба и трговаца” по његовим речима.

Но, Лајбницов долазак у Париз му је омогућио да упозна многе значајне научнике, а посебно холандског научника Хајгенса, који је живео у Паризу од 1666. до 1681.



Слика 8: Кристијан Хајгенс (1629–1695)

Хајгенс је баш у то време припремао своје значајно дело *Holorogium Oscillatorium*, које је било посвећено разним физичким и математичким аспектима кретања клатна. Он је видео да Лајбниц има талента, али да је слабо математички образован, те га је упутио у то шта да учи. Године 1673. нова дипломатска мисија одвела је Лајбница у Енглеску. Радило се о сугестији надбискупа Мајнца да енглески краљ посредује у сукобу Француске и Холандије. У сваком случају, Лајбниц је упознао Немца Олденбурга (кога смо већ споменули) и уз његову помоћ многе значајне научнике Енглеске. Заправо, он је у Краљевском друштву добио прилику да прикаже рад своје машине за рачунање, која је била унапређење у односу на Паскалову по томе што је могла да врши и множење и дељење. Мало због те машине, а више због веза које је Олденбург имао, Лајбниц је успео да постане члан Краљевског друштва. Од 1676. године Лајбниц је у служби Куће Хановер, самим тим, на самом крају, и у служби енглеског краља Џорџа I.

У периоду 1672–1673. Лајбниц се бавио редовима. Посебно му је било занимљиво да разматра нумеричке низове разлика, тј. низове (b_n) за које је

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_2 - a_3, \quad b_3 = a_3 - a_4, \dots$$

за неки низ (a_n) . Наравно, тада је лако могао да нађе суму $b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Ова једноставна идеја му је касније помогла и у развоју диференцијалног рачуна, по његовим сопственим речима. Први пример на коме је применио овај поступак је, добро нам познати ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$. Наиме, $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$, те се лако добија да је сума реда једнака 2. Дакле ове, како их сада зовемо „телескопске суме” су му биле посебно значајне. С тим у вези, формирао је ‘хармонијски троугао’ (Паскалов троугао се зове и ‘аритметички троугао’):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
 & & & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \\
 & & \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \boxed{\frac{1}{4}} & \\
 & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \boxed{\frac{1}{20}} & \boxed{\frac{1}{5}} & \\
 & \frac{1}{6} & \boxed{\frac{1}{30}} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \\
 \frac{1}{7} & \boxed{\frac{1}{42}} & \boxed{\frac{1}{105}} & \frac{1}{140} & \frac{1}{105} & \frac{1}{42} & \frac{1}{7}
 \end{array}$$

Овај се троугао формира помоћу разлика. Наиме $n+1$ -ва ‘дијагонала’ има чланове који су разлике одговарајућих чланова n -те ‘дијагонале’.

На пример: $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{42} = \frac{1}{30} - \frac{1}{105}$. Стога је сума бројева у n -тој дијагонали заправо телескопска сума помоћу добијена од бројева у претходној, те је та сума једнака броју на почетку претходне дијагонала. На пример,

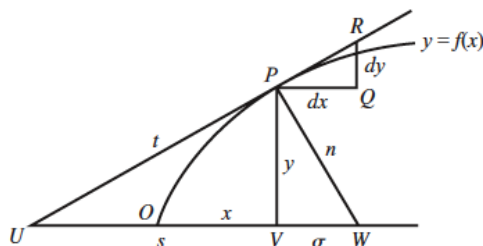
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \dots = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{105} + \dots = \frac{1}{4}, \quad \text{итд.}$$

Године 1673. Лајбниц се сreo са идејом такозваног карактеристичног троугла читајући Паскалова *Lettres de A. Detonville* из 1659. године. У овим писмима је Паскал



Слика 9: Блез Паскал (1623–1662)

приказао разне резултате о квадратурама. Amos Detonville је заправо анаграм од Louis de Montalte (уз изједначавање v и u), псеудоним који је Паскал користио у својим „Писмима из провинције”. Паскал је у том конкретном проблему разматрао инфинитезимални троугао придружен тачки на кругу, али је Лајбниц ту идеју генерализовао.



У произвољној тачки P на кривој $y = f(x)$ постављена је тангента и формиран је тај 'карактеристични (криволинијски) троугао' који чине бесконачно мали померај дуж x -осе, тј. dx , бесконачно мали померај дуж y -осе, тј. dy и бесконачно мали померај дуж саме криве ds . Са

t је означен део тангенте од те тачке до пресека са x -осом, а са n део нормале од те тачке такође до пресека са x -осом. Са s , односно σ је означена пројекција тангенте t на x -осу (подтангента), односно нормале n на x -осу (поднормала).

Пошто се ради о инфинитезималном троуглу, може се сматрати да се крива у том бесконачно малом делу поклапа са тангентом те можемо сматрати да се троугао са страницама dx, dy, ds поклапа са троуглом PQR , који је сличан и троуглу UVP и троуглу PVW . Стога је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma}{y} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{n}{y}.$$

Лајбниц је, да би имао конкретан проблем, претпоставио да је поднормала (σ) обрнуто пропорционална ординати, тј. претпоставио је да је $\sigma = a^2/y$. Тада из прве релације добија

$$\int y^2 dy = \int a^2 dx,$$

чиме добија да крива има једначину $y^3/3 = a^2 x$ те констатује да је крива са наведеном особином кубна парабола.

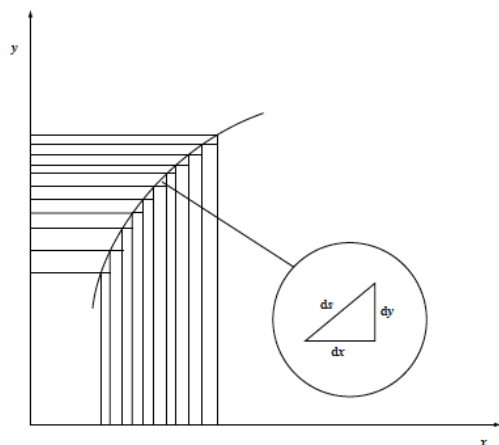
Из друге релације добија

$$\int y ds = \int n dx,$$

што даје формулу за површину тела које се добија обртањем криве око x -осе.

Током 1675. Лајбниц је направио суштинске кораке који су га довели до формулације метода који се, у нешто промењеној форми и сада користи. У ту сврху су му посебно били значајни карактеристични троугао и посматрање површине испод криве као суме бесконачно много трака.

Лајбниц је замислио дељење x -осе испод задате криве на бесконачно много бесконачно малих интервала чији су крајеви $x_1, x_2, x_3, \dots$. Диференцијал је дефинисао као $dx = x_{n+1} - x_n$. На самој кривој имамо одговарајуће тачке $s_1, s_2, s_3, \dots$, као и ординате $y_1, y_2, y_3, \dots$ на y -оси, као и диференцијале $ds = s_{n+1} - s_n$, $dy = y_{n+1} - y_n$. Карактеристични троугао је издвојен на слици и има стране dx, dy, ds , а видели смо већ да можемо сматрати да је сличан троуглу који формирају s, y, t (ознаке са претходне слике). Стога је $tg \gamma = \frac{dy}{dx}$, где је са γ означен угао који тангента у датој тачки заклапа са x -осом. Површина испод криве је унија трака $y dx$. Лајбниц је у почетку користио Кавалијеријев симбол omn , али је касније, вероватно на сугестију Јохана Бернулија (од кога потиче и назив интегрални рачун), прешао на ознаку $\int$ као издужену варијанту слова s , а наравно од речи сума. Прво Лајбниново



публиковано појављивање ознаке диференцијала је било 1684, а интеграла 1686. године.

Симболи d и $\int$ могу се примењивати више пута те се тако може посматрати и, на пример, ddx , које је бесконачно мало у односу на dx . За d поновљено n пута користио се симбол d^n , па је n -ти диференцијал од x био $d^n x$. Израз $\frac{dy}{dx}$ код Лајбница не треба сматрати изводом функције, него просто односом диференцијалних величина dy и dx . То олакшава алгебарске манипулације диференцијалима. На пример „ланчасто правило”, тј. извод сложене функције се може видети као проста манипулација разломцима:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Ако се y посматра као зависна променљива од x у којој се узима да су x_n еквиливантне, тада је dx константно, па је $d^2x = ddx = 0$ и сви остали диференцијали од x вишег реда нестају. За рачунање $d(xy)$ користио је формулу

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dx dy,$$

а потом је, без даљег образложења, изоставио $dx dy$ као бесконачно малу вишег реда. Наравно, итерацијом овог поступка, ако је $y = x$ може се добити и $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. За рационалне изложнице, тј. за случај $y = x^{a/b}$, посматрао је изведену једнакост $y^b = x^a$, применио претходно правило, те добио $by^{b-1}dy = ax^{a-1}dx$, те је одатле извео да је $d(x^{a/b}) = \frac{a}{b}x^{\frac{a-b}{b}}dx$. Лајбниц је своја правила за диференцијални рачун објавио у раду у часопису *Acta Eruditorum*, чији је он био и један од уредника, 1684. године, са дугачким насловом у коме се *de facto* описује шта се све може урадити његовим коришћењем: *Nova methodus*

pro maximis i minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus. Лајбниц се веома трудио да рекламира своје идеје, комуницирао је са многим математичарима ван Британије и то је, уз једноставнији и бољи запис од Њутновог, свакако допринело великом ширењу његовог приступа ван Британије.

Деведесетих година XVII века, као и у првим декадама XVIII једна од главних области истраживања у Лајбницовом калкулусу састојала се у развоју правила за диференцирање и интеграцију трансцендентних функција – тригонометријских, логаритма и експоненцијалне функције. Јохан Бернули је ту био посебно активан. Дошао је до правила за, како га је називао, 'експоненцијални калкулус':

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}, \quad d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u dv.$$

Лајбниц је $\int y dx$ видео као 'суму' бесконачног низа трака (правоугаоника) $y dx$. Из рада са редовима знао је да се сума реда може добити помоћу низова разлика. Да би редуковао $\int y dx$ на суму разлика, треба да нађе z тако да је $dz = y dx$ (сетите се низова (b_n) и (a_n) : треба сумирати b_n а зна се да је $b_n = a_n - a_{n+1}$). Тако да закључује да је

$$\int y dx = \int dz = z.$$

Када је открио тако инверзну природу диференцирања и интеграције, одмах је могао да нађе и правило за парцијалну интеграцију. Наиме, из $d(xy) = x dy + y dx$ следи

$$xy = \int d(xy) = \int x dy + \int y dx.$$

Ојлер



Слика 10: Леонард Ојлер

Леонард Ојлер (1707–1783) је био ученик Јохана Бернулија и сигурно је најпознатији швајцарски математичар, а можда и најплоднији математичар у историји математике. Како је он највећи део свог радног века провео у Русији, можемо га сматрати и руским математичаром. Математику је учио од Јохана Бернулија и дружио се са његовим синовима Николом и Данијелом. Уз подршку Бернулијевих, добио је позицију у Петрограду 1727. године. Ојлер је био свестрано образован и заправо је добио место на медицини и физиологији, касније на природној филозофији. Но, Никола Бернули је умро 1726, а Данијел се 1733. из Петрограда преселио у Базел и Ојлер тако остаје, у својој 26-ој години најзначајнији математичар у Петрограду.

Започнимо најпре Ојлеровим доприносом математичкој нотацији. Он је увео и промовисао коришћење слова e за базу природног логаритма. Симбол π јесте коришћен и раније, али га је Ојлер значајно промовисао. Пред крај живота је увео и симбол i за корен из -1 . Занимљиво је да га је раније користио за ознаку бесконачности, па је тако писао и $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, где је i бесконачни број. У елементарној геометрији је такође имао значајан допринос у нотацији. Странице троугла је означавао са a, b, c , а одговарајуће углове са A, B, C , док је са R, r, s означавао полупречнике описаног и уписаног круга и полубим троугла. Од других ознака треба навести да је Σ користио за суму, а да је са $f(x)$ је означавао функцију.

У свом делу „*Introductio in Analysin Infinitorum*” из 1748, које даје основе математичке анализе, увео је функцију од променљиве величине

као ‘било који аналитички израз сачињен од те променљиве величине и бројева или константних величина’. Јасно је да таква дефиниција није прецизна, но послужила је Ојлеровој сврси — форсирао је аналитички приступ, па и у раду са тригонометријским функцијама; синус је задат преко реда $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots$. На пример, још је у писму Јохану Бернулију из 1740. навео формулу $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$.

Покажимо сада како је Ојлер нашао суму реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Пођимо од следеће чињенице: ако су $x_1, x_2, \dots, x_n$ нуле полинома $p(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, онда је

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Није се тешко уверити да је ово тачно. Наиме, ако је

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0,$$

дељењем са x^n добијамо

$$\frac{1}{x^n} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_2 \frac{1}{x^{n-2}} + \dots + a_n = 0.$$

Ако је $y = \frac{1}{x}$, онда из $y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \dots + a_n = 0$ и Вијетових формула добијамо $y_1 + y_2 + \dots + y_n = -a_1$, тј.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Ојлер сада ово екстраполира на функцију синус. Наиме, на основу развоја у ред:

$$\sin z = 0 \text{ и } z > 0 \text{ акко } 0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots.$$

Сменом $w = z^2$ добија се

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \dots$$

По аналогiji са коначним случајем, ако су нуле овог реда $w_1, w_2, \dots$ (што су заправо квадрати нула синуса), онда је

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \dots = -\left(-\frac{1}{3!}\right) = \frac{1}{6}.$$

Но, знамо да су позитивне нуле синуса $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$, па су ове нуле заправо $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \dots$. Стога добијамо

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \dots = \frac{1}{6},$$

односно $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$. Ојлер је нашао суме $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2l}}$ за све $l \in \{1, 2, \dots, 13\}$.

На пример, добио је

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{26}} = \frac{2^{24} \cdot 76977927 \cdot \pi^{26}}{27!}.$$

Наведимо и Ојлеров доказ бесконачности скупа простих бројева коришћењем дивергенције хармонијског реда.

Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и нека су то $p_1, p_2, \dots, p_k$. Нека је n неки природан број. Тада је

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

за неке $\alpha_i \geq 0$. Узмимо $\alpha = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. Посматрамо производ

$$P = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_1^{\alpha}}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_2^{\alpha}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \dots + \frac{1}{p_k^{\alpha}}\right).$$

Јасно је да се у развоју овог производа у збир појављују сви бројеви од 1 до $\frac{1}{n}$, те је $P > 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Но,

$$\begin{aligned} P &< \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \dots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k}{p_k - 1}. \end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k}{p_k - 1},$$

но, како израз на десној страни не зависи од n добијамо да је сума $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ограничена, а знамо да то није тачно. Стога мора постојати бесконачно много простих бројева. Ојлер је много експериментисао са бесконачним редовима, али о томе нећемо сада писати.

У писму Голдбаху из 1746. Ојлер је навео следећи занимљив резултат: $i^i = e^{-\pi/2}$. Наиме, из Ојлерове формуле $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ за $\theta = \pi/2$ добија се да је $e^{i\pi/2} = i$. Стога је

$$i^i = (e^{i\pi/2})^i = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2}.$$

Заправо, Ојлер је 1749. показао да се сваки комплексан степен комплексног броја, тј. $(a + bi)^{c+di}$ може изразити у облику $p + qi$. Овај аспект Ојлеровог рада је занемарен и прича о реалним вредностима i^i се озбиљније разматрала тек у XIX веку.

Немогуће је и приближно навести све Ојлерове идеје и резултате из теорије обичних и парцијалних диференцијалних једначина, рачуна

коначних разлика, елиптичких интеграла, специјалних функција и других области. У вези нотације наведимо још његову ознаку

$$\left[\frac{p}{q} \right] = \frac{p(p-1) \cdots (p-q+1)}{1 \cdot 2 \cdots q},$$

која је, евидентно претеча модерне ознаке $\binom{p}{q}$.

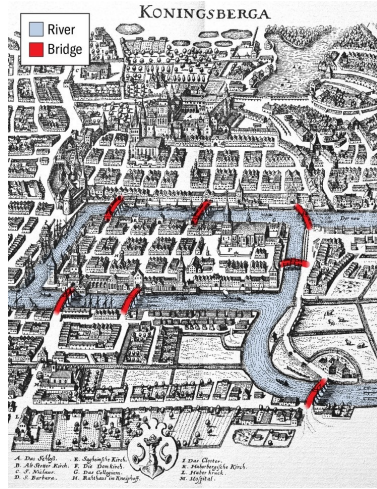
За крај наведимо и Ојлеров доказ мале Фермаове теореме, која каже да је, ако је p прост број, који не дели цео број a , онда p дели $a^{p-1} - 1$.

Он је заправо доказао да $p \mid (a^p - a)$ за све a , индукцијом по a . Наравно да је тврђење тачно за $a=1$. И, ако претпоставимо да је тачно за a , лако се покаже за $(a+1)^p - (a+1)$ (наравно користимо модерне ознаке у доказу ради краћег записа):

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + 1 - a - 1 = a^p - a + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k.$$

Како $p \mid \binom{p}{k}$ за све $1 \leq k \leq p-1$, резултат следи из индуктивне хипотезе.

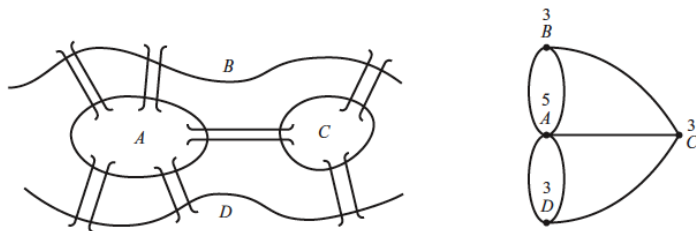
Године 1736. Ојлер је објавио рад за који се сматра да је први рад из области теорије графова. У том раду је он дао решење Проблема о кенигзбершким мостовима. Наиме, у граду Кенигзбергу који је био значајан универзитетски град у Источној Пруској, а у коме је дуго година живео и Имануел Кант, на реци Прегал било је седам мостова који су спајали два острва са копном, а и између себе.



Слика 11: Кенигзберг у средњем веку

Проблем се састојао у томе да се установи да ли се може прећи преко сваког моста али тачно једном. Ојлер је проблем поједнос-

тавио тако што је и острва и обе обале заменио тачкицама, а мостове луковима који их повезују. Тако је добио граф са слике.



Слика 12: Кенигзбершки мостови и придружен граф

Ако желите да прођете ивицом сваког графа тачно једном, онда у свако теме улазите и излазите паран број пута сем у случају почетног и завршног темена. Видимо да у сваком темену има по три лука (степен сваког темена је 3). Стога је немогуће проћи свим мостовима тачно једном, било да је захтев да се вратите у почетну тачку или не. Пут у графу који пролази сваком ивицом тачно једном, назива се Ојлеров пут. А Кенигсберг се данас зове Калињинград и налази се у Русији.

Ка модерној алгебри

Као што смо видели, проблем налажења решења алгебарских једначина трећег и четвртог степена, која се изражавају као рационалне функције корена израза добијених од коефицијената једначине, решен је у ренесансној Италији. Но, питање за једначине вишег степена остало је неразрешено. У овом делу ћемо се позабавити тим питањем, тј. како је разматрање овог проблема довело до резултата Евариسته Галоа са којим се може рећи да почиње развој модерне алгебре, дакле области која проучава алгебарске структуре попут група, прстена, поља.

Варинг

Едвард Варинг (1736–1798) био је енглески математичар који је у два своја значајна дела *Miscellanea analytica* (Кембриџ 1762) и *Meditationes algebrae* (Оксфорд 1770) (при чему је заправо друго дело, упркос новом називу, било друго, проширено издање првог) дао прве резултате на том путу. Наиме, ако се посматра општа једначина степена n :

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + \dots = 0,$$



Слика 13: Едвард Варинг

и њени корени $x_1, \dots, x_n$, онда нам је познато да су коефицијенти a_i заправо елементарне симетричне функције ових корена:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + \dots + x_n, \\ a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n, \quad \text{итд.} \end{aligned}$$

Варинг је у свом првом делу показао да се свака рационална симетрична функција корена ове једначине може изразити као рационална функција коефицијената тако што је то најпре показао за суму степена

$$s_m = x_1^m + \dots + x_n^m,$$

а потом за све остале симетричне функције. У другом делу је разматрао решења циклотомичне једначине (једначине „деобе круга” пошто се налажење правилног n -тоугла уписаног у дати круг своди на решавање ове једначине):

$$x^n - 1 = 0.$$

Разматрао је и проблем да се нађу једначине које се могу решити сумама облика

$$x = \sqrt[n]{a_1} + \sqrt[n]{a_2} + \dots + \sqrt[n]{a_n}.$$

Вандермонд

Александар-Теофил Вандермонд (1735–1796) био је француски математичар, који је 1770. године представио париској Академији наука рад под насловом „О решавању једначина”. Он почиње од добро



Слика 14: Вандермонд

познатих решења квадратне и кубне једначине са жељом да нађе општи принцип за решавање алгебарских једначина. Најпре решења квадратне једначине x_1, x_2 написао у облику

$$\frac{1}{2} \left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2} \right].$$

Овај се израз може написати и у облику

$$\frac{1}{2} \left[x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \right]$$

и видимо да се овде појављују симетричне функције корена.

Вандермонд се потом пита да ли се општа једначина степена n може решити помоћу аналогног израза

$$\frac{1}{n} \left[(x_1 + \dots + x_n) + \sqrt[n]{(\rho_1 x_1 + \dots + \rho_n x_n)^n} + \sqrt[n]{(\rho_1^2 x_1 + \dots + \rho_n^2 x_n)^n} + \dots + \sqrt[n]{(\rho_1^{n-1} x_1 + \dots + \rho_n^{n-1} x_n)^n} \right],$$

где су $\rho_1, \dots, \rho_n$ n -ти корени из јединице. Данас изразе облика

$$\rho_1 x_1 + \dots + \rho_n x_n$$

називамо Лагранжовим решавачима, пошто их је Лагранж увео у раду приложеном берлинској Академији 1771. Наиме, Вандермондов рад јесте предат раније, али је објављен тек 1774.

Вандермондов метод у случају кубне једначине фино 'ради'. Наиме, ако је $\zeta^3 = 1$, а $\zeta \neq 1$, те су и ζ и ζ^2 примитивни корени из јединице, а x_1, x_2, x_3 решења кубне једначине, онда имамо једнакост

$$(x_1 + \zeta x_2 + \zeta^2 x_3)^3 = S + 3\zeta X + 3\zeta^2 Y, \quad (4)$$

где је

$$\begin{aligned} S &= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 \\ X &= x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 \\ Y &= x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2. \end{aligned}$$

Видимо да S јесте симетрична функција корена, док X и Y нису, но $X+Y$ и XY јесу симетричне функције, па тиме изразиве преко коефицијената, а и корени су квадратне једначине. Стога се може добити колики је израз на десној страни једначине (4) те се могу добити и корени једначине. За једначину степена 4, Вандермонд је нешто модификовао свој метод, док за једначине вишег степена тај метод јесте успешан само у специјалним случајевима. На пример, он је решио једначину

$$x^{11} - 1 = 0.$$

Најпре ју је редуковао на једначину степена 5 чији су корени

$$\rho + \rho^{-1}, \quad \rho^2 + \rho^{-2}, \quad \rho^3 + \rho^{-3}, \quad \rho^4 + \rho^{-4}, \quad \rho^5 + \rho^{-5},$$

где је ρ примитивни једанаести корен из јединице. Затим је, за решавање те једначине петог степена користио раније наведене решаваче у облику

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 + \alpha^4 x_5,$$

где је α примитивни пети корен из јединице. Но, овде се мора пажљиво изабрати редослед корена x_i да би се L^5 могао фино одредити и за овај случај се то може разрешити пробањем, али за општи случај је потребан доказ да се то може увек урадити. То је извео тек Гаус. Вандермонд је тврдио да се решења опште једначине $x^n - 1 = 0$, његовим методом увек могу лако наћи, те се чини да није био свестан проблема избора редоследа корена.

Лагранж

Жозеф Луј Лагранж (1736-1813) рођен је у Торину и крштен је као Ђузепе Лодовико Лагранђа. Данас је познат као француски математичар, мада га Италијали 'воде' као италијанског математичара. У сваком случају, његова породица је имала веза са Француском. Он сам је дуго времена радио у Берлину и у Паризу, мада је започео каријеру у Италији. Био је свестран математичар, овде наводимо само његове резултате о решавању алгебарских једначина.

Веома занимљив (и обиман) рад од преко 200 страница, Лагранж је приложио берлинској Академији. Наслов тог рада је био „Размишљање о алгебарском решавању једначина”.



Слика 15: Жозеф Луј Лагранж

Ту најпре разматра кубну једначину у облику

$$x^3 + nx + p = 0.$$

Наравно, решење нам је познато из Карданове књиге где се оно тражи у облику $x = u + v$, где су u^3 и v^3 корени квадратне једначине. Лагранж показује да се u и v могу изразити као функције корена a, b, c почетне кубне једначине:

$$u = \frac{1}{3}(a + \alpha b + \alpha^2 c), \quad v = \frac{1}{3}(a + \alpha^2 b + \alpha c),$$

где је наравно α примитивни трећи корен из јединице.

Лагранж каже да се овакав резултат може добити и директним методом. Наиме, он полази од произвољне линеарне функције по a, b, c :

$$y = Aa + Bb + Cc.$$

Пермутовањем корена a, b, c добија се 6 израза који су стога корени једначине шестог степена. Ако желимо да то буде једначина у којој ће се појављивати само степени од y^3 (можда можемо да је зовемо бикубна једначина), онда се може показати да су A, B, C пропорционални са $1, \alpha, \alpha^2$, или са $1, \alpha^2, \alpha$. Тако да се добијају ипак раније наведени изрази. Дакле, занимљиво је да он разматра понашање израза при пермутацији корена.

Потом разматра једначину четвртог степена у облику

$$x^4 + nx^2 + px + q = 0.$$

Ферари је показао да се решења добијају помоћу решења кубне једначине („разрешавајућа кубика”):

$$y^3 - \frac{1}{2}ny^2 - qy + \frac{1}{8}(4nq - p^2) = 0.$$

Лагранж показује да се корени u, v, w ове једначине добијају као симетричне функције корена a, b, c, d почетне једначине четвртог степена:

$$u = \frac{1}{2}(ab + cd), \quad v = \frac{1}{2}(ac + bd), \quad w = \frac{1}{2}(ad + bc).$$

У одељку под бројем 100, Лагранж разматра рационалне функције $f(x', x'', \dots, x^{(n)})$ корена опште једначине степена n . Ти корени се разматрају као неодређене. За две функције t и u ових корена каже да су сличне ако свака пермутација ових корена која оставља t инваријантним, оставља и u инваријантним и обратно. Лагранж доказује следећу теорему.

Ако све пермутације које остављају t инваријантним остављају и u инваријантним, онда се u може изразити као рационална функција од t и коефицијената дате једначине.

Он ову теорему примењује на једначине степена 2, 3 и 4, а каже да је примена на једначине вишег степена још увек превише компликована. Такође је разматрао и неке специјалне случајеве већ навођене циклотомичне једначине $x^n - 1 = 0$.

Малфати

Банфранческо Малфати (1731–1807) био је италијански математичар који се бавио геометријом, механиком и вероватноћом, али нас занима његов допринос у решавању алгебарских једначина. Он је 1770. поднео Академији наука у Сијени интересантну расправу о једначинама петог степена и она је објављена од стране те Академије 1771.

Он најпре разматра кубну једначину

$$x^3 + ax + b = 0 \tag{5}$$

Следећи Ојлеров метод за решавање ове једначине (о коме истина нисмо причали, али ево сада је прилика да се спомене), он посматра корен x који задовољава линеарну једначину

$$x + m\sqrt[3]{f^2} + n\sqrt[3]{f} = 0. \tag{6}$$



Слика 16: Малфати

Да би елиминисао треће корене, користи метод Габријела Манфредиа (Манфреди, 1681–1761, био је италијански математичар који се највише бавио диференцијалним једначинама). Наиме, уместо $\sqrt[3]{f}$ посматра $\alpha\sqrt[3]{f}$ и $\alpha^2\sqrt[3]{f}$, где је α примитивни трећи корен из јединице, замени то у (6) и помножи та три израза те добије једначину трећег степена

$$x^3 - 3mnfx + m^3f^2 + n^3f = 0. \quad (7)$$

Потом постави $f = 1$ и добије

$$x^3 - 3mnx + m^3 + n^3 = 0. \quad (8)$$

Ова је једначина еквивалентна једначини (5) акко је

$$mn = -a, \quad m^3 + n^3 = b. \quad (9)$$

Одавде се наравно могу наћи m^3 и n^3 , а онда наравно и m и n (видели смо већ овако нешто код решавања једначина трећег степена).

Но, Малфати сада ово жели да примени на једначину петог степена

$$x^5 + 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0. \quad (10)$$

Жели наравно да добије корен x из

$$x + m\sqrt[5]{f^4} + p\sqrt[5]{f^3} + q\sqrt[5]{f^2} + n\sqrt[5]{f} = 0. \quad (11)$$

Наравно, сада уместо $\sqrt[5]{f}$ посматра $\alpha^k \sqrt[5]{f}$ за $k = \overline{1,4}$, где је α пети примитивни корен из јединице, формира одговарајуће изразе, множи их и тако добија 'канонску' једначину петог степена. Поставља $f = 1$ и изједначава коефицијенте те канонске једначине с почетном једначином (10) те добија услове за m, p, q, n . Поставља затим $mn = u$, $pq = v$, $25uv - 5a^2 + 5c/3 = z$ и после доста рачунања добија једначину шестог степена по z . У општем случају, ова једначина нема рационалан фактор степена 1, 2, или 3, а ако би имала онда би једначина (10) била решива преко радикала.

Независно од Малфатија и Лагранж је конструисао 'решавач' z који је функција корена и који има шест вредности при пермутацији корена. И један и други решавач су инваријантни у односу на подгрупу групе пермутација од пет корена $x_1, \dots, x_5$, која је реда 20 за коју се $k \in \{1, \dots, 5\}$ слика у $k' = ak + b \pmod{5}$ (при чему уместо 0 узимамо 5), где је $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, а $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Занимљиво је, али не и неочекивано да ова подгрупа има значајну улогу и у Галоовој теорији (наравно, она је решива).

Руфини



Слика 17: Руфини

Паоло Руфини (1765–1822) објавио је неколико радова у раздобљу од 1798. до 1813. (одговарајући на критике и поправљајући доказе) у

којима је тврдио да је показао да једначине степена већег од четири не могу бити решене у радикалима.

Он ради слично Лагранжу. Посматра рационалне функције корена опште једначине степена n . Ако је p број пермутација које фиксирају такву функцију, онда је p делитељ од $n!$ и број различитих вредности које функција може узети при пермутовању корена је $n!/p$ (ако се сетимо дејства групе, орбита и стабилизатора, биће нам јасније зашто је ово тачно). Руфини је ово детаљно изучавао и показао је да у случају да је $n = 5$ тај број $5!/p$ може бити 2, 5 или 6, али не може бити ни 3 ни 4. То значи да Лагранжов решавач не може задовољавати једначину степена 3 или 4. Ако $5!/p$ није 2, он мора бити дељив са 5, а ако је $5!/p = 5$, онда заиста постоји решавач који задовољава једначину степена 5, али се не може свести на биномну једначину $z^5 - m = 0$.

Руфинијев доказ генерално није био добро прихваћен, њему је недостајало коришћење и корена из јединице у решавању и то је компетирао Абел.

Коши



Слика 18: Коши

Огистен Луј Коши (1789–1857) је наравно био свестрани француски математичар који је дао велики допринос у више области математике, посебно у математичкој анализи, али овде ће нас занимати да укратко наведемо његове резултате за тему коју обрађујемо.

Коши је проширио резултате Руфинија на функције од n променљивих. Наиме, доказао је да ако је p највећи прост број који дели n , онда број различитих вредности коју несиметрична рационална функција од n променљивих може имати не може бити мањи од p сем ако је једнак 2. Он је увео и разлику између пермутација и супституција. Наиме, он је под пермутацијом подразумевао ређање n променљивих (или слова) у неком поретку (дакле отприлике онако како се о пермутацијама прича у средњој школи), док су супституције функције којима се од једне пермутације прелази до друге. Галоа је такође користио ту терминологију, а и требало је извесно време да се пређе на назив „пермутације” за Кошијеве „супституције”. Коши је разматрао производе супституција. Ако су S и T супституције он је њихов производ означавао са ST и овде се прво примењивало S , а потом T (дакле, овде супституције „вуку” променљиве, не „гурају” их како се популарно каже).

У периоду од 1844. до 1846. године, Коши је написао низ радова о супституцијама. За две супституције каже да су „сличне” уколико имају исту поделу на циклусе. Показује да су P и Q сличне ако постоји R тако да је $Q = R^{-1}PR$ (видимо да је користио појам сличности, на који смо навикли изучавајући матрице; појам конјугације је касније уведен). Такође је доказао да је ред групе супституција делив редом сваке супституције из те групе, као и да је ред ма које групе супституција n променљивих делилац броја $n!$. Овај резултат је већ доказао Лагранж. И код Кошија се у доказу појављује партиција групе на косете подгрупе. Општи резултат, који данас знамо као Лагранжова теорема дао је касније Жордан, али је приписао тај резултат Лагранжу. Иста прича важи и за Кошијеву теорему.

Абел

Нилс Хенрик Абел (1802–1829) био је норвешки математичар који је осим резултата везаних за решавање алгебарских једначина имао значајне резултате у области теорије елиптичких интеграла и данас многи математички објекти носе име по њему.

Он је 1824. о личном трошку објавио на француском дело о решавању алгебарских једначина, а 1826. је у Креловом Журналу објавио нешто проширену верзију. У тим радовима је дат јасан доказ да се једначине степена већег од 4 не могу решити у радикалима.

Он користи резултате осталих математичара који су се бавили овим проблемом, али ради и нешто есенцијално ново што комплетира овај доказ. Полази од једначине

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0, \quad (12)$$



Слика 19: Абел

са „општим” коефицијентима – коефицијенти су независне променљиве. Претпостављајући да се y може изразити као функција коефицијената преко радикала, Абел каже да се y може написати у облику

$$y = p + p_1 R^{1/m} + p_2 R^{2/m} + \dots + p_{m-1} R^{(m-1)/m} \quad (13)$$

где је m прост број. Величине $R, p, p_1, \dots, p_{m-1}$ су све истог облика као и y , тј. укључују нове радикале, итд. све док се не дође до рационалних функција коефицијената почетне једначине. Он увек међу коефицијенте укључује и све m -те корене из јединице, за све просте m који се појављују као експоненти. $R^{1/m}$ је, да тако кажемо, последњи радикал који смо увели.

Наравно, он каже да се може претпоставити да се $R^{1/m}$ не може изразити као рационална функција од $a, b, \dots, p, p_1, \dots$ пошто би иначе додавање те величине било непотребно. Слично искључује могућност да $p_1, p_2, \dots$ сви буду једнаки 0.

У првом раду претпоставља да $p_1 \neq 0$ (у другом показује да то ограничење није суштинско). Заменом R са R/p_1^m може да претпостави да је $p_1 = 1$. Означимо $R^{1/m}$ са z . Тада је

$$y = p + z + p_2 z^2 + \dots + p_{m-1} z^{m-1}. \quad (14)$$

Заменом у (12) добија се да је

$$q + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_{m-1} z^{m-1} = 0, \quad (15)$$

где су $q, q_1, \dots, q_{m-1}$ полиноми по $a, b, \dots, p, p_2, \dots$ и R (сетимо се да је $z^m = R$, те се тако уклањају виши степени од z). Абел сада тврди да је

неопходно да сви ови q_i буду једнаки 0. Наиме, ако се претпостави да то није тако и посматра (15) и

$$z^m - R = 0, \quad (16)$$

видимо да је z заједнички корен две алгебарске једначине. Тада ће z бити корен и највећег заједничког делиоца одговарајућих полинома. Ако тај делилац није нерастављив, онда је z корен и неког његовог нерастављивог фактора за који можемо да претпоставимо да је степена бар 2 (јер би z иначе био већ рационална функција од постојећих величина). Дакле,

$$t_0 + t_1 z + \dots + t_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0, \quad (17)$$

при чему је одговарајући полином нерастављив. То је једначина најнижег степена коју z задовољава. Но, она има k корена заједничких са (16), а ова једначина има корене облика αz где је α нетривијалан m -ти корен из јединице. Дакле, имали бисмо

$$t_0 + t_1 z + \dots + t_{k-1} z^{k-1} + z^k = 0 \quad \text{и} \quad t_0 + t_1 \alpha z + \dots + t_{k-1} \alpha^{k-1} z^{k-1} + \alpha^k z^k = 0. \quad (18)$$

Множењем прве од ових са α^k и одузимањем од друге, добили бисмо једначину нижег степена који z задовољава, те то води до контрадикције. Стога сви коефицијенти $q, q_1, \dots, q_{m-1}$ морају бити једнаки 0.

Користећи сада чињеницу да су решења једначине (16), сем z и αz , $\alpha^2 z, \dots, \alpha^{m-1} z$, заменом $R^{1/m}$ у (13) са $\alpha^i R^{1/m}$ такође се добијају корени почетне једначине (12). Ови корени су сви различити, m не може бити веће од 5. Ако су $y_1, \dots, y_m$ тако добијени корени, онда имамо

$$\begin{aligned} y_1 &= p + z + p_2 z^2 + \dots + p_{m-1} z^{m-1} \\ y_2 &= p + \alpha z + \alpha^2 p_2 z^2 + \dots + \alpha^{m-1} p_{m-1} z^{m-1} \\ &\vdots \\ y_m &= p + \alpha^{m-1} z + \alpha^{m-2} p_2 z^2 + \dots + \alpha p_{m-1} z^{m-1}. \end{aligned}$$

Ако се ово посматра као систем линеарних једначина по непознатим $p, z, p_2 z^2, \dots, p_{m-1} z^{m-1}$, видимо да имамо систем од m једначина са m непознатих и то такав да има једнозначно решење (уочите која је матрица система). Стога се ове „непознате“ све могу изразити као рационалне функције по $y_1, \dots, y_m$ а тиме су и $p, p_2, \dots, p_{m-1}$, $z = R^{1/m}$ (па онда наравно и $R = z^m$) рационалне функције корена.

Сама величина R је можда рационална функција неког раније уведеног радикала $v^{1/n}$. Понављањем претходног поступка добијамо да су све ирационалне величине које се појављују у изразу за корене y_i заправо неки радикали рационалних функција корена, укључујући свакако и одговарајуће корене из јединице. Руфини је пошао од те

претпоставке, испуштајући корене из јединице и Абел је то оправдао. После овога он наставља користећи претходне резултате других математичара које смо навели и закључује да се општа једначина степена 5 не може решити преко радикала.

Два месеца пре смрти је објавио рад о једној класи решивих алгебарских једначина. У класу коју је разматрао спада и циклотомична једначина. Он ту доказује следећу општу теорему.

Ако су корени једначине такви да се сви корени могу изразити као рационалне функције једног од њих, на пример x , и ако су ма која два корена $\theta(x)$ и $\theta_1(x)$ (где су θ и θ_1 рационалне функције), тако повезана да је $\theta(\theta_1(x)) = \theta_1(\theta(x))$ онда се једначина може решити у радикалима.

Данас наравно групе у којима је множење комутативно називамо Абелове групе. Овде је доказан специјални случај општег резултата који је дао Галоа. Наиме, знамо да је свака Абелова група решива и стога се одговарајућа једначина може решити преко радикала.

Гаус



Слика 20: Карл Фридрих Гаус

Карл Фридрих Гаус (1777–1855) свакако је био један од најзначајнијих математичара у историји, а имао је немале доприносе и у астрономији и физици. Овде ћемо се посветити његовим најважнијим доприносима нашој теми, а то је, најпре, комплетно решење циклотомичне једначине $x^n - 1 = 0$, а затим и резултатом да сваки реалан полином може да се факторише на линеарне и квадратне факторе, што пак

повлачи „основну теорему алгебре”: сваки полином са комплексним коефицијентима може да се факторише на линеарне факторе.

Почнимо од „једначине деобе круга” $x^n - 1 = 0$. Још као студент математике, Гаус је дошао до изванредног открића, које је најавио, помало неочекивано, у литерарном часопису који је излазио у Јени. Ево његове најаве (када каже да се могу геометријски конструисати мисли на то да се могу конструисати искључиво користећи лењир и шестар) од априла 1796. године.

Познато је сваком почетнику у геометрији да су разни правилни многоуглови попут троугла, четвороугла, петоугла, петнаестоугла, као и они који се добијају непрекидним удвостручавањем страна претходних, могу геометријски конструисати.

То је већ урађено у време Еуклида и, чини се, генерално се каже да се поље елементарне геометрије не продужава даље: бар ја не знам ни за један успешан покушај да се њене границе продуже у том правцу.

Стога ми се чини да заслужује пажњу откриће да, сем наведених правилних многоуглова више њих, на пример 17-оугао допуштају геометријску конструкцију. Ово откриће је само специјалан додатак широј теорији, која још није комплетирана и која ће бити представљена јавности чим буде заокружена.

К. Ф. Гаус из Брауншвајга,
Студент математике у Гетингену

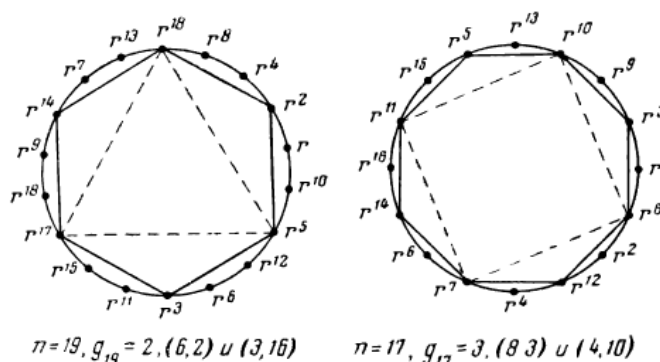
Овај резултат је представио у свом обимном делу „Аритметичка истраживања” објављеном у лето 1801. године. Заправо је томе била посвећена последња, седма глава овог дела. Претходне главе су биле посвећене теорији бројева.

Он ту показује да, ако је број страна правилног многоугла облика $p_1 p_2 \cdots p_l \cdot 2^k$, где су p_i различити прости бројеви облика $2^{2^n} + 1$ (Фермаови прости бројеви), онда се тај многоугао може конструисати помоћу лењира и шестара (прича се да је он толико био поносан тим својим резултатом да је тражио да му цртеж правилног седамнаестоугла буде уклесан на надгробну плочу, али да је каменорезац то одбио тврдећи да се таква фигура не би разликовала од круга...). У једном одељку овог дела Гаус наводи да он има исправан метод да докаже да су то једини правилни многоуглови за које је могуће извршити конструкцију помоћу лењира и шестара и да, мада то превазилази границе овог дела, он то наводи због осећаја одговорности за то да други не би губили време покушавајући да овај резултат прошире.

Гаус најпре своди проблем на случај када је n прост број, и у даљем стално претпоставља да је то тако. Најпре, на доста компликован начин, доказује да је полином $x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ (који он означава са

X) нерастављив над рационалним бројевима. Скуп свих корена овог полинома Гаус означава са Ω . Он наводи потом да се идеја доказа састоји у томе да ако је $n-1$ производ фактора $\alpha\beta\gamma\cdots$, који се сви могу сматрати простим бројевима, онда се једначина $X=0$ може решити sukcesивним решавањем једначина степена $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. На пример, за $n=17$, $n-1=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, те за овај случај треба решити четири квадратне једначине.

За доказивање овог резултата, Гаус користи такозване „периоде”. Тачка 347 гласи: Сви корени из Ω разбијају се на неке класе (периоде). Наиме, нека је r неки од корена из Ω . Сматрамо да је n прост. Тада су сви корени заправо $r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}$. Гаус је у трећој глави својих „Истраживања” заправо доказао да ако је n прост број, онда је група $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$ циклична, те постоји „примитивни елемент” g који је генератор те групе. Тада су $1, g, g^2, \dots, g^{n-2}$ по модулу n заправо бројеви $1, 2, \dots, n-1$, али не нужно у истом поретку. Стога су $r, r^g, r^{g^2}, \dots, r^{g^{n-2}}$ такође сви корени из Ω при чему је сваки од њих g -ти степен претходног (приметимо да је и $(r^{g^{n-2}})^g = r^{g^{n-1}} = r$ такође степен „претходног” ако их гледамо поређане на кругу. Поставимо те корене из Ω тако да деле круг на n једнаких делова.



Слика 21: Периоди

Они ће чинити темена правилног n -тоугла. Приметимо да на левој слици у врху уместо r^{18} треба да стоји r^{16} . Нека је $n-1=ef$. Размотримо каква својства имају суме од по f тих корена тако да f тих темена која им одговарају чине темена правилног f -тоугла. Такве суме Гаус назива ПЕРИОДИМА дужине f (заправо скуп корена који се појављује у овој суми Гаус назива периодом, али каже да се и сама сума може тако назвати). Ако се у тој суми пође од корена r^λ она је једнака

$$r^\lambda + r^{\lambda h} + r^{\lambda h^2} + \dots + r^{\lambda h^{f-1}},$$

где је $h = g^e$, а овде је сваки члан суме h -ти степен претходног (гледано циклички, тј. и први члан је h -ти степен последњег). Ову суму Гаус означава са (f, λ) , при чему. Наравно, може се поћи од било ког темена, те је $(f, \lambda) = (f, \lambda h^k)$. Ако се стави $\lambda = 0$, добија се да је $(f, 0) = f$. И ту суму Гаус назива периодом, мада она нема исти статус као претходне. Ради прегледности писања, уместо r^μ пише $[\mu]$. Тада је $[\lambda] \cdot [\mu] = [\lambda + \mu]$, а такође важи: ако је $\lambda \equiv \mu \pmod{p}$, онда је $[\lambda] = [\mu]$; наравно, тада је и $(f, \lambda) = (f, \mu)$.

Гаус потом доказује низ лема за ове периоде, посебно како се налази формула за производе $(f, \lambda) \cdot (f, \mu)$. Наиме, ако је

$$(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda'] + [\lambda''] + \dots,$$

онда је

$$(f, \lambda) \cdot (f, \mu) = (f, \lambda + \mu) + (f, \lambda' + \mu) + (f, \lambda'' + \mu) \dots$$

На пример, нека је $n = 19$, тј. $n-1 = 18$ и $f = 6$. Тада је $e = 3$ и $g = 2^3 = 8$ (2 је генератор за $(\mathbb{Z}_{19} \setminus \{0\}, \cdot)$). У том случају је

$$(6, 1) = [1] + [8] + [64] + [512] + [4096] + [32768],$$

односно после редукције по модулу 19 и приказа у растућем поретку.

$$(6, 1) = [1] + [7] + [8] + [11] + [12] + [18].$$

Тада је

$$(6, 1)^2 = (6, 1) \cdot (6, 1) = (6, 2) + (6, 8) + (6, 9) + (6, 12) + (6, 13) + (6, 19).$$

Но, имамо једнакости:

$$(6, 8) = (6, 8 \cdot 8) = (6, 64) = (6, 7) = (6, 56) = (6, 18) = (6, 144) = (6, 11) = (6, 88) = (6, 12) = (6, 96) = (6, 1),$$

$$(6, 9) = (6, 72) = (6, 15) = (6, 120) = (6, 6) = (6, 48) = (6, 10) = (6, 80) = (6, 4),$$

$$(6, 13) = (6, 104) = (6, 9) = (6, 4), \quad (6, 19) = (6, 0) = 6.$$

Стога је $(6, 1)^2 = 2(6, 1) + (6, 2) + 2(6, 4) + 6$.

Ево приказа периода у овом случају:

Без даљег разматрања, наведимо како се ти периоди појављују при формирању наведених помоћних једначина.

Ако је $n = 19$, онда је $n-1 = 18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$. Тада су периоди $(6, 1), (6, 2), (6, 4)$ корени једначине $x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$. Периоди $(2, 1), (2, 8), (2, 7)$ су корени једначине $x^3 - (6, 1)x^2 + ((6, 1) + (6, 4))x - 2 - (6, 2) = 0$, а r, r^{18} су корени једначине $x^2 - (2, 1)x + 1$. Кад имамо r имамо и све остале.

За случај $n = 17$, имамо $n-1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Ево приказа периода за овај случај.

$$\Omega = (18, 1) \left\{ \begin{array}{l} (6, 1) \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \dots [1], [18] \\ (2, 8) \dots [8], [11] \\ (2, 7) \dots [7], [12] \end{array} \right. \\ (6, 2) \left\{ \begin{array}{l} (2, 2) \dots [2], [17] \\ (2, 16) \dots [3], [16] \\ (2, 14) \dots [5], [14] \end{array} \right. \\ (6, 4) \left\{ \begin{array}{l} (2, 4) \dots [4], [15] \\ (2, 13) \dots [6], [13] \\ (2, 9) \dots [9], [10] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Слика 22: Периоди за случај $n = 19$

$$\Omega = (16, 1) \left\{ \begin{array}{l} (8, 1) \left\{ \begin{array}{l} (4, 1) \left\{ \begin{array}{l} (2, 1) \dots [1], [16] \\ (2, 13) \dots [4], [13] \end{array} \right. \\ (4, 9) \left\{ \begin{array}{l} (2, 9) \dots [8], [9] \\ (2, 15) \dots [2], [15] \end{array} \right. \end{array} \right. \\ (8, 3) \left\{ \begin{array}{l} (4, 3) \left\{ \begin{array}{l} (2, 3) \dots [3], [14] \\ (2, 5) \dots [5], [12] \end{array} \right. \\ (4, 10) \left\{ \begin{array}{l} (2, 10) \dots [7], [10] \\ (2, 11) \dots [6], [11] \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Слика 23: Периоди за случај $n = 17$

Периоди $(8, 1), (8, 3)$ су корени једначине $x^2 + x - 4 = 0$; $(4, 1), (4, 9)$ су корени једначине $x^2 - (8, 1)x - 1 = 0$; $(2, 1), (2, 13)$ су корени једначине $x^2 - (4, 1)x + (4, 3) = 0$ и r, r^{16} су корени једначине $x^2 - (2, 1)x + 1$. Тако смо добили те четири квадратне једначине. Како се решења квадратних једначина изражавају помоћу квадратних корена, а њих је могуће конструисати помоћу лењира и шестара (под условом да је поткорена величина већ конструисана), то се и правилни 17-угао може конструисати помоћу лењира и шестара. На пример, ако желимо да видимо колико је $\cos \frac{2\pi}{17}$ изражено алгебарски, онда можемо да приметимо да је $r = \cos \frac{2\pi}{17} + i \sin \frac{2\pi}{17}$, те је $r^{16} = r^{-1} = \bar{r} = \cos \frac{2\pi}{17} - i \sin \frac{2\pi}{17}$. Добијамо да је

$$\cos \frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2}(r + r^{16}) = \frac{1}{2}(2, 1). \text{ Само треба наћи } (2, 1) \dots$$

Пређимо сада на разматрање основне теореме алгебре. Гаус се више пута враћао на ову теорему. Први доказ је објавио 1799, други и трећи 1816, а четврти 1849. Четврти доказ је базиран на истим идејама као и први, те је он заправо дао три различита доказа овог важног резултата.

Заправо је Гаусова теза, коју је одбранио код Фафа (Pfaff) 1799. у Хелмштету, садржала анализу ове теореме и први доказ. Наслов тезе: „Нови доказ за теорему да се свака цела рационална алгебарска функција једне променљиве може разложити у реалне факторе првог или другог степена”. Теза није дуга, има неких 26 страница. Најпре Гаус анализира, уз критику, раније покушаје доказа овог резултата. Најпре се то односи на Даламберов доказ из 1746. године, а потом и на Ојлерову даљу разраду. Имајући у виду критику коју је дао, Гаус у другом делу представља свој доказ.

Гаус разматра полином са реалним коефицијентима

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Lx + M,$$

где је x неодређена. Он жели да докаже да или линеаран или квадратни фактор од X постоји. Треба приметити да ако одговарајућа једначина има двоструки корен, онда је он, као што знамо, нула и извода тог полинома, па се проблем може свести на полином мањег степена. Стога се може претпоставити да X нема вишеструких корена. Гаус избегава експлицитно коришћење комплексних бројева, што је рађено у претходним доказима и формулише следећу лему.

Лема. Ако је m произвољан позитиван цео број, онда је функција $\sin \varphi \cdot x^m - \sin m\varphi \cdot r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi \cdot r^m$ дељива са $x^2 - 2\cos \varphi \cdot rx + r^2$.

Констатује да се ово показује директном провером и формулише следећу лему.

Лема. Ако су величина r и угао φ одређени на такав начин да важе следеће једначине

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + Br^{m-2} \cos(m-2)\varphi + \dots + Krr \cos 2\varphi + Lr \cos \varphi + M = 0, \quad (19)$$

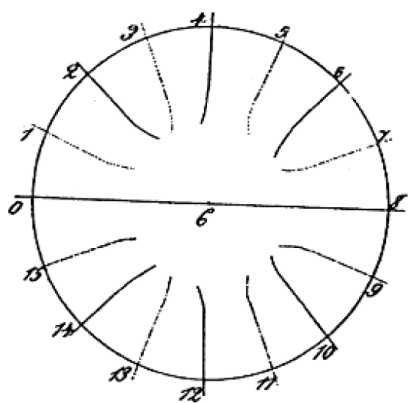
$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + Br^{m-2} \sin(m-2)\varphi + \dots + Krr \sin 2\varphi + Lr \sin \varphi = 0, \quad (20)$$

онда је функција $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + KxxLx + M = X$ дељива фактором другог степена $xx - 2\cos \varphi \cdot rx + rr$, ако $r \cdot \sin \varphi$ није $= 0$. Али, ако јесте $r \cdot \sin \varphi = 0$, онда је та функција дељива простим фактором $x - r \cos \varphi$.

Ову лему доказује уз помоћ претходне. Гаус потом образлаже да се овако нешто доказује углавном коришћењем „имагинарних бројева” и наводи Ојлера, али да он, ето, сматра да је добро видети како се то може и директно доказати.

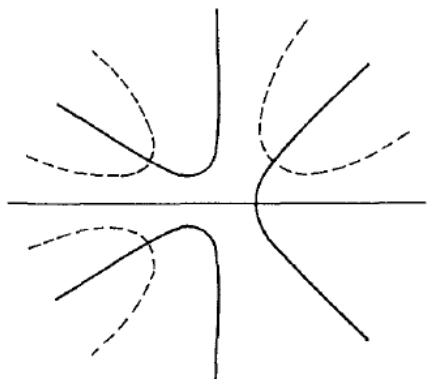
За једначине (19) и (20) он говори да су једначине алгебарских кривих степена m , само представљене у поларним координатама и леву страну у једначини (19) означава са U , а у једначини (20) са T .

Гаус сада жели да покаже да систем једначина $U = 0$, $T = 0$ има решење, тј. да се ове криве секу. Он тврди да за довољно велико R постоји тачно $2m$ тачака пресека криве $U = 0$ и круга полупречника R , као и тачно $2m$ тачака пресека криве $T = 0$ и тог круга, и то тако да се тачке пресека једне и друге криве појављују једна између друге. Ове алгебарске криве имају по m грана и он то илуструје цртежом:



Слика 24: Гаусов први доказ

Додаје и слику



Слика 25: Гаусов први доказ – додатна слика

ради појашњења. Каже да је она добијена помоћу функције $X = x^4 -$

$2xx+3x+10$. Парни бројеви на првој слици означавају пресеке круга и грана криве $T=0$ (обратите пажњу да је x -оса једна од грана те криве), а непарни се односе на криву $U=0$. Зашто се све дешава баш тако? Гаус каже да ако грана неке алгебарске криве улази у неки домен, она одатле и излази. Он ово сматра за јасно и не доказује, даје само следећи коментар у облику фусноте.

Чини се да је доказано са довољном сигурношћу да алгебарска крива нити може да се прекине било где (као што се дешава, на пример, са кривом чија је једначина $y = 1/\ln x$) нити се може изгубити, да тако кажемо, у некој тачки после бесконачно много намотаја (као код логаритамске спирале). Колико ја знам, нико није истакао било какву сумњу у вези овога. Ипак, ако би неко то тражио, онда бих се подухватио задатка да дам доказ, који не подлеже било каквој сумњи, неком другом приликом. . .

Но, ово тврђење о реалним алгебарским кривама није нимало једноставно и данас многи сматрају да је Даламберов доказ, који има мана, лакше поправити но Гаусов. Заправо је тек 1920. године Александар Островски дао непобитан доказ свих Гаусових тврдњи у овој тези и то је објављено у научном часопису у Гетингену. Но, тај доказ нимало није лак. Занимљиво је навести да је једноставнији доказ тога што Гаус тврди, дат у часопису *American Mathematical Monthly* 2017. године.

Наставак доказа да постоји пресек ове две криве Гаус изводи овако. Претпоставимо да пресек не постоји. Тачка 0 је повезана са тачком $2m$ x -осом (видети цртеж, ту је $m=4$). Тачка 1 се онда не може повезати са неком тачком са друге стране x -осе а да је не пресече. Стога, ако је тачка 1 повезана са неком непарном тачком n , онда је $n < 2m$. На исти начин, ако је 2 повезано са парном тачком n' мора бити $n' < n$. Приметимо да је разлика $n' - 2$ парна и да је мања од разлике $2m - 0$. Настављањем поступка долазимо до ситуације да је тачка h повезана са тачком $h+2$. Но, сада грана алгебарске криве која 'улази' у круг у тачки $h+1$ мора обавезно сећи грану која повезује h и $h+2$ што противречи претпоставци.

Гаусов други доказ је алгебарски, не укључује геометријска разматрања. Он је базиран на два резултата.

1. Сваки реални полином непарног степена има бар једну нулу.
2. Свака квадратна једначина са комплексним коефицијентима има два комплексна корена.

Гаус разматра реални полином степена m

$$Y = x^m - L'x^{m-1} + L''x^{m-2} - \dots + \dots \quad (21)$$

Он овај полином мења полиномом у чије су нуле неодређене $a, b, c, \dots$:

$$y = (x - a)(x - b)(x - c) \dots \quad (22)$$

Посматра потом помоћни полином σ у новој променљивој u дефинисан као производ

$$\zeta = (u - (a + b)t + ab)(u - (a + c)t + ac) \cdots. \quad (23)$$

Видимо да је ово производ линеарних фактора који су добијени избором пара неодређених. Стога је $\deg \zeta = m' = \binom{m}{2} = \frac{1}{2}m(m-1)$. Дакле, овај полином је изражен помоћу u , t и симетричан је у неодређеним $a, b, c, \dots$. Но, елементарне симетричне функције од ових неодређених дају коефицијенте $L', L'', \dots$ полинома Y (присетимо се Вијетових формула; знаци коефицијената су тако бирани да су коефицијенти баш симетричне функције). Заменом добијамо помоћни полином Z степена m' . Гаус сада доказује да ако дискриминанта полинома Y није нула, онда ни дискриминанта од Z није 0 (дискриминанта неког полинома је једнака нули акко он има вишеструке корене). Потом бира за t реалну вредност тако да дискриминанта остаје различита од нуле и показује да, ако је корен од Z познат, пар корена оригиналног полинома се може добити (знамо колико су $a+b$ и ab , те онда решавањем квадратне једначине добијамо a и b). Главна ствар у овом доказу је да се итерирањем овог поступка добијају полиноми чији је степен све мање дељив са 2. Наиме, ако је $m = 2^\mu(2k+1)$, онда је $m' = 2^{\mu-1}(2k+1)(2^\mu(2k+1)-1) = 2^{\mu-1}(2k'+1)$. Тако најзад добијамо полином непарног степена који има реалну нулу. И онда идемо уназад те добијамо и нуле почетног полинома.

Трећи Гаусов доказ користи математичку анализу. Можемо да га гледамо и као доказ, који у својој основи користи Гринову формулу из Анализе 2, или резултате из Комплексне анализе. Свакако је то директан доказ. О њему ћемо заиста кратко. Поново се полази од полинома са реалним коефицијентима

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + Lx + M$$

и разматрају помоћне функције

$$t = r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + Br^{m-2} \cos(m-2)\varphi + \cdots + Lr \cos \varphi + M;$$

$$u = r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + Br^{m-2} \sin(m-2)\varphi + \cdots + Lr \sin \varphi.$$

Гаус наравно жели да докаже да систем једначина $t=0, u=0$ има решење. Претпоставимо да то решење не постоји, тј. да је $t^2 + u^2 \neq 0$ за све вредности r и φ . Гаус посматра функцију

$$y = \frac{g}{r(t^2 + u^2)^2},$$

при чему је g полином по t, u , као и њиховим првим и другим парцијалним изводима по φ (с обзиром на природу ових функција, ти

парцијални изводи су функције истог облика). Затим тражи интеграл ове функције по довољно великом диску са центром у координатном почетку.

$$\Omega = \int \int_{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R} y dr d\varphi.$$

Заправо код Гауса φ узима вредности од 0° до 360° . Ми смо то ипак мало модернизовали ☺. Но, испоставља се да ако се интеграл прво по φ добија се да је $\Omega = 0$, а ако се интеграл прво по r , па онда по φ , добија се да је $\Omega > 0$. Ова контрадикција показује да је $t^2 + u^2 = 0$ негде, а то је и тражено.

Галоа



Слика 26: Еварист Галоа

Еварист Галоа (1811–1832) био је син градоначелника једног малог града у околини Париза. Два пута (1828. и 1829) је покушао да се упише у *École Polytechnique* и после ових неуспелих покушаја уписао је *École Normale*. Треба рећи да је Политехничка школа била на знатно вишем нивоу од Нормалне, али је младог Галоа привлачила и због јаког студенчког политичког покрета у тој школи, а Галоа је републиканске идеје наследио од својих родитеља. Осим тога, Галоа је доживео породичну трагедију непосредно пре свог другог покушаја да упише Политехнику — отац му је извршио самоубиство због скандала изазваног његовим фалсификованим потписом на неким дописима.

Његов први објављени рад је чланак од 8 страна о верижним разломцима објављен у *Математичким анализа* Жергоња 1828. године

(Жозеф Жергоњ (1771–1859) био је француски математичар који је издавао овај утицајни часопис). Ту је он показао како се, ако се један корен алгебарске једначине ма ког степена изражава непосредно периодичним верижним разломком, онда се неки други корен изражава такође периодичним верижним разломком који се добија дељењем -1 истим верижним разломком, али написаним у обратном поретку.

У мају 1829, Галоа је приложио свој први рад о својим истраживањима о решавању алгебарских једначина, Академији наука Париза, а други, о једначинама простог степена осам дана касније, 1. јуна. Оба рада су послата Кошију који их је изгубио и они никада нису нађени.

У фебруару 1830. Галоа је Академији приложио још један рад на исту тематику да би био разматран за Велику награду Академије. Овај пут је рад добио стални секретар Академије Фурије, али је он умро пре него што је стигао да прегледа рад. Ни овај рукопис никада није нађен. Награду су поделили Јакоби и Абел (постхумно), док Галоаов рад није ни разматран.

Софи Жермен (1776–1831, француска математичарка која је имала значајне резултате посебно у теорији бројева) је писала о овоме:

...смрт господина Фуријеа је била превише за овог студента Галоу који, упркос својој дрскости, показује знаке паметне природе. Све ово је довело до тога да је он избачен са Нормалне школе. Сада је без новца... Кажу да ће потпуно полудети. Плашим се да је то тачно.

У априлу 1830. Галуа је објавио „ноту” (кратак рад) од две стране у *Билтену* (барона) Ферусака у којој су главни резултати рада који је приложио Академији били наведени без доказа. Прва и најзначајнија теорема која је наведена у овој ноти гласи:

Да би једначина простог степена била решива у радикалима потребно је и довољно да се сви остали корени могу рационално изразити преко нека два од њих.

Јасно је да ово показује да општа једначина реда 5, која има 5 корена који су независни један од другог, не може решити у радикалима.

Изузетно значајан је рад крајње једноставног наслова „О теорији бројева” објављен у *Билтену* Ферусака у јуну 1830. године, а у коме је Галоа одредио структуру коначних поља (која се данас називају и Галоаовим пољима). Прикажимо до којих је резултата дошао.

И Абел и Галоа су имали јасан појам „поља”. Поља која су и Абел и Галоа разматрали у проблему решивости алгебарске једначине су увек поља која садрже у себи поље рационалних бројева. Садашњим језиком говорећи, ради се о пољима карактеристике 0. Но, у овом раду он се бави пољима карактеристике p за прост број p . Њега заправо

занимају величине које постају 0 после множења са p . Ево шта он пише.

Ако се договоримо да сматрамо за нулу све величине које при алгебарском рачунању јесу умношци од p и ако се покуша да се, при овој конвенцији, нађе решење једначине $Fx = 0$, које господин Гаус означава нотацијом $Fx \equiv 0$, обичај је да се разматрају само целобројна решења. Како сам ја, вођен својим истраживањима, разматрао и несамерљива решења, добио сам неке резултате за које сматрам да су нови.

Дакле, Галуа јесте мотивисан разматрањем решавања конгруенција, али за разлику од Гауса који и за нелинеарне конгруенције, попут $x^2 \equiv a \pmod{p}$, допушта само целобројна решења, Галуа би желео да размотри и 'иracионална решења', тј. желео би да посматра раширења од $\mathbb{Z}_p$ добијена додавањем нових елемената. Он претпоставља да је полином Fx нерастављив по модулу p . Пита се да ли може наћи нова решења увођењем нових 'симбола' који се могу показати исто тако корисним као и увођење имагинарне јединице i у анализу.

Галуа означава са i један од корена конгруенције $Fx \equiv 0$ степена v (то i наравно није из $\mathbb{Z}$) и формира p^v израза

$$a + a_1 i + a_2 i^2 + \dots + a_{v-1} i^{v-1}. \quad (24)$$

где су $a, a_1, \dots, a_{v-1}$ цели бројеви по модулу p . Ови елементи ће формирати поље, које данас називамо Галуаово поље и једна од ознака је и $GF(p^v)$.

Он даље показује да, ако се посматрају сви ненула елементи (и тако добије једна група у односу на множење) и овде, као у случају разматрања по модулу p постоје примитивни корени, тј. ова група је циклична (у данашњој терминологији). Дакле, сваки елемент Галуаовог поља је корен полинома $x^{p^v} - x$.

На крају свог рада, Галуа полази од ма ког раширења од $GF(p)$ у коме се горњи полином факторише на линеарне факторе. Посматрајући само потпоље генерисано коренима горњег полинома, он констатује да постоји „примитивни елемент” и у том потпољу. Каже да је то јасно на основу једне Абелове теореме. Тај елемент је нула неког нерастављивог полинома степена v . Без обзира који полином да се узме, увек се долази до истог поља $GF(p^v)$. На пример, у случају $p = 7$ и $v = 3$ констатује да се за тај полином може узети $x^3 - 2$ који је нерастављив по модулу 7.

У јануару 1831. Академија је примила трећу, редиговану верзију, његовог централног рада под насловом „Мемоар о условима за решивост једначина радикалима”. Академија је замолила Поасона и Лакроа да напишу рецензију за овај рукопис. Поасон га је пажљиво прегледао и закључио да не може да га разуме. Ево и завршетка те рецензије.

Урадили смо све највише што смо могли да разумемо Галоаове доказе. Његово резонување није довољно јасно, нити је довољно развијено да бисмо могли да дамо оцену његове тачности и чак нисмо у могућности да дамо идеју његовог резонувања у овој рецензији. Аутор тврди да је тврђење које је посебан циљ овог мемоара део опште теорије, која потенцијално има многе примене. Често се дешава да разни делови теорије, који појашњавају један други, буду лакше схватљиви као целина, него изоловани. Стога, да би се формирала сигурна оцена треба причекати док аутор не објави своје дело као целину. Но, у садашњем облику, за део који је поднесен Академији не можемо дати позитивно мишљење.

Галоа није стигао да представи своју комплетну теорију у облику научног рада. Он је погинуо у двобоју 30. маја 1832. Како је до двобоја дошло, јесте једна од мистерија које окружују овог младог човека. На основу најновијих истраживања, а која свакако нису рекла последњу реч о овом питању, укратко то можемо овако појаснити.

Већ је речено да је Галуа био истакнут у својим револуционарним активностима усмереним против уставне монархије установљене 1830. године у Француској. Дана 9. маја 1831. године 200 републиканаца се скупilo да прослави ослобађање 19 артиљеријских официра Националне гарде који су крајем 1830. године ухапшени и оптужени за издају. Током ове вечере је Галоа, наводно, са бодежом у руци, претио краљу. Ухапшен је исте вечери, али је, изненађујуће, на суђењу 15. јуна ослобођен оптужбе. На Дан Бастиље 14. јула 1831. је поново ухапшен јер је носио забрањену униформу артиљеријског официра Националне гарде, а носио је и напуњену пушку, више пиштоља и нож. Ухапшен је и враћен у затвор у коме је претходно био. Током боравка у затвору, добио је обавештење да му је „Мемоар” одбијен. Покушао је самоубиство, али су га остали затвореници у томе спречили. У стању пијанства се жалио другима колико му недостаје отац. У марту 1832. дошло је до епидемије колере у овом затвору и затвореници су пребачени на друго место. Ту се, по свему судећи, заљубио у ћерку лекара из тог краја. Пошто је био отпуштен из затвора 28. априла, разменио је нека писма са њом, али је јасно да његова осећања нису била узвраћена.

Све те невоље које су га снашле, укључујући и ту неузвраћену љубав, довеле су до тога да је решио да се жртвује за револуционарну ствар. За покретање оружаног устанка, била је потребна и нека жртва и Галоа је решио да он буде та жртва. У наредним данима је написао неколико писама у којима је навео да је изазван на двобој од стране монархиста (а није пропустио да спомене да ће погинути и због „озоглашене кокете”). Заправо се договорио са својим пријатељем да одглуме двобој у коме ће Галуа страдати. Скоро је сигурно да је идентитет његовог пријатеља Перше Дербенвил (а то име је и Александар Дима навео у својим мемоарима). Галоа је навео да не замера

онима који ће га убити, јер имају добру намеру. На његовој сахрани се скупило 3000 људи који су били спремни да нападну полицију и тиме започну побуну, но током сахране се сазнало да је генерал Ламарк, који је такође био велики критичар тренутног режима (генерал је био познат по значајним војним успесима под Наполеоном, касније је био критичар и рестаурације Бурбона и касније уставне монархије) и онда је закључено да би његова сахрана била боља прилика за побуну. До те побуне је и дошло у јуну 1832. године, али то није тема за нас.

У сваком случају, за нашу причу је значајно да је Галоа последњу ноћ пред двобој, дакле ноћ између 29. и 30. маја, провео састављајући подуже писмо свом пријатељу Огисту Шевалијеу у коме је објаснио основне идеје своје теорије. Ово писмо је објављено у Енциклопедијској ревији у септембру 1832. године. Галуа га завршава молбом пријатељу да јавно затражи мишљење од Јакобија и Гауса, не о тачности, него о значају теорема до којих је дошао.

После тога, наћи ће се, надам се, људи којима ће бити у интересу да распетљају сав овај галиматијас.

Нажалост, ни Јакоби ни Гаус се никада нису изјаснили овим поводом и шири круг математичара је тек 1846. године када је Лиувил у свом часопису објавио Галоаове математичке радове, сазнао за ове његове идеје.

Прикажимо сада, укратко, садржину Галоаовог „Мемоара”. Галоа почиње од једначине $f(x) = 0$. Коефицијенти овог полинома су познате величине, на пример рационални бројеви, или чак и само слова. Све рационалне функције ових коефицијената он назива рационалним. Могу се додавати и нове величине, на пример m -ти корени из постојећих. У савременој терминологији, Галоа почиње од неког основног поља и онда додаје нове елементе, те тако формира раширења поља. Он овде користи, али не сасвим конзистентно, термине *пермутација* и *супституција*. Посматра групе супституција које имају следеће својство: ако S и T припадају некој таквој групи, онда је у њој и ST . Обратите пажњу да он захтева само да је композиција две супституције у истој групи. Но, супституције су бијекције, а групе које разматра су коначне и ово му је довољно да може да закључи да је и идентична супституција ту, као и да је инверз сваке супституције у тој групи (размислите зашто).

Галоаова прва лема каже да ако неки полином f има заједнички корен са неким нерастављивим полиномом g , онда је f дељиво са g . Овај се резултат такође налази у Абеловом раду из 1829. Ова лема нам говори да је поље $K(V)$ које се добија додавањем неког корена нерастављивог полинома пољу коефицијената K потпуно одређено чим се зна базно поље K и нерастављив полином g – ми сада знамо да је то поље изоморфно количничком прстену $K[X]/\langle g \rangle$.

Он затим показује да ако једначина $g(x) = 0$ нема вишеструке корене и ако су корени $a, b, c, \dots$ увек се може наћи функција ових корена V тако да су све вредности које се добијају свим пермутацијама $a, b, c, \dots$ различите. Заправо Галуа каже да се за то може узети

$$V = Aa + Bb + Cc + \dots$$

за неке целе бројеве $A, B, C, \dots$. Одавде он добија да се тада сви корени $a, b, c, \dots$ добијају као рационалне функције од V . Другим речима, $K(a, b, c, \dots) = K(V)$. У овом доказу он неке међукораке и не доказује, те је Поасон исправно написао да је доказ овога некомплетан, али да је резултат тачан на основу једног Лагранжовог резултата. Тај елемент V је корен неког нерастављивог полинома. Ако су сви корени тог полинома $V, V', V'', \dots, V^{(n-1)}$ онда следећа лема констатује да ако је $a = \varphi(V)$ корен почетне једначине, онда је $\varphi(V')$ такође корен те једначине.

Потом доказује главни резултат.

Став 1. Постоји група пермутација слова $a, b, c, \dots$ тако да

1° Свака функција корена која је инваријантна на супституције у групи јесте рационално одредива.

2° Обратно, свака функција корена која је рационално одредива је инваријантна у односу на групу.

Видимо овде неконзистентност терминологије у вези пермутација и супституција, но јасно је о чему се ради. Он потом истражује како се мења група једначине ако се основно поље проширује додавањем једног, или чак свих корена неке помоћне једначине (задате нерастављивим полиномом). Јасно је да ће нова група бити нека подгрупа H почетне групе G . Он пажљивије говори о овоме у писму Шевалијеу.

Пише да се, уколико је H права подгрупа од G група G може раставити у облику

$$G = H + HS + HS' + \dots \quad (25)$$

или у облику

$$G = H + TH + T'H + \dots \quad (26)$$

Овде се наравно ради, у савременој терминологији, о разбијање групе на десне, односно леве косете по некој подгрупи. Галоа каже да се ове две декомпозиције не морају поклапати, а ако се поклапају, он каже да се ради о „правој” декомпозицији. У савременој терминологији наравно имамо тада у питању нормалну подгрупу. Он посебно наводи да је то случај када се додају сви корени помоћне једначине. Он доказ не наводи, само каже да се може наћи.

Сада он долази до основног питања: када се једначина може решити помоћу радикала. Наравно, довољно је посматрати радикале (корене) простог степена. Галоа овде претпоставља да се додају одговарајући

корени из јединице на самом почетку, али на основу радова Гауса, то није неопходно претпоставити — p -ти корени из јединице могу се изразити преко радикала степена мањег од p .

Претпоставимо да додавање радикала r , који је корен једначине

$$x^p - s = 0 \quad (27)$$

доводи до редукције Галоаове групе. Како су сви p -ти корени из јединице по Галои већ у основном пољу, то смо заправо додали све корене једначине (27) (остали су облика αr , где је α p -ти корен из 1). Дакле, ради се о „правој” декомпозицији (подгрупа је нормална). Галоа тврди, али не доказује, да је број чланова у декомпозицији (25) (дакле, индекс подгрупе H у групи G) једнак p . Важи и обратно — ако је H подгрупа индекса p онда се Галоаова група G може редукovati на H додавањем радикала степена p .

Дакле, једначина $f(x) = 0$ је решива у радикалима ако и само ако постоји низ подгрупа

$$G \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_m = \{e\}$$

тако је да H_k нормална подгрупа од H_{k-1} чији је индекс прост број. Наравно, те групе данас називамо решивим групама.

Галоа потом претпоставља да је једначина $f(x) = 0$ задата нерастављивим полином чији је степен прост број p . Доказује да се ова једначина може решити у радикалима ако и само ако свака супституција из G трансформише корен x_k у корен $x_{k'}$ линеарном трансформацијом k по модулу p :

$$k' \equiv ak + b \pmod{p}.$$

Галоаова група опште једначине петог степена нема овај облик, те стога ова једначина није решива у радикалима.

Почеци теорије скупова

Сада ћемо покушати да прикажемо како се развио савремени поглед на бесконачне скупове и како су скупови постали основа на којој грађимо савремену математику. Но, у том приказу видећемо и како се развијао појам функције.

Болцано

Наше излагање започињемо кратким освртом на рад Бернарда Болцана (1781–1848), који је био чешки филозоф и математичар италијанског порекла.



Слика 27: Бернард Болцано

Сигурно најпознатије дело овог математичара је његов рад из 1817. године у којем је доказао теорему да свака непрекидна функција узима све међувредности и која је свакако свим студентима позната из курса математичке анализе (сличан доказ је касније дао и Коши у свом *Курсу анализе*, те је зато та теорема и позната као Болцано-Кошијева теорема).

Но, ми се нећемо задржавати на овом раду, но на његовој постхумно објављеној расправи *Парадокси бесконачног* (1851). До овог рада, чак и велики математичари попут Даламбера и Гауса, су избегавали да прихвате стварно постојање бесконачног, но су о појму бесконачности писали као о *начину изражавања*, у контексту променљивих величина које могу узимати произвољно велике вредности и слично. Болцано у овој својој расправи истиче да бесконачни објекти заиста постоје. На пример, он овде наводи да је реална права бесконачна, а није променљива. Такође наводи и следећи пример (скоро идентичан пример је касније навео и Дедекинд (Јулијус Виљем Рихард Дедекинд, 1831–1916, немачки математичар) у својој дискусији о бесконачним

скуповима, а о којој ће касније бити више речи): скуп свих истина је бесконачан. Наиме, узмимо било које истинито тврђење A . Онда можемо формирати ново тврђење B , које НИЈЕ идентично старом: „ A је истинито”. Дакле, на тај начин добијамо ново истинито тврђење B и потом C итд. Он указује да тако добијамо бесконачно много тврђења, а и истиче сличност формирања ових тврђења формирању скупа свих (природних) бројева.

Најзанимљивији део за ову нашу причу је вероватно следећи пример, који Болцано наводи. Он разматра два скупа: све реалне бројеве (за њега, све *величине*) између 0 и 5 и све реалне бројеве између 0 и 12 и истиче да постоји бијекција (овде користимо савремену терминологију, Болцано није то тако исказао) између ова два скупа задата једначином $5y = 12x$. Но, он нажалост пропушта могућност да препозна појам кардиналности бесконачних скупова, него истиче да ипак не можемо те скупове сматрати једнаким у односу на бројност својих чланова, пошто, тако каже Болцано, елементима 3 и 4 одговарају елементи $7\frac{1}{5}$ и $9\frac{3}{5}$ и док су елементи 3 и 4 на растојању 1, дотле су елементи који њима одговарају на растојању $2\frac{2}{5}$. И стога те скупове он не сматра истобројним. Очигледно је да код њега још увек превелики значај имају метричка својства. Из других примера које наводи види се да и Еуклидово „цело је веће од свог дела” има велики утицај на њега, чак и у разматрањима која се тичу бесконачних скупова (и сума). Занимљиво је да он чак понегде истиче да скупови могу имати исте елементе, а да су ипак различити! Наводи као пример крчаг и разбијени крчаг. Очигледно је да апстрактан појам скупа није још присутан код њега.

На крају треба још истаћи да Болцанови радови нису били довољно познати у своје време, па чак ни доста касније, те да стога нису имали значајан утицај на развој математике тога времена.

Риман

Први велики математичар (Болцано је као математичар имао одређени значај, али сигурно се не би могло рећи да је био велики математичар), који је имао значајан утицај на развој теорије скупова био је свакако Риман (Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866), немачки математичар).

Риманов живот је био нажалост кратак, али изузетно плодотворан са математичке тачке гледишта. Он је започео студије на универзитету у Гетингену 1846. године да би године од 1847. до 1849. провео у Берлину где је имао прилику да учи од Јакобија и Дирихлеа. По повратку у Гетинген започела је једна од сигурно најуспешнијих деценија у историји математике. Риман је одбранио докторат 1851. године из области комплексне анализе и у том докторату је увео појам Риманове површи. Године 1853, предао је своју тезу за хабилитацију на тему Фуријеових (Жан Баптист Жозеф Фурије (1768–1830), француски математичар) редова, у оквиру које је прецизирао појам инте-



Слика 28: Георг Риман

грала. Наредне године је одржао своју лекцију за хабилитацију о неееуклидској геометрији у којој је увео појам многострукости и са којом се може рећи да започиње модерни развој диференцијалне геометрије. Значајан рад о Абеловим функцијама објавио је 1857. године, а рад о зета функцији 1859. године. Читаоцу је свакако јасно да би за приказ свих ових радова и њиховог значаја, била сигурно потребна не једна, но више књига, али ми ћемо се у нашем историјском осврту задржати само на најважнијим елементима који се тичу теорије скупова.

Први Риманов утицај на развој теорије скупова је садржан у његовој лекцији за хабилитацију, коју је имао обавезу да одржи да би добио одобрење да предаје у Гетингену. У ту сврху он је понудио три теме и Гаус је, што је било неуобичајено, одабрао да Риман одржи лекцију на трећу тему. И Римана је то изненадило (у писму свом брату је писао да је припремио прве две теме добро и да се надао да ће Гаус изабрати неку од њих, али да сада мора да припреми и предавање за ту трећу тему). Ово предавање је одржано 10. јуна 1854. године и наслов је био: *О хипотезама које леже у основи геометрије*. Сам Гаус, који је предложио тему, био је веома импресиониран Римановим излагањем.

Како је предавање било замишљено за ширу публику, у њему није било техничких резултата, као што би се популарно рекло „није било много формула”, но било је богато дубоким и новим идејама. У њему је Риман увео појам многострукости, на немачком *Mannigfaltigkeit*, као n -тострукто проширене величине. Ту је практично дата савремена дефиниција многострукости — (тополошки) простор, који је локално еуклидски простор од n димензија. Дискутовано је о појму растојања, дужине кривих и уопште о рачуну у таквим просторима. Треба истаћи да је Риман ту успутно навео и могућност разматрања, тј. постојања и бесконачно димензионалних многострукости (многострукости чије

су тачке функције, за које је потребно задавање бесконачно много величина, другим речима вредности функција). Но, за нашу причу је значајно то што Риман разликује непрекидне многострукости и дискретне многострукости. Он каже да су индивидуалне специјализације непрекидних многострукости тачке, а дискретних, елементи многострукости. Заправо, може се рећи да је он овим својим радом желео да учини и више од онога што је садржано у самом наслову. Док би се за непрекидне многострукости могло рећи да представљају истинску расправу о геометријском простору, дотле дискретне многострукости заправо представљају први почетак заснивања свих појмова математике на појму скупа. Наиме, дискретна многострукост није ништа друго него скуп. Заправо Кантор (Георг Фердинанд Лудвиг Филип Кантор, 1845–1918, немачки математичар), под очигледним утицајем Риманових идеја, у својим првим радовима посвећеним скуповима *није* користио за скупове термин *Menge*, но Риманов термин *Mannigfaltigkeit*. Ово Риманово предавање није било одмах доступно широј публици. Заправо, оно је објављено тек 1868. године, две године после Риманове смрти и имало је изванредан утицај на развој математичара те и будућих генерација.

Док се у овом Римановом предавању о геометрији налази клица каснијег заснивања математике на појму скупа и оно као такво представља методолошко-филозофску основу за почетак развоја теорије скупова, дотле његова хабилитациона теза, која је посвећена разматрању Фуријеових редова, представља конкретну основу на којој су започела истраживања која су довела до развоја апстрактне теорије скупова, основних тополошких појмова, као и теорије мере. Стога ћемо посветити пажњу и тој теми.

Фуријеови редови

Да бисмо боље схватили проблеме који су се истраживали, морамо да се вратимо мало уназад у времену, до Ојлера.

У свом *Уводу у анализу бесконачности* из 1748. године, он је дефинисао функцију променљиве величине као „аналитички израз”, који је на произвољан начин направљен од те променљиве и разних константи. Дакле, за функцију је неопходно да има запис у облику формуле. Но, он је у свом ранијем раду из 1734. у области парцијалних диференцијалних једначина допуштао и могућност да функција буде „прекидна”, тј. да нема јединствен аналитички запис у целој области, него да *криве* које представљају график функције буду састављене од више делова са потенцијално различитим аналитичким записом. То је истакао и у расправи са Даламбером (Жан ле Рон Даламбер (1717–1783), француски математичар) који је 1747. показао да једначина струне која осцилује има решење $F(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$. Даламбер је истицао да f

мора бити „непрекидна”, тј. да има јединствен аналитички запис, док је Ојлер сматрао да може да буде и прекидна у горенаведеном смислу те речи. У ту дискусију се укључио и Данијел Бернули (1700–1782, швајцарски математичар), који је на основу физичког разматрања о струни која осцилује, навео да функција f мора бити представљива у облику реда

$$f(x) = a_1 \sin(\pi x/L) + a_2 \sin(2\pi x/L) + \dots,$$

где је L дужина струне. Са математичке тачке гледишта, Бернулијево тврђење се своди на то да се свака функција може представити тригонометријским редом. То тврђење је већина водећих математичара одбацила.

Но, Фурије, најпре у свом раду о провођењу топлоте из 1807, који није објављен, а потом у свом значајном делу *Аналитичка теорија топлоте* из 1822, враћа се на ту идеју. Заправо, он тврди да се свака ограничена функција f на $(-\pi, \pi)$ може представити у облику

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (*)$$

где су коефицијенти задати са

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Наравно, ово су сада свима добро познате формуле из теорије Фуријевих редова.

Фурије говори о произвољној функцији, али се из његовог излагања види да ипак размишља на начин својих претходника. На пример, њему је функција задата са e^{-x} за ненегативне x , а са e^x за негативне x (другим речима, функција $e^{-|x|}$) „прекидна” пошто је задата помоћу два аналитичка израза.

Он је заправо дао два доказа свог тврђења о развоју произвољне функције у тригонометријски ред. У првом доказу је претпоставио да се функција може развити у степени ред и затим решавајући систем од бесконачно много једначина са бесконачно много непознатих, дошао до траженог развоја. У другом доказу он разматра „произвољну” функцију (претпоставља се да је ограничена) и полази од једначине (*). Множењем те једначине са $\cos(nx)$ и $\sin(nx)$ и интеграцијом (при чему интеграл пролази кроз суму) он добија коефицијенте у наведеном облику и тиме тврди да је функција f заиста представљена тим тригонометријским редом. Много се примедби може навести у вези таквог 'доказа'. Пре свега, није јасно зашто се ред може интегралити члан по члан, зашто чак и када се интеграл члан по члан,

наведени интеграли постоје и напoкoн, зашто тако одређени коефицијенти заиста дају тригонометријски ред чија је сума једнака да тој функцији. Дакле, много је примедби, а Фурије је покушао да оправда постојање интеграла о којима је реч. Наиме, он је објаснио да је функција $f(x)\sin x$ која се добија множењем произвољне функције функцијом синус сличног понашања као и синусна функција, она само представља синус који је 'увећан' за одговарајући фактор (као да имамо осцилацију тако да величина амплитуде варира у свакој тачки) и да онда интеграл јесте задат површином. Но, није дао објашњење зашто та површина постоји.

Дакле, модерни концепт непрекидне функције се сигурно не може наћи код Фуријеа и заправо се први пут појављује код Кошија. У свом *Курсу анализе*, он уводи појам непрекидности на следећи начин. функција f , која је дефинисана и ограничена на одсечку $[a, b]$ је непрекидна унутар тих граница уколико за x из тог одсечка „нумеричка вредност разлике $f(x + \alpha) - f(x)$ бесконачно опада како то чини α “. Дакле, Коши дефинише не појам непрекидности у тачки, него непрекидности на одсечку. Заправо се појам непрекидности и појам равномерне непрекидности код њега не разликују. Године 1823, Коши дефинише одређени интеграл непрекидне функције помоћу интегралних сума. Он наиме разматра поделу одсечка $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и суму $S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})f(x_i)$. Уз коришћење равномерне непрекидности функције f (као што је горе напоменуто), он показује да су за поделе чија је норма довољно мала (норма поделе је наравно максимална дужина интервала поделе) и одговарајуће суме произвољно близу и закључује да постоји јединствени лимес и тај лимес је заправо одређени интеграл. Он у даљем, за непрекидну функцију f , разматра и функцију $F(x) = \int_0^x f$ и количник $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ и показује да је F једна примитивна функција за f , тј. $F' = f$, као и да се свака друга примитивна функција за f од F разликује за константу.

Као што видимо, резултати које је Коши добио су сасвим савремени и у модерном духу. Но, и поред тога, Коши ипак није разматрао опште функције, тј. за Кошија функција ипак није била произвољно придруживање, но се и код њега у основи крила концепција да функција мора бити задата аналитичким изразом. То се најбоље може видети у чињеници да је Коши у доказима који се тичу конвергенције Фуријеових редова, у функцији $f(x)$ реалну променљиву x замењивао комплексном променљивом $z = x + iy$, што заиста нема много смисла, сем уколико се подразумева да је f ипак задата неким аналитичким записом.

И поред дефиниције појма непрекидности, Коши није у пуној мери разматрао могућности постојања произвољних прекидних функција. „Најнеправилније“ функције у том смислу које је он разматрао су за-

право биле функције облика (наравно у модерној нотацији)

$$\chi_{I_1}g_1 + \cdots + \chi_{I_n}g_n,$$

где су са χ_{I_j} означене карактеристичне функције одсечака I_j , а g_j су непрекидне функције у његовом смислу. Дакле, прекидне функције које је Коши разматрао су биле искључиво оне које су имале највише коначно много тачака прекида. Први математичар који је озбиљно разматрао функције са бесконачно много тачака прекида био је Дирихле (Јохан Петер Густав Лежен Дирихле, 1805–1859, немачки математичар).



Слика 29: Лежен Дирихле

Дирихле је лично познавао Фуријеа, пошто је од 1822. до 1825. године боравио у Паризу. Он је 1829. године дао први строг доказ о конвергенцији Фуријеовог реда дате функције f (наравно под одређеним условима). Наиме, он је разматрао парцијалну суму Фуријеовог реда $S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ и приказао је ту суму у облику

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin \frac{(2n+1)(t-x)}{2}}{\sin \frac{t-x}{2}} dt,$$

коју су сигурно видели сви студенти на курсу анализе у којем се изучавају Фуријеови редови. Саму формулу наравно није тешко извести (присетимо се дефиниције коефицијената Фуријеовог реда — одатле се добија интеграл). Дирихле је претпоставио да функција има или највећу или најмању вредност и да није непрекидна у највише коначно много тачака. Заправо тај услов му је требао да би се доказала егзистенција интеграла помоћу којих се одређују Фуријеови коефицијенти.

Доказао је да парцијална сума конвергира ка $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$ за $x \in (-\pi, \pi)$, а ка $\frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$ за $x = \pm\pi$. У доказу је ипак користио и претпоставку да је функција f монотона у довољно малом интервалу сваке тачке $x \in [-\pi, \pi]$.

Сматрао је да се случајеви када функција има бесконачно много екстремних вредности, или бесконачно много тачака прекида, могу свести на случај који је разматрао. Заправо је сматрао да је једини услов да функција има интеграл. Као довољан услов за постојање интеграла, он је навео (користимо модерну терминологију) да функција мора бити таква да је скуп D , тачака прекида те функције, нигде густ (подсетимо читаоца да је нигде густ скуп онај скуп чије затворење не садржи ниједан интервал). Дирихле то тврђење није доказао и навео је да ће доказ бити презентиран у неком наредном раду, али... Тај доказ никада није објавио.

Године 1864, у својој докторској дисертацији, Липшиц (Рудолф Ото Сигисмунд Липшиц, 1832–1903, немачки математичар) је покушао да



Слика 30: Рудолф Липшиц

прошири Дирихлеове резултате о конвергенцији Фуријеових редова. Интересантно је да је упркос чињеници да је његова теза рађена чак 10 година после Риманових основних резултата о којима ћемо ускоро говорити, ти резултати нису утицали на Липшицов рад и по свему судећи, он их и није био свестан. Као што смо већ написали, многи Риманови главни резултати су постали опште познати тек после његове смрти. Липшиц је пажљиво анализирао Дирихлеов доказ и разматрао је могућности под којима Дирихлеов доказ 'не би прошао' за дату функцију. Установио је да проблем настаје у случају ограничене и део-по-део монотоне функције (као што смо већ навели, те претпоставке јесу стајале у основи Дирихлеовог доказа), која има бесконачно много тачака прекида између $-\pi$ и π . Заправо, закључио је да би Дирихлеов доказ и прошао под условом да та функција има интеграл (дакле

уколико се појам интеграла може проширити и на ту класу функција). Закључио је да уколико функција задовољава услов који је Дирихле навео (да је скуп тачака прекида D нигде густ), то може бити изведено. Грешка коју је направио била је у томе што је сматрао да се тада може добити да је скуп D' , тачака нагомилавања скупа D , коначан. Проблем је заправо био и у томе што у то време није било занимљивих, другим речима нетривијалних, примера скупова који су нигде густе и онда није било неочекивано да се дође то таквог закључка.

Но, Липшиц је ипак у својој тези дошао и до значајних резултата. Наиме, он се потрудио да замени Дирихлеов услов о монотоности неким другим условом и успео је да га замени другом претпоставком из које је успео да докаже Дирихлеов резултат. Услов који је дао данас је добро познат свим математичарима као Липшицов услов: $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$ за позитивне бројеве C и α .

Пре него што најзад пређемо на Риманов допринос у овој области, а који је био и основа за почетак Канторовог истраживања, а како ћемо видети и почетак озбиљног разматрања бесконачних скупова, наведимо ипак две значајне последице Дирихлеовог рада у овој области. Са његовим радом је први пут почела да се разматра разлика између појма непрекидних и појма интегралних функција. Такође је Дирихле био први значајни математичар који је заиста разматрао општи појам функције реалне променљиве, као придруживање $x \mapsto f(x)$ независно од цртежа и формула. Уосталом добро нам је позната Дирихлеова функција која је на један начин задата на рационалним, а на други начин на ирационалним бројевима и коју је свакако немогуће нацртати, а и задати формулом на начин како је то рађено до тада (поделом датог одсечка на мање одсечке и задавањем формулама на тим деловима). Дирихле је увео ту функцију као пример функције за коју појам интеграла нема смисла. Тек је са појавом Лебеговог (Анри Леон Лебег, 1875–1941, француски математичар) појма интеграла показано да то није тако, али то није већ није део наше приче.

Значајан помак у разумевању појма интеграла и у питањима конвергенције Фуријеових редова дао је Риман. Он је имао прилику да у Берлину прати Дирихлеова предавања из теорије бројева, интеграла, као и парцијалних диференцијалних једначина. Веома је ценио Дирихлеа и сматрао га је, уз Гауса, за највећег живог математичара.

Интересантно је да је Риман имао различит приступ комплексним и реалним функцијама. Наиме, у случају функција $f(z)$ комплексне променљиве, он је захтевао обавезно постојање извода $f'(z)$ док је у случају функција реалне променљиве допуштао, по угледу на Дирихлеа, произвољно придруживање. Но, треба имати у виду да је Риман као и Дирихле и Гаус сматрао да се свака реална функција на одсечку $[-\pi, \pi]$ може представити Фуријеовим редом. Заправо је Ди Буа-Рејмон (Паул Давид Густав ди Буа-Рејмон, 1831–1889, немачки

математичар) био први математичар који је дао пример да то у општем случају није тачно.

У проблему представљања функција тригонометријским редовима, Риман је најпре истакао да је значајно установити под којим условима интеграл постоји. Као и Коши, он је разматрао интегралне суме и поставио је питање под којим условима те суме имају граничну вредност. Коши јесте показао да је то тачно за (равномерно) непрекидне функције, но Римана су занимали општи услови. Он је истакао да је то тачно ако и само ако сума $\sum_{i=1}^n D_i(x_i - x_{i-1})$ тежи нули када параметар поделе (максимална дужина интервала у подели) тежи нули, где је са D_i означена осцилација функције f на одсечку $[x_{i-1}, x_i]$. Осим овог услова разматрао је и следеће. Уколико је σ неки позитиван број, са $s(P, \sigma)$ означимо збир дужина интервала на којима је осцилација већа од σ . Природно се поставља питање да ли можда $s(P, \sigma)$ тежи нули када параметар поделе и σ теже нули. Риман је показао да је тај услов еквивалентан претходно наведеном. То су дакле били услови које је он добио као потребне и довољне услове за постојање граничне вредности интегралних сума, тј. за постојање интеграла.

Риман је наравно истакао да такве услове испуњавају и поједине функције које имају бесконачно много тачака прекида на коначном одсечку и дао је следећи пример. Са (x) означимо функцију која реалном броју x придружује растојање до најближег целог броја, ако такав постоји и придружује 0 уколико је x полуцео број (тј. број облика $n/2$, где је n непаран број), пошто у том случају не постоји јединствени цео број који је најближи броју x . Јасно је да је функција (x) прекидна у свим полуцелим тачкама и непрекидна у осталим тачкама. Риман затим разматра ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$. Тај ред задаје функцију која је прекидна у свим тачкама облика $\frac{m}{2n}$, где су m и $2n$ узајамно прости. Дакле, функција је прекидна у свуда густом скупу тачака. И поред тога, како је у тачкама $x = \frac{m}{2n}$, $f(x+0) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}$ и $f(x-0) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2}$ то је функција f интеграбилна пошто је „скок“ у свакој таквој тачки једнак $\frac{\pi^2}{8n^2}$, а очигледно да за свако $\sigma > 0$ и сваки ограничени интервал реалне праве, постоји само коначно много тачака у којима је тај скок већи од σ . Стога је други наведени услов испуњен и функција је интеграбилна.

Да би установио потребне и довољне услове да би нека функција била представљена тригонометријским редом

$$\Omega(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

он је урадио следеће. Претпоставио је да низ функција $A_n(x)$ задат са: $A_0(x) = \frac{1}{2}a_0$, $A_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, равномерно конвергира ка нули када $n \rightarrow \infty$ и формално је интегрирао тај ред члан по члан те добио

функцију F :

$$F(x) = C + C'x + A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(x)}{n^2}.$$

Овај ред конвергира за све вредности x и представља непрекидну функцију. Риман је показао да та функција задовољава два важна услова:

$$D^2 F(x) = \lim_{a,b \rightarrow 0} \frac{F(x+a+b) - F(x-a+b) - F(x+a-b) + F(x-a-b)}{4ab} = 0,$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{F(x+a) - 2F(x) + F(x-a)}{a^2} = 0.$$

Коришћењем ових резултата, Риман је добио потребне и довољне услове за представљање дате функције тригонометријским редом у датој тачки. Важно је истаћи да коефицијенти a_n и b_n нису добијени интеграцијом, но су то произвољни низови бројева, који морају да задовољавају горенаведени услов, који се тиче равномерне конвергенције низа функција $A_n(x)$.

Дакле, Риман је проширио појам интеграла на ширу класу функција, а дао је и метод за испитивање могућности представљања функција тригонометријским редом. Као што смо већ рекли, ови Риманови резултати су објављени тек 1867. године и тек тада је шири круг математичара имао прилику да настави та истраживања.

Кантор; јединственост Фуријеових редова

Георг Кантор је 14. децембра 1866. године званично завршио своје студије у Берлину.



Слика 31: Георг Кантор

Он је највећи део својих студија провео управо у Берлину учећи од водећих математичара тог времена који су се тамо налазили — Кумера (Ернст Едуард Кумер, 1810–1893, немачки математичар), Кронекера (Леополд Кронекер, 1823–1891, немачки математичар) и Вајерштраса (Карл Теодор Виљем Вајерштрас, 1815–1897, немачки математичар).



Слика 32: Кумер, Кронекер и Вајерштрас

Његов примарни интерес је у почетку био везан за теорију бројева, из те области је и његова дисертација, као и каснија хабилитација. Пошто је неко време предавао у локалној школи за девојке и положио

пруски државни испит, Кантор је прихватио позицију приватдоцента на универзитету у Халеу. Посао приватдоцента је специфичан за немачки образовни систем и занимљиво је напоменути да приватдоцент нема плату од универзитета, но његов приход зависи од тога колико се студената пријави на његов курс. Звање му само омогућава да предаје на универзитету, но не гарантује приход. Но, Кантор није имао финансијских проблема и та чињеница није утицала на њега.

Како је у раније наведеним радовима других математичара било доста речи о могућности представљања функције Фуријеовим редом, то се природно поставило питање о јединствености тог приказа. Дакле, ако функцију f прикажемо помоћу два тригонометријска реда, да ли они морају бити једнаки, тј. да ли су сви одговарајући коефицијенти једнаки. Јасно је да се то своди на следеће питање. Ако је $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$, за све $x \in [-\pi, \pi]$, да ли нужно следи да је $a_0 = a_n = b_n = 0$ за све $n \geq 1$?

Као што смо већ раније наводили, ако би било допуштена интеграција реда члан по члан, онда би доказ био једноставан. Помножили бисмо дату једнакост са $\cos(mx)$, извршили интеграцију члан по члан на одсечку $[-\pi, \pi]$ и добили да је $a_m = 0$. На сличан начин би се могло показати да су и остали коефицијенти једнаки нули. Но, интеграција на овај начин није увек могућа. Студенти који су учили о појму униформне конвергенције редова знају да она омогућава поступак интеграције члан по члан. У то време је на значај униформне конвергенције стално указивао Вајерштрас.

Инспирисан таквим идејама, Хајне (Хајнрих Едуард Хајне, 1821–1881, немачки математичар), за кога су наши студенти најпре чули због дефиниције граничне вредности функције преко низова, а који је у ово време већ био професор у Халеу, доказао је јединственост Фуријеовог развоја функције под слабијом претпоставком од униформне конвергенције. Наиме, он је доказао јединственост под претпоставком да постоји коначно много тачака у одсечку $[-\pi, \pi]$ тако да је конвергенција униформна на сваком интервалу који не садржи ове тачке.



Слика 33: Хајне

Јасно је да овакав резултат подстиче на генерализацију и то у два смера. Најпре се поставља питање да ли се може ослабити услов за униформну конвергенцију, а потом и да ли се може искључити и више тачака од њих коначно много. На тај начин је размишљао и Кантор.

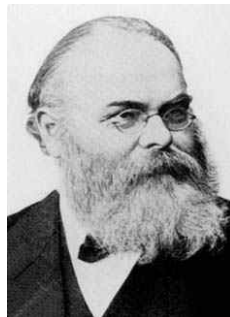
Кантор је 1870. доказао следећи резултат: ако $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ тежи нули када n тежи бесконачности за све вредности x из неког отвореног интервала, онда и низови (a_n) , (b_n) конвергирају ка 0. Да би доказао јединственост приказа нула функције тригонометријским

редом, Кантор је искористио Риманов метод. Наиме, он је посматрао раније наведени ред (функцију) F која се добија двоструком формалном интеграцијом датог тригонометријског реда члан по члан. Да би показао оно што је желео, било му је битно да добије да је та функција заправо линеарна.

Заправо је баш то у писму од 17. фебруара питао свог колегу Шварца (Херман Амандус Шварц, 1843–1921, немачки математичар). Шварц му је написао да је то заиста тако и послао му је доказ тог тврђења. Одавде је следило да важи следећа једнакост:

$$a_0 \frac{x^2}{2} - Cx - C' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

где је наравно претпостављено да је $0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Како је функција са десне стране добијене једнакости периодична са периодом 2π , то мора бити и полином са леве стране периодичан, а то је могуће једино у случају да је тај полином константан, тј. $a_0 = C = 0$. Ово је омогућило Кантору да покаже да остатак горедобијеног реда равномерно тежи нули, те је могао даље да примени идеју о интеграцији реда члан по члан (не можемо наводити све детаље у доказу) и напослетку је добио да су сви коефицијенти једнаки 0. Дакле, на тај начин је доказао јединственост приказа у облику Фуријеовог реда под претпоставком да Фуријеов ред конвергира у свакој тачки и да се у свакој тачки поклапа са вредношћу функције, али без претпоставке о униформној конвергенцији Фуријеовог реда.



Слика 34: Шварц

Следећи корак који је Кантор предузео је да, пошто се већ „ослободио” претпоставке о униформној конвергенцији Фуријеовог реда, покуша да ослаби и претпоставку о конвергенцији Фуријеовог реда у свакој тачки. То је и успео следеће године. У „ноти” (тако математичари често називају кратке радове) објављеној 1871. године, он наводи поједностављење претходног доказа који му је послао Шварц, али и показује да тврђење важи под слабијом претпоставком да ред не конвергира ка вредности функције у свим тачкама из $[-\pi, \pi]$, но да постоји коначно много тачака $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, у којима се то не дешава. Идеја доказа састоји се у томе да се најпре примети да, према ранијем, функција F је линеарна на сваком интервалу (x_i, x_{i+1}) , тј. да је линеарна функција облика $k_i x + l_i$ на том интервалу, а потом да се покаже да се заправо ради о истој линеарној функцији на свим интервалима и тако се све сведе на претходно доказано. Следећи корак је наравно да се покуша са даљим слабењем претпоставки, тј. да постоји *бесконачно много* тачака у којима ред не конвергира почетној функцији. ОВАЈ КО-

РАК ЗАПРАВО ПРЕДСТАВЉА ПРВИ КОРАК У ИЗГРАДЊИ ТЕОРИЈЕ БЕСКОНАЧНИХ СКУПОВА.

Дакле, претпоставимо да је скуп *изузетих* тачака, тј. оних тачака у којима не ред не конвергира ка 0, бесконачан. Према Болцано-Вајерштрасовом ставу тај скуп има тачку нагомилавања. Размотримо најпре случај да има само једну тачку нагомилавања x' и концентришимо се на конвергенцију тригонометријског реда на ограниченom интервалу (a, b) (свеједно је наравно на ком). Посматрајмо интервале (a, x') и (x', b) . Ако је (s, t) било који прави подинтервал од (a, x') , онда у њему има само коначно много изузетих тачака (иначе би у њему постојала тачка нагомилавања скупа свих изузетих тачака, а по претпоставци је то само тачка x'). Но, случај коначно много изузетих тачака је већ обрађен и онда знамо да је Риманова функција F линеарна на (s, t) . Но, то је непрекидна функција која је линеарна на сваком правом подинтервалу од (a, x') , па проширивањем тог произвољног подинтервала до целог (a, x') добијамо да је F заправо линеарна на (a, x') . Слично се добија да је F линеарна и на (x', b) , а потом, као и раније, да је то заправо линеарна функција на (a, b) .

Аналогни доказ пролази и у случају да имамо коначно много тачака нагомилавања скупа изузетих тачака (на коначно много подинтервала је F свуда линеарна, а онда се као и раније покаже да је то једна те иста линеарна функција). Шта се дешава у случају у коме скуп изузетих тачака има бесконачно много тачака нагомилавања? Поступа се као у претходном. Претпостави се најпре да тај скуп тачака нагомилавања има само тачно једну тачку нагомилавања x'' . Разматрањем интервала (a, x'') и (x'', b) , односно њихових правих подинтервала (s, t) добија се да у њима има само коначно много тачака нагомилавања скупа свих изузетих тачака. Но, то је већ урађено и на таквим подинтервалима је F линеарна. Даље се поступа као и у претходном.

Можемо да закључимо да постоји јасна идеја како се резултат генералише и то је било јасно и Кантору. Но, једно је идеја, а друго је реализација. Да би успешно доказао то што се наслућује као резултат, он је морао да се пре свега мало позабави прецизирањем основних резултата који се тичу теорије реалних бројева. Ма колико то било изненађујуће читаоцу, у то време та теорија није била још добро заснована.

Стога Кантор у свом раду из 1872. године почиње баш са тим. Он полази од скупа A , свих рационалних бројева, као датих и циљ му је да заснује теорију ирационалних бројева. У ту сврху посматра фундаменталне низове рационалних бројева (студентима је сигурно познатији термин Кошијеви низови, при чему треба имати на уму да се претпоставља да је ϵ , које се појављује у дефиницији Кошијевог низа обавезно рационалан број) и каже да је сваком таквом низу придружен један симбол. Потом дефинише уређење на тим симболима, као и

аритметичке операције (рационалне бројеве види као константне низове) и пошто све то уведе у даљем те новодобијене објекте назива бројевима. Тако је добио скуп бројева B . Следећи корак савременом читаоцу делује збуњујуће. Наиме, Кантор сада посматра фундаменталне низове бројева из B и формира нови домен C (sic!). Он је потпуно свестан да тиме не добија ништа ново, као што и наши читаоци знају, али истиче концептуалну разлику B и C (подсетимо се да је ово ипак рад о јединствености тригонометријског реда и да Кантор има на уму претходно наведене идеје). После λ таквих конструкција долази до домена L . Дакле, у L су фундаментални низови фундаменталних низова ... Наравно да сваком елементу из L одговара број из B , али као што је већ наведено, Кантору је та дистинкција важна.

Следећи корак је успостављање бијекције између тако добијених реалних бројева и геометријског (једнодимензионог) континуума, тј. праве. Јасно је да избором координатног почетка и основне јединице мерења на датој правој имамо у потпуности одређене *рационалне тачке*, тј. тачке са рационалним координатама. Ако се узме нека друга тачка на правој, онда се њој може „прићи” фундаменталним низом рационалних тачака $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Кантор каже да је растојање b те тачке од координатног почетка онај број у B који одговара том фундаменталном низу. Јасно је да Кантор не може да докаже да обратно, сваком ирационалном броју одговара јединствена тачка на правој и стога он то поставља као аксиому, тј. сваком броју из B јединствено одговара тачка на правој чија је координата управо тај број. Коришћењем ове аксиоме, Кантор успоставља обострано једнозначну кореспонденцију између (аритметички) добијених скупова бројева и геометријских тачака на правој.

Долазимо до фундаменталног појма *скупа тачака прве врсте* (Кантор истиче да кад год користи термин „тачка”, он заправо има у виду број који одговара тачки на правој). Најпре Кантор дефинише појам изводног скупа: ако је дат неки скуп тачака P , онда је нека тачка тачка нагомилавања тог скупа уколико се у сваком интервалу око ње налази бесконачно много тачака тог скупа. Наравно, тачка нагомилавања може, а не мора припадати почетном скупу P . Скуп свих тачака нагомилавања Кантор је назвао „први изводни скуп скупа тачака P ” и означио са P' . Овде је важно истаћи да је скуп P' на тачно одређен начин придружен скупу P . Наиме, за сваку тачку је јасно да она или јесте тачка нагомилавања скупа P , или то није. Дакле, скупу P придружујемо скуп P' . Такво ’баратање’ са скуповима није било уобичајено у то време и представљало је новост и омогућавало дубљи продор у проблематику, која се истраживала.

Ако је скуп P бесконачан скуп у неком ограниченом интервалу, онда он има тачке нагомилавања, тј. скуп P' није празан (заправо се у то време празан скуп помало избегавао, па се говорило да P има изводни

скуп). Уколико је скуп P скуп свих рационалних тачака, онда се наравно добија скуп свих тачака праве. Но, као што се из B конструише $C, \dots, L$, тако се формирају и виши изведени скупови $P'', \dots, P^{\lambda}$. Наравно P'' формирамо у случају бесконачности скупа P' на коначном интервалу итд. Скуп P је *скуп тачака прве врсте* уколико је $P^{(v)}$ коначан скуп за неки природан број v .

Када је ове појмове јасно дефинисао и прецизирао, Кантору није било тешко да докаже генерализацију теореме о јединствености тригонометријског реда. Наиме, доказао је да је тригонометријски ред јединствено одређен под условом да је скуп изузетих тачака скуп тачака прве врсте. Доказ се заснива на раније наведеним својствима Риманове функције F . Ево како се он изводи. Како је почетни скуп P такав да је за неки природан број v одговарајући изводни скуп коначан, то у нашем интервалу (a, b) има само коначно много тачака из $P^{(v)}$. Те тачке деле интервал на коначно много подинтервала. Ако посматрамо било који интервал (a_1, b_1) , који је прави подинтервал од неког од њих, онда у њему има само коначно много тачака из $P^{(v-1)}$. У супротном, у том подинтервалу се налази тачка из $P^{(v)}$, а то није могуће, јер су те тачке ван тог скупа као деоне тачке почетног интервала (a, b) . Поступак понављамо са свим таквим подинтервалима у којима има само коначно много тачака из $P^{(v-1)}$. После коначно много корака добићемо коначан број подпод...интервала у којима је само коначно много тачака из P . На њима је Риманова функција линеарна и онда постепеним повећавањем тих интервала и њиховим „лепљењем”, као што је већ наведено, добијамо да је та функција линеарна на целом почетном интервалу. Тиме је доказ сведен на основни случај.

У доказу теореме о јединствености тригонометријског реда, Кантор се концентрисао на скупове тачака прве врсте, дакле на скупове код којих је $P^{(n)}$ празан скуп за неки природан број n . Но, већ је у том раду имплицитно споменуто да се поступак налажења изводних скупова може продужити и *иза коначног* подручја. Кантор пише: „концепт броја, у смислу у коме је уведен овде, носи у себи клицу неопходне и апсолутно бесконачне екстензије”. Скупови тачака друге врсте, тј. они код којих $P^{(n)}$ није празан скуп ни за један природан број n експлицитно се помињу тек у Канторовим каснијим радовима. Но, он у напомени уз свој рад из 1880. наводи да је он низ скупова

$$P^{(\infty)}, P^{(n\infty)}, P^{(\infty\infty+1)}, P^{(\infty\infty+n)}, P^{(\infty)n\infty}, P^{(\infty\infty n)}, P^{(\infty\infty\infty)},$$

где је са ∞ означен најмањи бесконачни број већи од свих природних бројева, открио још пре десет година. Скуп $P^{(\infty)}$ се природно дефинише као пресек свих $P^{(n)}$ за коначне n , а онда се поставља питање постојања његовог изводног скупа (уколико он има бесконачно много тачака) $(P^{(\infty)})'$ који Кантор означава са $P^{(\infty+1)}$. Сигурно да пажљив читалац, упознат са појмом ординала, не може пропустити да уочи сличност са раније виђеним ($\omega' = \omega + 1$), но концепт трансфинитних бројева

(оних које долазе „иза коначних”) није одмах формулисан и било је потребно време да ти појмови буду усвојени. Но, јасно је да је клица садржана у овим почетним радовима.

Видљиво је да код генерализације теореме о јединствености тригонометријског реда, сам тригонометријски ред има секундарну улогу. Главна је била манипулација реалним бројевима и потпуно је природно да се Кантор у свом даљем истраживању концентрише управо на својства скупа реалних бројева, тј. на реалну праву. Но, пре него што изложимо Канторове почетне резултате, а с њима у вези и улогу, коју је Дедекинд имао у тим првим испитивањима, као и о утицају Дедекинда на увођење скупа као централног појма у математици, одговоримо на непостављено питање пажљивог читаоца.

Наиме, ми причамо о изведеним скуповима прве и друге врсте, али да ли постоје такви примери? Не само то, него да ли су такви примери били познати у време о којем говоримо. Одговор је потврдан.

Позабавимо се најпре питањем скупова прве врсте. Ханкел (Херман Ханкел, 1839–1873, немачки математичар) је навео један такав пример.



Слика 35: Ханкел

То је скуп свих бројева облика $\frac{1}{2^n}$. Јасно је да тај скуп има једну једину тачку нагомилавања 0, те он јесте скуп прве врсте. Наравно, ово је веома једноставан пример, али то је уз пример скупа свих рационалних бројева (који је наравно скуп друге врсте) био у почетку једини познат пример.

Знатно боље примере дао је Хенри Смит (Хенри Џон Стивен Смит, 1826–1883, британски математичар).



Слика 36: Смит

Он се првенствено бавио теоријом бројева, али је боравио и у Француској те је био упознат са проблемима којима се баве математичари на континенту (као што би рекли прави Британци).

Нажалост његови резултати нису били познати (на континенту), а да јесу сигурно би то убрзало разрешавање неких проблематичних питања, која се тичу својстава скупова реалних бројева. Смит је посматрао генерализацију Хенкеловог примера. Наиме, уочимо скуп

$$P_2 = \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} : n_1, n_2 \geq 1 \right\}.$$

Јасно је да је $P_2' = \{0\} \cup \{1/n_1 : n_1 \geq 1\}$ и $P_2'' = \{0\}$. Сада се види шта треба радити. Скуп

$$P_k = \left\{ \frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k} : n_1, \dots, n_k \geq 1 \right\}$$

задовољава услов $P_k^{(k)} = \{0\}$. Дакле, тако добијамо скупове прве врсте (типа n , тј. такве да је n -ти изводни скуп коначан). Како добити пример скупа друге врсте?

Први такав пример дао је Ди Боа Рејмон.



Слика 37: Рејмон

Нека је p било који реалан број. Посматрамо два низа тачака (a_n) и (b_n) , за које је $a_n < b_n$, а осим тога оба низа конвергирају ка p . На сваком интервалу (a_n, b_n) изаберимо скуп P_n типа n (можемо да узмемо translацију горенаведеног скупа узимајући да су $n_i \geq s$ за неко довољно велико s). Нека је $P = \bigcup_{n \geq 1} P_n$. Није тешко уверити се да је $P^{(\infty)} = \bigcap_{n \geq 1} P^{(n)} = \{p\}$.

Пребројивост и небројивост; Дедекинд

Вратимо се сада главном току нашег излагања. Оно што следи је можда и најинтересантнији део ове приче. Наиме, појаснићемо како је Кантор дошао до доказа небројивости реалних бројева. Овај доказ нам сада не представља проблем, али не смемо заборавити какво је стање са основама анализе тада било (читалац се у то, надамо се, могао до сада уверити). И не, први доказ није био базиран на дијагоналном поступку (дијагонални поступак је тек доста касније откривен). Ево како се то све десило (след догађаја су историчари реконструисали на основу писама и скица писама, које су размењивали Кантор и Дедекинд).

Године 1873, прецизније, 29. новембра те године, Кантор је упутио следеће питање Дедекинду. Да ли постоји узајамно једнозначна кореспонденција (или, како би ми то краће данас рекли, бијекција) између скупа свих позитивних целих бројева и свих позитивних нумеричких величина (то јест позитивних реалних бројева)? Кантор наводи да би неко могао да укаже да је то немогуће пошто су цели бројеви дискретни, а реални нису, али он истиче да се том напоменом ништа не добија и мада он мисли да таква кореспонденција не може постојати, он ипак нема доказ те чињенице.

Дедекинд је одмах одговорио на то писмо и навео да ни он не може да докаже да таква кореспонденција не постоји, али да сматра да тај проблем није од посебног интереса. Но, он је успео да докаже да постоји бијекција између скупа свих алгебарских бројева и скупа позитивних целих бројева и тај доказ је приложио. Овде треба напоменути да су Дедекиндова писма изгубљена, али да су скице тих писама сачуване, као и то да је Дедекинд био изузетно методичан и организован научник, који је водио веома уредне записе (чак је записивао и дневне температуре!).



Слика 38: Дедекинд

Кантор је у писму од 2. децембра потврдио да је Дедекинд заиста послао доказ тог резултата. Ево како је Дедекинд доказао ту чињеницу. Сваки алгебарски број је нула неког нерастављивог полинома са рационалним коефицијентима. Но, уз помоћ множења одговарајућом константом, можемо претпоставити да се ради о полиному са целобројним коефицијентима код кога је најстарији коефицијент позитиван. Дакле, ако је ω неки алгебарски број, онда постоји полином $p(x)$ (користимо ознаке које су ови математичари користили) такав да је

$$p(\omega) = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Број $N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$ називамо *висином* полинома $p(x)$ (да, могли смо да не пишемо апсолутну вредност уз a_0 , пошто смо претпоставили да је то позитиван број). Можемо да приметимо да за сваки позитиван број N постоји највише коначно много полинома са

целобројним коефицијентима, који имају висину баш N (обратите пажњу на значај чињенице да се степен полинома n појављује у дефиницији висине полинома). Но, сваки од тих полинома има највише коначно много нула. Дакле, за фиксирано N , постоји коначно много нула полинома са целобројним коефицијентима који имају висину n . Те нуле можемо да уредимо на произвољан начин и тако добијамо да има пребројиво много алгебарских бројева (најпре узимамо бројеве висине 1, па висине 2, итд.).

Кантор је претходно разматрао постојање бијекције између скупа позитивних целих бројева и скупа v -торки таквих бројева. Идеја му је била да свакој v -торци $(n_1, \dots, n_v)$ придружи број $n_1^2 + \dots + n_v^2 = R$. Идеја је онда слична Дедекиндовој – за сваки R , уредити све n -торке чији је збир квадрата R на произвољан начин и тако показати да n -торки има колико и позитивних целих бројева. Кантору се чинило да је то практично исти доказ као и Дедекинов, но то није баш тако. Наиме, ако би се у случају полинома поступило по овој идеји, онда бисмо имали проблема са чињеницом да се нигде не појављује степен полинома и да, наравно, неки од коефицијената полинома буду једнаки нули, те бисмо добили бесконачно много полинома за које је збир квадрата коефицијената једнак фиксираном броју. Дакле, без додатка степена, овакав доказ не би могао да „прође”. Но, када је видео Дедекиндов доказ, Кантор је сматрао да он у суштини има сличан доказ и није имао проблема да Дедекиндов доказ у потпуности касније наведе у раду без спомињања да је доказ заправо Дедекиндов (иначе Кантор до тада нигде није писао о томе да има доказ пребројивости алгебарских бројева, нити да је тај проблем уопште разматрао). Но, више о томе касније.

Кантор се у писму од 7. децембра поново враћа питању пребројивости реалних бројева и наводи да је успео да докаже непребројивост. Ево како је изгледао тај први доказ.

Претпоставимо да се сви реални бројеви могу поређати у низ

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$$

Пођимо од ω_1 и потражимо први следећи члан низа ω_α , који је већи од ω_1 . Нека је затим ω_β први следећи члан који је већи од ω_α ($\beta > \alpha$) итд. На тај начин добијамо растући подниз $\omega_1^1, \omega_1^2, \dots, \omega_1^n \dots$ (после преозначавања) почетног низа. Понављањем поступка добијамо нови подниз итд. Дакле, на овај начин Кантор добија бесконачну матрицу

$$\begin{array}{ll} (1) & \omega_1^1, \omega_1^2, \dots, \omega_1^n \dots \\ (2) & \omega_2^1, \omega_2^2, \dots, \omega_2^n \dots \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ (k) & \omega_k^1, \omega_k^2, \dots, \omega_k^n \dots \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Свака врста ове бесконачне матрице је растући низ. Сада посматрамо одсечак $[p, q]$ у коме нема елемената из прве врсте (нпр. било који одсечак садржан у интервалу (ω_1^1, ω_1^2)). Уколико у овом одсечку нема елемената из преосталих врста, доказ је готов (било који елемент из тог одсечка је тражени реални број који није набројен у почетном низу). У супротном, нека је k најмањи број такав да у том одсечку има чланова низа из k -те врсте. Тада тај одсечак сигурно садржи пододсечак $[p^{(1)}, q^{(1)}]$ у коме нема елемената k -те врсте (k -та врста представља растући низ и довољно је узети пододсечак садржан у интервалу који дефинишу узастопни чланови низа који су у $[p, q]$, а ако је само један члан k -те врсте у $[p, q]$ то је још лакше). Поступак настављамо и добијамо опадајући низ одсека $[p^{(v)}, q^{(v)}]$, који, као што добро знамо, мора да има непразан пресек. Ма који елемент тог пресека је тражени реалан број пошто се он не може налазити у почетном набрајању — тада би онда био у некој врсти l , а пододсечак $[p^{(v)}, q^{(v)}]$ за довољно велико v не садржи елементе врсте l .

Као што видимо, доказ није баш једноставан и Дедекинд је у писму од 8. децембра навео поједностављење овог доказа, а такође је то одмах урадио и Кантор. Доказ који је објављен доказује да се за сваки низ реалних бројева и сваки интервал (α, β) може наћи елемент η из тог интервала, који није у том низу.

Нека је дат низ $x_1, x_2, x_3, \dots$. Означимо са α', β' прва два члана тог низа који се налазе у интервалу (α, β) и за које је $\alpha' < \beta'$. Са α'', β'' означавамо прва два члана наведеног низа у интервалу (α', β') за које је $\alpha'' < \beta''$. Настављамо овај процес и добијамо низ уметнутих одсека $[\alpha^n, \beta^n]$. Сада се разликују два случаја. Може се десити да је овај низ коначан и уколико је $[\alpha^n, \beta^n]$ последњи одсечак у том низу онда било који елемент у (α^n, β^n) није у датом низу (сем можда једног—може се десити да је у том интервалу један члан низа, али не и два, па зато не можемо наставити процес). Уколико смо добили бесконачан низ уметнутих одсека, онда заправо имамо два низа бројева — растући и одозго ограничени низ (α^n) и опадајући одоздо ограничени низ (β^n) . Дедекинд је у својој верзији доказа навео да сада на основу принципа непрекидности (Дедекинд је сматрао да чињеница да сваки растући одозго ограничени низ има граничну вредност, представља суштину појма непрекидности за реалне бројеве) добијамо да први низ има граничну вредност α^∞ , а други β^∞ . Кантор у публикованој верзији избацује спомињање принципа непрекидности и само наводи да ове граничне вредности постоје (касније ћемо продискутовати зашто је то урадио). Сада постоје два случаја: у првом је $\alpha^\infty = \beta^\infty$ и тада за η узимамо ту граничну вредност, а у другом је $\alpha^\infty < \beta^\infty$ и за η можемо узети ма коју вредност из интервала $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$. Овим је доказ завршен.

Дакле, видели смо како је Кантор дошао до важног резултата (и какву је улогу ту имао Дедекинд) у коме се показује да не постоји бијекција између скупа природних бројева и скупа реалних бројева, тј.

да постоје два бесконачна скупа између којих се не може успоставити бијекција. Тај резултат заправо представља почетак развоја теорије бесконачних скупова. Но, погледајмо како је тај резултат Кантор представио. Видећемо да је он то урадио на помало необичан начин.

Кантор је 25. децембра 1873. године писао Дедекинду да је написао и послао у *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* рад под насловом *О једном својству колекције свих реалних алгебарских бројева*. Написао је да у почетку није имао намеру да објављује ове резултате, али је у Берлину разговарао са Вајерштрасом и он му је рекао да треба да објави резултате док год су у вези са алгебарским бројевима. Кантор је Дедекинду написао да је искористио његове коментаре и начин изражавања. Дедекинд му је сугерисао да избаци реч „реалних” из наслова, пошто резултат о пребројивости важи за све алгебарске бројеве, но Кантор је ипак задржао првобитни наслов. Интересантно је да је Вајерштрас сматрао да је резултат о пребројивости алгебарских бројева посебно занимљив и да је то заправо главни резултат тог рада (те је стога Кантор рад тако и назвао), а не чињеница да не постоји бијекција између реалних и природних (самим тим и алгебарских бројева). Наиме, Вајерштрас је резултат о пребројивости алгебарских бројева касније искористио да да пример непрекидне функције која има извод у свакој трансцендентној тачки, а ни у једној алгебарској. Осим тога, у то време, Вајерштрас је имао изузетно негативан став по питању поређења бесконачних скупова. Он је у лето 1874. држао курс у коме је навео да две бесконачно велике величине нису упоредиве и да примена појма једнакости на бесконачне величине не даје нове резултате (sic!). Касније се његов став променио, али је у то време био управо такав.

Кантор је рад организовао на следећи начин. У првом делу рада наведен је доказ (како га је дао Дедекинд) пребројивости скупа алгебарских бројева, а у другом је показано да не постоји бијекција између скупа реалних и природних бројева и затим су ови резултати примењени на нови доказ Лиувиловог резултата о постојању трансцендентних бројева. Дедекиндов допринос нигде није наведен.

Видели смо да је под утицајем Вајерштраса истакнута пребројивост алгебарских бројева, док је напомена о непостојању бијекције између скупа природних бројева и скупа реалних бројева само укратко наведена и то при исправљању рада у припреми за штампу (навели смо негативан Вајерштрасов став по питању поређења бесконачних скупова). Разлог за искључивање спомињања Дедекинда, па и неистицање принципа непрекидности у доказу, састоји се у следећем. Кантор је био ученик веома утицајне берлинске школе и знао је да водећи професори у Берлину Кумер и Кронекер имају помало негативан став према Дедекинду због његове алгебарске теорије бројева. Наиме, Кронекер је тврдио да је исту ту теорију он имао још 1858. године, али да је

није објавио и они никада нису признали Дедекиндов приоритет у тој области. Кантор је касније, развијајући даље своју теорију бесконачних скупова дошао у сукоб са Кронекером, но у времену о коме говоримо, он је био у dobrim односима са берлинском школом и рачунао је да су му они потребни за даљу каријеру (но, испоставило се да он никада прешао из Халеа на неко престижније место). Дедекинд је изразио своје чуђење што је Кантор навео његове доказе без спомињања извора и од тада су њихови односи помало захладнели и на писма која му је Кантор упућивао често није одговарао.

Због ограничености (по обиму) овог прегледа, нећемо се бавити Канторовим даљим радом. Тај рад је изузетно значајан и било би потребно доста простора да би се описао.

Ради комплетније слике почетака теорије скупова и то посебно увођења терминологије скупова и функција у све математичке области посветићемо се мало Дедекиндовом доприносу.

Дедекинд је своју хабилитацију одбранио 1854, само неколико дана после Римана, такође у Гетингену. Наслов теме био је: „О увођењу нових функција у математику“. У оквиру те теме он је говорио о тригонометријским функцијама, интеграцији и елементарној аритметици. Дедекинд је тиме започео један програм, који је заправо следио током целе своје каријере. Наиме, идеја грађења бројева почев од природних бројева је нешто о чему је он писао у више објављених и необјављених радова. На самом почетку је централну улогу дао операцијама (дакле функцијама), тј. идеја конструкције све шире класе бројева била је условљена операцијама које вршимо у постојећој класи, прецизније могућности, односно немогућности извођења инверзних операција. У својим каснијим радовима, саме скупове је поставио у центар интересовања.

Године 1857, Дедекинд је прочитао Хамилтоново (Сер Вилијам Роуен Хамилтон, 1805–1865, британски математичар) дело *Лекције о кватернионима*. Као што се комплексни бројеви добијају као уређени парови реалних бројева са одговарајуће дефинисаним операцијама, на сличан начин се кватерниони добијају из комплексних. Множење кватерниона није комутативно, али сва остала својства су задржана. Дедекинд је очигледно закључио да су те конструкције (комплексних бројева и кватерниона) добро изведене и никада се у својим радовима није бавио питањем конструкције нпр. комплексних бројева. Но, бавио се конструкцијом целих и рационалних бројева, као и реалних бројева. Целе и рационалне бројеве је конструисао попут кон-



Слика 39: Хамилтон

струкције коју ми данас користимо — помоћу уређених парова са одговарајућим идентификацијама, а што се тиче конструкције реалних бројева, присетимо се Дедекиндовога реза из Анализе 1. Нас ће овде највише занимати Дедекиндов поглед на природне бројеве.

Главна Дедекиндова дело, које се бави заснивањем математике је *Was sind und was sollen die Zahlen*, објављено 1888. Најчешћи превод овог наслова је *Шта су и чему служе бројеви*, али, имајући у виду садржај дела, превод могао да буде и *Шта су и чему би требало да служе бројеви*. Ми ћемо се позабавити овим делом, као и рукописима, који су му претходили.

Као што смо већ навели, Дедекинд је био темељан математичар, који није журио са објављивањем радова пре него што би они достигли онај ниво свеобухватности и целовитости који је он желео. Дакле, он је следио Гаусову максиму: *мало, али зрело*. Било је случајева када се то лоше одразило на његову каријеру (недовољан број објављених радова), али он се тог принципа држао целог живота.

У рукописима насталим између 1854. и 1872. године можемо наћи да је Дедекинд природне бројеве градио почевши од броја 1 и формирајући *следбенике* бројева додавањем јединице. Сабирање је дефинисао формулом $a + (b+1) = (a+b) + 1$. Занимљиво је да је Дедекинд многе идеје на основу којих су базирани резултати из тог главног његовог рада о заснивању бројева, наводио у писму извесном гимназијском професору Кеферштајну, а пропустио да их наведе у самом раду и тиме тај рад учинио неразумљивијим и мање схваћеним од стране професионалних математичара. Касније је операцију сабирања дефинисао апстрактније, као функцију φ , која има својства $\varphi(a, d(b)) = d\varphi(a, b)$ и $\varphi(a, 1) = d(a)$, где је $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ функција која представља „додавање јединице”.

Пређимо сада на само дело. На самом почетку, Дедекинд уводи основну скуповну терминологију: *систем* (скуп), *ствар* (елемент скупа), *део* (подскуп), *прави део* (прави подскуп), *комбинован систем* (унија скупова), *заједница система* (пресек скупова).

Читаоци који су упознати са Хилбертовим (Давид Хилберт 1862–1943, немачки математичар) делом *Основи геометрије*, сигурно су ову терминологију препознали пошто на почетку овог дела Хилберт наводи: „Разматраћемо три система ствари. Ствари првог система зваћемо тачке.” Хилберт је тада користио Дедекиндову терминологију.

Поред појма скупа навео је и појам пресликавања и то практично у смислу у коме се у модерној математици оно и уводи — пресликавање система S је *закон* по коме ствари s из S одговара

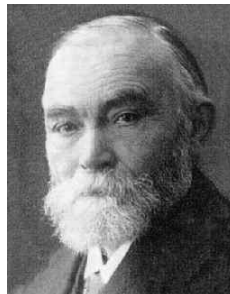


Слика 40: Хилберт

ствар $\varphi(s)$, која се зове слика од s . Дефинисао је и композицију пресликавања. Дедекинд је навео да је овим дао *дефиницију* појма пресликавања, мада са логичке тачке гледишта то се не може назвати дефиницијом (јер, шта је то *закон?*), но само појашњењем.

Као главне недостатке Дедекиндове презентације скупова, истакнути логичар Фреге (Фридрих Лудвиг Готлиб Фреге, 1848–1925, немачки математичар) је навео:

- 1) Нејасно разликовање релације припадности и подскупа.
- 2) Често неразликовање једночланог скупа и његовог елемента.
- 3) Избацивање празног скупа.



Слика 41: Фреге

Наравно, чињеница да постоје овакви проблеми код Дедекинда, не оправдава садашње студенте математике да праве такве грешке! Подсетимо се да је Пеано (Ђузепе Пеано, 1858–1932, италијански математичар) баш у вези са оваквим примедбама увео посебну ознаку, коју и данас користимо, за припадност елемента скупу, док је Дедекинд раније имао појам празног скупа, али га је ипак из публикованог рада избацио.



Слика 42: Пеано

Велики недостатак Дедекиндовога погледа на скупове је и у прихватању постојања универзалног скупа, тј. скупа свих скупова, а знамо да се на тај начин парадокси појављују у теорији скупова, но у тренутку објављивања, то још није било видљиво.

Посветимо се за крај најзанимљивијем појму, са аспекта теорије скупова, који је Дедекинд увео у овом раду, а то је појам *ланца*. Упозоримо одмах да се не ради о појму ланца у вези парцијалног уређења.

Идеја ланца је добијена из идеје математичке индукције, тј. разматрањем доказа помоћу индукције. Ако је дато пресликавање $\varphi: S \rightarrow S$, онда подскуп K од S зовемо *ланац* уколико је $\varphi[K] \subseteq K$ (са $\varphi[S]$ означавамо слику подскупа K при пресликавању φ). Дедекинд уводи појам *ланца система* (сетимо се да је тако Дедекинд називао скуп). Наиме, ако је $A \subseteq S$ и $\varphi: S \rightarrow S$, онда је *ланац система* A по дефиницији пресек свих ланаца (дакле свих подскупова K скупа S за које је $\varphi[K] \subseteq K$), чији је A подскуп. Ознака коју Дедекинд користи да означи ланац скупа A је A_0 (а понекад користи и ознаку $\varphi_0(A)$). Видећемо ускоро како је ова

идеја повезана са аксиоматиком природних бројева, као и са Кантор-Бернштајновом теоремом.

Дедекинд је имао оригиналну идеју — да заснује коначно (природне бројеве) на бесконачном. Стога му је био потребан појам бесконачног скупа. Ту дефиницију је он формулисао још 1872. године. Наиме, скуп S је бесконачан ако постоји бијекција (користимо савремену терминологију) између S и неког његовог правог подскупа. У супротном је коначан. Оригиналност ове идеје је наравно у чињеници да се овде нешто што уопште није спорно, попут природних бројева заснива на нечем што су многи математичари као што смо видели, избегавали да користе, тј. на појму стварне бесконачности.

Ево како је Дедекинд увео природне бројеве. Основни појам је појам *просто бесконачног* скупа. Скуп N је просто бесконачан уколико постоји „1–1” пресликавање $\varphi : N \rightarrow N$ (Дедекинд је „1–1” пресликавања називао *слична* или *истакнута*), тако да је N ланац једног елемента који не припада $\varphi[N]$. Овај истакнути елемент зове се базни елемент и означава са 1. Овде поново имамо проблем са Дедекиндовом терминологијом, пошто заправо N не може бити ланац неког елемента, но ланац једночланог скупа са тим елементом као јединим својим чланом, али видимо да се то лако исправља. Дакле имамо четири важна услова:

- (α) $\varphi[N] \subseteq N$;
- (β) $N = \{1\}_0$;
- (γ) $1 \notin \varphi[N]$;
- (δ) φ је „1–1”.

Да ли је неко споменуо Пеанове аксиоме? Пеано је своје аксиоме објавио 1899. године и навео је да јесте консултовао овај Дедекиндов рад, но сам је пре тога дошао до њих. Но, ево их и овде код Дедекинда.

За крај излагања о Дедекиндовом доприносу теорији скупова, наведимо и горе споменућу везу ланаца и Кантор-Бернштајнове теореме.

Кантор и Дедекинд су се у септембру 1882. године срели у Харцбургу и наравно разговарали о математици. Кантор је тада информисао Дедекинда (а то се види и из писма из новембра те године) да има проблема са доказом следећег тврђења:

Ако је $M'' \subseteq M' \subseteq M$ и ако постоји бијекција између M и M'' онда постоји бијекција између M и M' .

Јасно је да је ово тврђење еквивалентно Кантор-Бернштајновој теорему.

Ево које се тврђење може наћи у наведеном Дедекиндовом раду о бројевима.

Нека је φ дато пресликавање и уведимо ознаку $K' = \varphi[K]$. Претпоставимо да је $K' \subseteq L \subseteq K$. Дакле и K и L су ланци. Дедекинд пише да се при овим условима увек може извршити следећа декомпозиција L и K . Нека је $U = K \setminus L$ и $V = K \setminus U_0$. Тада је

$$K = U_0 \cup V \text{ и } L = U'_0 \cup V.$$

Овај доказ Дедекинд оставља читаоцима (а то ћемо и ми урадити!) и даље га уопште не коментарише. Но, није тешко видети да се у случају да је φ „1–1” добија тражено Канторово тврђење (сугеришемо читаоцу да то сам уради). Подсетимо се да је Дедекинд био врло систематична особа, тако да није могуће да се он није присетио питања које му је поставио Кантор. Пре ће бити да је Дедекинд решио да се мало, да се тако изразимо, нашали са Кантором (а треба имати у виду и ранија искуства која је имао у преписци са њим) и да провери да ли ће он успети да препозна тражено тврђење. Тешко је поверовати, али Кантор не само да је чак и 1895. године сматрао да теорема још није доказана, него се и негативно изразио о овом Дедекиндовом раду, који је описао као вештачки систем од 172 тврђења, који се баве најелементарнијим и понекад најтривијалнијим својствима бројева и који уместо да појасне, само још више замагљују природу бројева! Као поука ове приче може се закључити да треба пажљиво читати дела истакнутих аутора—можда су они доказали баш оно што нам треба, а нису то желели да истакну!

Кратак преглед филозофије математике XX века

Ако се математика сматра науком, онда се филозофија математике може сматрати за грану филозофије науке уз, на пример, филозофију физике или филозофију биологије. Но, због свог предмета истраживања, филозофија математике заузима посебно место у филозофији науке. Док природне науке истражују ентитете који су лоцирани у простору и времену, никако није очигледно да је то тако са објектима који се изучавају у математици. Не само то, методи истраживања се у математици значајно разликују од метода истраживања у природним наукама. Док се у природним наукама општа знања стичу индуктивним методама, за математичка знања се чини да се добијају на другачији начин: дедукцијом из основних принципа. Статус математичког знања такође изгледа различито од статуса знања у природним наукама. Теорије у природним наукама делује много мање сигурно и много су

отвореније за ревизије него што је то случај са математичким теоријама. Због ових разлога математика пред филозофију поставља проблеме сасвим другачије врсте. Стога су филозофи посветили посебну пажњу онтолошким и епистемолошким питањима у вези математике.

1 Филозофија математике, логика и заснивање математике

Са једне стране, филозофија математике се бави проблемима који су блиско повезани са централним проблемима метафизике и епистемологије. На први поглед, чини се да математика истражује апстрактне ентитете. Поставља се питање шта је природа математичких ентитета и како можемо имати знања о њима. Ако се ови проблеми сматрају за претешке, можда треба покушати да се види да ли математички објекти ипак некако припадају конкретном свету.

С друге стране, показало се да је до неке мере могуће математичке методе искористити за филозофска питања која се тичу математике. Окружење у коме је то урађено представља математичка логика која у себи укључује теорију доказа, теорију модела, теорију скупова и теорију израчунљивости као своје подобласти. Дакле, у XX веку су започела математичка истраживања у суштини филозофских теорија, која се тичу природе математике.

Када се професионални математичари баве основима свог предмета истраживања, за њих се каже да се баве истраживањем заснивања математике. Када професионални филозофи истражују филозофски питања о математици, за њих се каже да доприносе филозофији математике. Наравно, разлика између филозофије математике и основа математике је суптилна и што више има интеракције међу филозофима и математичарима о питањима која се тичу природе математике, тим боље.

2 Четири школе

Појаснимо најпре шта је то МАТЕМАТИЧКИ ПЛАТОНИЗАМ. Кратко речено, у његовој су основи три тезе.

Постојање. Постоје математички објекти.

Апстрактност. Математички објекти су апстрактни.

Независност. Математички објекти су независни од интелигентних бића, њиховог језика, мисли и праксе.

Дакле, математичке истине се ОТКРИВАЈУ, оне се не ИЗМИШЉАЈУ.

Општи филозофски и научни поглед у XIX веку био је усмерен ка емпиријском: платонистички аспекти рационалистичких теорија о математици се убрзано губили подршку. Посебно је на, некад високо хваљену, способност рационалне интуиције гледано са сумњом. Тако да се поставио изазов да се формулише филозофска теорија математике која би била слободна од платонистичких елемената. У првим деценијама XX века, четири неплатонистичка приступа математици су развијена: логицизам, формализам, интуиционизам и предикативизам. Због случајних историјских услова, овај последњи није развио свој пуни потенцијал до шездесетих година, али ипак заслужује своје место поред три прве традиционалне школе.

2.1 Логицизам

Програм логицизма састоји се у покушају да се математика редукује на логику. Како би логика требало да је неутрална у погледу онтолошких питања, изгледало је да је овај пројекат у складу са антиплатонистичком атмосфером тог времена.

Идеја да је математика прерушена логика била је, као што смо навели, присутна још код Лајбница. Али јак покушај да се у потпуности спроведе програм логицизма био је могућ једино када су се у XIX веку основни принципи централних математичких теорија јасно формулисали, а принципи логике разоткрили од стране Фрегеа.

Фреге је посветио значајан део своје каријере покушавајући да покаже како се математика може свести на логику. Успео је да изведе принципе Пеанове аритметике другог реда из основних закона система логике другог реда. То извођење није имало грешку. Но, он се ослањао на један принцип за који се испоставило да ипак није био логички принцип. Радило се о његовом Основном закону V:

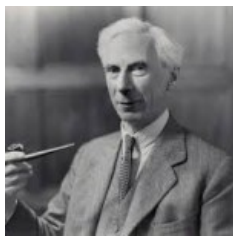
$$\{x : Fx\} = \{x : Gx\} \text{ ако } \forall x(Fx \iff Gx).$$

У чувеном писму Фрегеу из 1902, Расел је показао да овај закон укључује контрадикцију. То нам је данас познато као Раселов парадокс. Наиме, ако за Fx узмемо $x \notin x$, а за Gx узмемо $x \in S$, где је $S = \{x : Fx\}$, онда имамо да је

$$\{x : x \notin x\} = S = \{x : x \in S\},$$

те лева једнакост важи. Но, ако се посматра наведена еквиваленција, она се своди на $\forall x(x \notin x \iff x \in S)$. А ако за x узмемо баш S онда добијемо $S \notin S \iff S \in S$.

Сам Расел је потом покушао да редукује математику на логику на други начин.



Слика 43: Расел

Фрегеов Основни закон V је укључивао у себи да за сваку особину математичких ентитета постоји класа математичких ентитета који задовољавају ту особину. То је евидентно било сувише јако пошто је баш то довело до Раселовог парадокса. Стога је Расел постулирао да само својства математичких објеката, за која је већ показано да постоје, одређују класе. Предикати који имплицитно упућују на класе за које тек треба да буде утврђено да ли постоје, не одређују класу. Тако је добијена структура својстава по типовима: својства основних објеката, својства основних објеката и класе основних објеката, итд. Ова структура својстава по типовима одређује слојевит универзум математичких објеката полазећи од основних објеката за којима следе класе основних објеката, потом класе основних објеката и класа основних објеката, итд.

Нажалост, Расел је открио да принципи његове логике типова нису били довољни чак ни да изведу основне законе аритметике. Било му је неопходно, између осталог, да постави као основни принцип постојање бесконачне колекције основних објеката. То би се тешко могло сматрати логичким принципом. Тако да ни други покушај свођења математике на логику није успео.

И тако су ствари стајале више од педесет година. Године 1983, појавила се књига Криспина Врајта о Фрегеовој теорији природних бројева. У њој је аутор „удахнуо” нови живот логицистичком пројекту. Приметио је да се Фрегеово извођење Пеанове аритметике другог реда може поделити у две етапе. У првој етапи, Фреге користи неконзистентан Основни закон V да изведе оно што је постало познато као ХЈУМОВ ПРИНЦИП:

$$\text{број } F\text{-ова} = \text{броју } G\text{-ова} \text{ ако је } F \approx G,$$

где $F \approx G$ значи да су F -ови и G -ови у „1–1” кореспонденцији један са другим (ова се релација може изразити у логици другог реда). Потом се, у другој етапи, принципи Пеанове аритметике другог реда изводе из Хјумовог принципа и прихваћених принципа логике другог реда. Посебно, Основни закон V није потребан у другом делу извођења. Штавише, Врајт је поставио хипотезу да је, за разлику од Фрегеовог Основног закона V, Хјумов принцип конзистентан. Касније су други аутори показали да је то заиста тако.

Врајт је отишао чак дотле да тврди да се Хјумов принцип може сматрати за логичку истину. Ако је то тако, онда се бар Пеанова аритметика другог реда може редуковати на логику. Тако је рођена нова форма логицизма. Данас је тај



Слика 44: Хјум

поглед познат као нео-логицизам. Већина данашњих филозофа математике сумња у то да је Хјумов принцип логички принцип. Ипак, већина осећа да је увођење природних бројева преко Хјумовог принципа привлачно и са онтолошке и са епистемолошке тачке гледања. Неки сматрају да није много потребно да би се Хјумов принцип прихватио. Из ових разлога за природне бројеве и математичке објекте који се овако могу увести користе назив лаки математички објекти.

Врајтов рад је скренуо пажњу филозофа математике на врсту принципа попут Основног закона V и Хјумовог принципа. Они се називају принципи апстракције. Тренутно, филозофи математике покушавају да конструишу опште теорије принципа апстракције које би објасниле који су од ових принципа прихватљиви, а који не и зашто је то тако. Осим тога, показало се да је у контексту ослабљених верзија логике другог реда, Фрегеов Основни закон V конзистентан. Но, те ослабљене теорије омогућавају извођење веома слабих аритметичких теорија из Основног закона V .

2.2 Интуиционизам

Интуиционизам потиче од рада холандског математичара Брауера и инспирисан је Кантовим ставовима о природи објеката.



Слика 45: Брауер

По интуиционизму, математика је суштински активност конструисања. Природни бројеви су менталне конструкције, реални бројеви су менталне конструкције, докази и теореме су менталне конструкције, математичко значење је ментална конструкција... Математичке конструкције производи *идеални* математичар, тј. изводи се апстракција из физичких ограничења стварних математичара. Али, чак и идеални математичар остаје коначно биће. Ни идеални математичар не може извести бесконачну конструкцију, мада може довршити произвољно велике почетне делове те конструкције. То показује да интуиционизам оштро одбија постојање стварне (или заокружене) бесконачности. Само су потенцијално бесконачне колекције дате при активности конструкције. Основни пример је сукцесивна конструкција у времену, појединачних природних бројева.

Из ових општих разматрања о природи математике, базираних на стању људског ума, интуиционисти изводе ревизионистички став у

логици и математици. Они не прихватају неконструктивне егзистенцијалне доказе. Такви докази тврде да показују постојање математичких ентитета са одређеним својством без, чак и имплицитно, давања метода да се генерише пример таквог ентитета. Интуиционисти одбадију неконструктивне доказе егзистенције као 'теолошке' и 'метафизичке'. Карактеристично својство неконструктивних доказа егзистенције је да они суштински користе принцип искључења трећег

$$\phi \vee \neg \phi$$

или неки од његових еквивалената, као што је принцип двоструке негације

$$\neg \neg \phi \Rightarrow \phi.$$

У класичној логици, ови принципи су валидни. Логика интуиционистичке математике се добија одстрањивањем принципа искључења трећег (и његових еквивалената) из класичне логике. То наравно доводи до ревизије математичког знања. На пример, класична теорија елементарне аритметике више није прихватљива. Уместо тога, предлаже се интуиционистичка теорија аритметике (која се назива *Хејтингова аритметика*), која не садржи принцип искључења трећег. Мада је интуиционистичка елементарна аритметика слабија од класичне елементарне аритметике, разлика није велика.

Постоји прост синтаксни превод који преводи све класичне теореме аритметике у теореме које су интуиционистички доказиве.

У првим деценијама XX века, делови математичке заједнице су имали симпатија према интуиционистичкој критици класичне математике и алтернативама које је предлагала. То се променило када је постало јасно да је у напредној математици интуиционистичка алтернатива драстично различита од класичне теорије. На пример, интуиционистичка математичка анализа је веома компликована теорија и веома је различита од класичне математичке анализе. Ово је пригушило ентузијазам математичке заједнице ка интуиционистичком пројекту. Без обзира на то, следбеници Брауера су наставили да развијају интуиционистичку математику и до данашњих дана.



Слика 46: Хејтинг

2.3 Формализам

Давид Хилберт се слагао са интуиционистима да су у одређеном смислу природни бројеви основни у математици. Но, за разлику од интуициониста, Хилберт није сматрао да су природни бројеви менталне конструкције. Његов аргумент је био да се природни бројеви могу

узети као *симболи*. Симболи су, стриктно говорећи, апстрактни објекти. Но, есенцијално за симболе је то што они могу бити остварени конкретним објектима, тако да их можемо називати *квази-конкретним* објектима. Можда физички објекти могу играти улогу природних бројева? На пример, можемо узети конкретан траг мастила облика | да буде број 0, конкретно реализован траг мастила || да буде број 1, итд. Хилберт је сматрао да је сумњиво да би се напредна математика могла интерпретирати на сличан директан или чак можда конкретан начин.

За разлику од интуициониста, Хилберт није био спреман да заузме ревизионистички став ка постојећем математичком знању. Уместо тога је заузео инструменталистички став у односу на напредну математику. Сматрао је да је напредна математика ништа друго до формална игра. Тврђења математике вишег реда су неинтерпретирани низови симбола. Доказивање тих тврђења није ништа друго до игра у којој се симболима манипулише у складу са фиксираним правилима. Поента 'игре више математике' састоји се, по Хилбертовом гледишту, у доказивању тврђења елементарне аритметике која *имају* директну интерпретацију.

Хилберт је сматрао да не постоји основана сумња у исправност класичне Пеанове аритметике — или бар у исправност њеног подсистема који се назива ПРИМИТИВНА РЕКУРЗИВНА АРИТМЕТИКА. И сматрао је да се свако аритметичко тврђење, које се може доказати коришћењем напредне математике, може такође директно доказати у Пеановој аритметици. Наравно, решавање аритметичких проблема у аритметици је у неким случајевима практично немогуће. Историја математике нам је показала да 'скретање' у вишу математику може понекад водити до доказа аритметичког тврђења који је много краћи и који нам даје дубљи увид, него што је то чисто аритметички доказ тог тврђења.

Хилберт је, не баш најјасније, схватио да се за нека од његових убеђења може сматрати да су заправо математичке хипотезе. Наиме, доказ је, у формалном систему напредније математике, или и елементарне аритметике, коначан комбинаторни објекат који се може кодирати као природан број. Но, двадесетих година XX века детаљи кодирања доказа као природних бројева нису још били потпуно схваћени.

За формалистичко гледиште, минимални захтев за формални систем напредније математике је да мора бити бар конзистентан. Иначе би се свако тврђење у њему могло доказати. Хилберт је, такође не сасвим јасно, видео да конзистентност таквог система укључује да је он бар делимично аритметички исправан. Стога су Хилберт и његови студенти почели да доказују тврђења попут конзистентности стандардних постулата математичке анализе. Наравно, таква тврђења морају бити доказана у „безбедном” делу математике, као што је елементарна аритметика. Иначе доказ не би увећао наше уверење у конзистентност математичке анализе. И, срећом, изгледало је да је у принципу то могуће урадити, пошто су у коначној анализи, тврђења о

конзистентности, поново до на кодирање, аритметичка тврђења. Тако, ради прецизности, Хилберт и његови студенти су започели доказивање конзистентности, на пример, аксиома математичке анализе у класичној Пеановој аритметици. Овај пројекат је постао познат као *Хилбертов програм*. Испоставило се да је много тежи него што су они очекивали. Заправо, нису чак успели да докажу конзистентност аксиома Пеанове аритметике у Пеановој аритметици.

Тада је Курт Гедел доказао 1931. године, да постоје аритметичка тврђења која су неодлучива у Пеановој аритметици.



Слика 47: Гедел

Овај резултат је постао познат као *Геделова прва теорема о некомплетности*. Ово није било добро за Хилбертов програм, али је остављало отвореном могућност да конзистентност више математике НИЈЕ једно од тих неодлучивих тврђења. Нажалост, Гедел је брзо схватио да, ако је Пеанова аритметика конзистентна, сама њена конзистентност се не може доказати у оквиру ње саме. То је Геделова *друга теорема о некомплетности*. Испоставило се да се Геделове теореме о некомплетности генерално могу применити на довољно јаке, али конзистентне рекурзивно аксима-тизабилне теорије. Све заједно ово доводи до пропасти Хилбертовог програма. Испоставља се

да се виша математика не може интерпретирати на чисто инструменталан начин. Виша математика може доказати аритметичка тврђења, попут ставова о конзистентности, који су ван домаћаја Пеанове аритметике.

Све ово не значи крај формализма. Чак и ако се узму у обзир теореме о некомплетности, кохерентно је сматрати да је математика наука о формалним системима.

Једну верзију овог приступа предложио је Кари крајем педесетих година XX века. У овом приступу се математика састоји од колекције формалних система који немају интерпретацију или предмет изучавања, сем што се то не примењује на метаматематику, која проучава саму математику. У односу на формални систем, каже се да је тврђење тачно ако и само ако се може извести унутар система. Али, на фундаменталном нивоу, сви математички системи су равноправни. Могу евентуално постојати неки практични разлози за преферирање једног система у односу на други. У неконзистентним системима се могу доказати сва тврђења, те су они бескорисни. Тако да ако се за систем установи да је неконзистентан, он мора бити модификован. Просто, лекција коју добијамо од Геделових теорема о некомплетности је да довољно јаки конзистентни системи не могу доказати сопствену конзистентност.

Постоји стандардна примедба против Каријеве формалистичке позиције. У стварности математичари не третирају наизглед конзистентне системе као равноправне. Многи од њих нису спремни да признају да се преференца ка аритметичким системима у којима су аритметичка тврђења која изражавају конзистентност Пеанове аритметике изводива, у односу на оне у којима је њена негација изводива, може заправо објаснити у чисто прагматичким терминима. Многи математичари желе да тврде да је уочена коректност (некоректност) неких формалних система ипак објашњива чињеницом да они коректно (некоректно) описују неку област истраживања.

Детлефсен (1986) је истакао да теореме о некомплектности НЕ искључују да се конзистентност делова више математике која се у пракси користи за решавање аритметичких проблема за које су математичари заинтересовани, може аритметички установити. На овај начин, нешто се можда може „спасити” чак и ако је Хилбертов инструменталистички став у односу на сву вишу математику напослетку неодржив.

Ајзаксон (1987) је учинио другачији покушај да спасе део Хилбертовог програма. Он брани став да, у неком смислу, Пеанова аритметика ипак може бити комплетна. Његов аргумент је да се истините реченице које су неодлучиве у Пеановој аритметици могу доказати помоћу концепата вишег реда. На пример, конзистентност Пеанове аритметике може се доказати индукцијом до бесконачног ординала (Генцен, 1938). Али појам ординала је теоретско-скуповни и стога неаритметички концепт. Ако једини начини да се докаже конзистентност аритметике суштински користе појмове који свакако припадају математици вишег реда, онда је конзистентности аритметике, мада се може изразити језиком Пеанове аритметике, неаритметички проблем. И, генералишући ово, можемо се запитати да ли је Хилбертова претпоставка да се сваки аритметички проблем може разрешити помоћу аксиома Пеанове аритметике, ипак тачна.

2.4 Предикативизам

Као што је раније напоменуто, предикативизам се обично не сматра за једну од школа. Но, то је само због стицаја околности да се пре Другог светског рата предикативизам није уздигао до нивоа других школа.

Почетак предикативизма је заправо у Раселовом раду. На инсистирање од стране Поенкареа, Расел је дошао до следеће дијагнозе Раселовог парадокса. Резоновање у Раселовом парадоксу дефинише колекцију S свих математичких објеката x који задовољавају $\neg(x \in x)$. Затим се проверава да ли сам S задовољава овај услов и долази се до контрадикције.

Поенкаре-Раселова дијагноза указује на то да ова дефиниција не

истиче уопште неку колекцију: немогуће је дефинисати колекцију S условом којим се имплицитно позива на сам S . То се назива *принципом зачараног круга*. Дефиниције које крше овај принцип називају се *импредикативним*. Здрава дефиниција неке колекције се позива само на ентитете који постоје независно од колекције која се дефинише. Такве дефиниције називају се *предикативним*. Као што је Гедел касније истакао, Платониста би сматрао да је овај начин размишљања неубедљив. Ако математичке колекције постоје независно од чина дефинисања, тада није одмах јасно зашто не би постојале и колекције које се могу дефинисати само импредикативно.



Слика 48: Поенкаре

Све ово је довело Расела да развије просту и разгранату теорију типова, у коју су уграђене синтаксне рестрикције које чине импредикативне дефиниције лоше формираним. У простој теорији типова, слободне променљиве у дефинишућим формулама пролазе кроз ентитете којима колекција која се дефинише не припада. У разгранатој теорији типова, захтева се додатно да област везаних променљивих у дефинишућим формулама не укључује колекцију која се дефинише. Раселова теорија типова се не може видети као редукција математике на логику. Али, чак и ако то оставимо по страни, рано је примећено да је, посебно у разгранатој теорији типова, прилично компликовано формализовати обичне математичке аргументе.

Када се Расел окренуо другим областима аналитичке филозофије, Херман Вајл је преузео на себе да подржава предикативизам у свом раду из 1918. године.



Слика 49: Вајл

Као и Поенкаре, Вајл није делио Раселову жељу да математику сведе на логику. И одмах од почетка је увидео да би у пракси било немогуће радити у разгранатој теорији типова. Вајл је развио филозофски став који је у суштини између интуиционизма и платонизма. Сматрао је да је колекција природних бројева без проблема задата. Али концепт произвољног подскупа скупа природних бројева није био непосредно прихватљив за математичку интуицију. Само они подскупови који су задати аритметичким (тј. оним првога реда) предикатима су сматрани за предикатски прихватљиве.

Са једне стране показало се да су многе дефиниције у математичкој анализи импредикативне. На пример, минимално затварање операције

на скупу се обично задаје као пресек свих скупова који су затворени у односу на примене те операције (на пример, подгрупа генерисана неким скупом елемената, или затворење скупа у метричком или тополошком простору). Али само минимално затворење је један од скупова који је затворен у односу на примене те операције. Стога је таква дефиниција импредикативна. На овај начин, пажња се постепено пребацивала са бриге о теоретско-скуповним парадоксима на улогу импредикативности у математици коју већина математичара развија. Са друге стране, Вајл је показао да је често могуће заобићи импредикативне појмове. Чак се показало да је највећи део математичке анализе XIX века потврђен на предикативној основи.

Двадесетих година XX века, дошло је до промене. Вајл се прикључио Брауеровом радикалнијем интуиционистичком пројекту. У међувремену, математичари су постали убеђени у то да је високо импредикативна теорија бесконачних скупова коју су развијали Кантор и Цермело много мање угрожена Раселовим парадоксом него што се пре сумњало. Ови фактори су утицали на то да се предикативизам пребаци у стање мировања током више деценија.

Коришћењем опште теорије рекурзије, Соломон Феферман је шездесетих година XX века поново обновио пројекат предикативизма проширивши га на ординале. Његови, али и радови других, показали су да је највећи део анализе XX века прихватљив са становишта предикативизма. Но, наравно да није све што данашња савремена математика прихвата, прихватљиво и са те тачке гледишта.

3 Платонизам

У годинама пред Други светски рат, постало је јасно да су многе озбиљне примедбе биле постављене против сваког од три главна антиплатонистичка програма у филозофији математике. Предикативизам је можда изузетак, али је у то време то био програм без оних који га могу бранити. Стога је створен простор за поновно интересовање за платонистичке погледе о природи математике. У платонистичкој концепцији, предмет истраживања у математици састоји се од *апстрактних ентитета*.

3.1 Геделов платонизам

Гедел је био платониста у односу на математичке објекте и у односу на математичке концепте, али је ипак његов платонистички поглед био софистициранији него онај обичног математичара.

Гедел је сматрао да постоји јак паралелизам између уверљивих теорија математичких објеката и појмова са једне стране и уверљивих теорија физичких објеката и својстава са друге стране. Као и физички

објекти и својства, математички објекти и појмови нису конструисани од стране људи. Као и физички објекти и својства, математички објекти и појмови се не могу свести на менталне ентитете. Математички објекти и појмови су исто онолико објективни као што су то физички објекти и својства. Математички објекти и појмови су, као и физички објекти и својства, постулирани да би се добила добра задовољавајућа теорија нашег искуства. Заиста, на начин који је аналоган нашем односу перцепције физичких објеката и својстава, кроз *математичку интуицију* ми смо у односу квази-перцепције математичких објеката и појмова. Наша перцепција физичких објеката и појмова је подложна грешкама и може се кориговати. На исти начин, математичка интуиција није имуна на грешке, али се може увежбати и поправити. За разлику од физичких објеката и својстава, математички објекти не постоје у простору и времену и они нису реализовани у простору нити у времену.

Наша математичка интуиција нам даје *унутрашњу потврду* математичких принципа. Практично се сво наше математичко знање може извести из аксиома *Цермело-Френкелове теорије скупова* са додатком аксиоме избора (кратко ZFC). По Геделовом мишљењу, ми имамо убедљиву унутрашњу потврду истинитости ових аксиома. Али, он се такође бринуо да ли је математичка интуиција довољно јака да омогући уверљиву потврду аксиома које значајно проширују снагу ZFC.

Осим унутрашње потврде, по Геделу је такође могуће добити екстерну потврду математичких принципа. Ако су математички принципи успешни, тада, чак и ако не можемо да добијемо унутрашњу потврду за њих, они се могу сматрати вероватно тачним. Гедел (1947) каже:

... успех овде значи плодност последицама, посебно 'проверивим' последицама, тј. последицама које се могу проверити без нове аксиоме, чији је доказ уз помоћ нове аксиоме значајно једноставнији и лакши за налажење, што омогућава да се у један доказ контрахују многи различити докази. . . Можда постоје аксиоме толико богате проверивим последицама, које бацају толико светла на цело поље, дајући моћне методе за решавање проблема. . . тако да, без обзира на то да ли јесу или нису унутрашње неопходне, биле би прихваћене бар онолико колико су то добро установљене физичке теорије.

Ово је инспирисало Гедела да трага за новим аксиомама које могу бити мотивисане споља и које могу одлучити питања као што су Хипотеза континуума, а које су веома независне од ZFC.

Гедел је делио Хилбертово уверење да сва математичка питања имају потпуно одређен одговор. Али, платонизам у филозофији математике не би сам по себи требало да значи да је посвећен томе да тврди да сва теоретско-скуповна тврђења имају одређену истинитосну вредност. Постоје верзије платонизма које сматрају, на пример, да су

све теореме ZFC тачне по одређеним теоретско-скуповним чињеницама, али да нема теоретско-скуповних чињеница које чине нека тврђења, која су веома независна од ZFC, таквим да им се може одредити истинитосна вредност. Чини се да је и Пол Коен делио то гледиште.

3.2 Натурализам и неизоставност

Квајн (1969) је формулисао методолошку критику традиционалне филозофије.

Предложио је другачију филозофску методологију, која је постала позната као *натурализам*. По натурализму, наше најбоље теорије су наше најбоље НАУЧНЕ теорије. Ако желимо да добијемо најбољи одговор, који можемо да добијемо, на филозофска питања као што су „Шта знамо?” или „Какве врсте ентитета постоје?”, не треба да се окрећемо ка традиционалним епистемолошким или метафизичким теоријама. Такође потребно је да се уздржимо од започињања фундаменталног епистемолошког или метафизичког истраживања од првих принципа. Оно што треба да радимо је да консултујемо и анализирамо наше најбоље научне теорије. Оне садрже, додуше често само имплицитно, наша најбоља тренутна знања о томе шта постоји, шта знамо и како то знамо.



Слика 50: Квајн

Патнам је применио Квајнов натуралистички став на математичку онтологију. Бар од Галилеја, наше најбоље теорије у природним наукама су математички изражене. Њутнова теорија гравитације је базирана на диференцијалном и интегралном рачуну. Тако да се чини да је онтолошка посвећеност математичким ентитетима инхерентна нашим најбољим научним теоријама. Овај начин размишљања може бити даље ојачан позивањем на Квајнову тезу о потврђујућем холизму. Емпиријски доказ не даје своју потврдну моћ било којој појединачној хипотези. Радије, искуство глобално потврђује теорију у коју је појединачна хипотеза уметнута. Како су математичке теорије битан састојак научних теорија, оне се такође потврђују искуством. Стога имамо емпиријско потврђивање за математичке теорије. И више од тога је тачно. Чини се да је математика неизоставна за наше најбоље научне теорије: није уопште јасно како бисмо их изразили без математичког речника. Стога нас натуралистички став присиљава да прихватимо математичке ентитете као део наше филозофске онтологије. Овај начин размишљања назива се *аргумент неизоставности*.



Слика 51: Патнам

Ако прихватимо математику која је укључена у наше најбоље научне теорије здраво за готово, онда се чини да смо се обавезали некој форми платонизма. Али је то ипак доста скромнија форма платонизма него што је Геделов платонизам. Пошто се чини да природне науке 'могу да прођу' са (грубо говорећи) просторима функција на реалним (и комплексним) бројевима. Напредније области теорије бесконачних скупова се чини поприлично ирелевантним за чак и најнапредније теорије у природним наукама. Ипак, Квајн је у неком тренутку сматрао да су скупови који су постулирани помоћу ZFC прихватљиви са натуралистичке тачке гледишта; они се могу гледати као адекватно ЗАОКРУЖИВАЊЕ математике која је укључена у наше научне теорије. Ова Квајнова оцена није универзално прихваћена. Феферман, на пример, тврди да су све математичке теорије које се суштински користе у нашим тренутно најбољим научним теоријама предикативно сведиве, што није случај са теоријом скупова.

У Квајновој филозофији су природне науке крајњи судија који пресуђује о математичком постојању и математичкој истини. Ово је довело до примедби да таква слика чини очигледност елементарне математике помално мистериозном. На пример, питање да ли сваки природни број има следбеника, по Квајновом гледишту, напослетку зависи од наших најбољих емпиријских теорија; но, наравно да се тај факт чини знатно непосреднијим од тога.

Пенелопа Мади је приметила да се математичари не сматрају на било који начин ограниченим у ономе што раде, од стране природних наука. Заиста, можемо се запитати да ли се и математика може сматрати и сама науком и да ли је онтолошку посвећеност математици боље оцењивати на бази рационалних метода које су имплицитне у математичкој пракси.



Слика 52: Мади

3.3 Редукција платонизма

Пол Бернајс (1935) је указао на то да када математичар ради, он „наивно” третира објекте са којима ради на платонистички начин. Сваки активни математичар је, како он каже, платониста. Али када математичар није на свом радном месту, да се тако изразимо, и када га филозоф пита у вези његових онтолошких размишљања, спреман је да се промени и да се повуче на нејасно неплатонистичку позицију. Ово доводи до тога да неки указују на то да је нешто погрешно у вези филозофских питања о математичким објектима и математичком знању.

Карнап (1950) је увео дистинкцију између питања која су интерна за оквир рада и питања која су екстерна у односу на тај оквир. Ар-



Слика 53: Бернајс, Карнап и Тејт

гументовано је да Карнапова дистинкција на неки начин преживљава пропаст логичког емпиристичког оквира у оквиру којег је најпре формулисана.

Тејт (2005) је покушао детаљно да разради како се та дистинкција може применити на математику и то је резултовало нечим што би се могла назвати редукованом верзијом платонизма.

По Вилијаму Тејту, питања постојања математичких објеката се једино разумно могу поставити и на њих се разумно може одговорити једино унутар (аксиоматског) математичког оквира. Ако се неко бави теоријом бројева, на пример, онда он може поставити питање да ли постоје прости бројеви са датим својством. Таква питања се тада разрешавају на чисто математичким основама. Филозофи имају тенденцију да закораче изван математичког оквира и питају „са стране” да ли математички објекти заиста постоје и да ли су математичка тврђења заиста тачна. У овом случају они постављају питања са метафизичке основе о математичкој истини и постојању. Тејт аргументује да се тешко може наћи неки смисао таквим екстерним питањима. Покушава да их редукује и да их доведе тамо где она и припадају: у саму математичку праксу. Наравно да се неће свако сложити са њим око овога. Други су развили системски начин за одговоре баш на врсту екстерних питања којима је Тејт приступио са презиром.

Није изненађујуће да Тејта нимало није занимало Геделово позивање на математичку интуицију у филозофији математике, ни за филозофску тезу да математички објекти постоје „ван простора и времена”. Штавише, Тејт верује да математици није потребна филозофска основа; он жели да математика говори сама за себе. У овом смислу његова позиција подсећа на природни онтолошки став за који се залаже Артур Фајн у дебати о реализму у филозофији наука.

3.4 Бенасерафов епистемолошки проблем

Пол Бенасераф је формулисао епистемолошки проблем за разне

платонистичке позиције у филозофији наука у свом раду „Математичка истина” из 1973. године.

Аргумент је посебно упућен против приказа математичке интуиције попут Геделовог. Бенасерафов аргумент полази од премисе да је наша најбоља теорија о сазнању, каузална теорија о сазнању. Потом се истиче да, по платонизму, апстрактни објекти нису просторно и временски локализовани, док математичари од крви и меса то јесу. Наша најбоља епистемолошка теорија нам потом каже да знање о математичким објектима резултира из каузалне интеракције ових ентитета. Али је тешко замислити како се то може десити.



Данас мало епистемолога сматра да је каузална теорија о сазнању наша најбоља теорија о сазнању. Али се показало да је Бенасерафов проблем изненађујуће отпоран при промени епистемолошке теорије. На пример, претпоставимо, чисто дискусије ради, да је ПОУЗДАНОСТ наша најбоља теорија о сазнању (дакле да смо до сазнања да је нешто тачно дошли преко неког поузданог процеса). Тада се појављује проблем како објаснити како успевамо да добијемо поуздана веровања о математичким ентитетима.

Формулисана је и семантичка варијанта Бенасерафовог епистемолошког проблема. По тренутно најбољој семантичкој теорији, узрочно-историјске везе међу људима и светом конкретних објеката омогућавају нашим речима да се позивају на физичке ентитета и својства. По платонизму, математика се позива на апстрактне ентитете. Стога нам је платонист дужан уверљивог објашњења како ми (људи са физичким телима) можемо да се позивамо на њих. Како ствари стоје, чини се да каузална теорија позивања не може да нам обезбеди тражено објашњење 'микроструктуре позивања' у математичкој расправи.

3.5 Обилни платонизам

Верзија платонизма је развијена са циљем да омогући решење Бенасерафовог епистемолошког проблема. Ова позиција је позната као *обилни платонизам*. Централна теза ове теорије је да се свака логички конзистентна математичка теорија обавезно односи на апстрактан ентитет. Да ли је математичар који је формулисао ту теорију тога свестан или није, практично је без значаја. Развијајући конзистентну математичку теорију, математичар аутоматски добија знања о области истраживања те теорије. Тако да, при овом погледу, не постоји епистемолошки проблем који треба решити.

У једној верзији, обилни платонизам постулира више математичких универзума од којих сваки одговара конзистентној математичкој теорији. Тако да, на пример, проблем континуума не добија јединствен одговор: у једном теоретско-скуповном универзуму континуум хипотеза важи, у другом не. Но, не слажу се сви да је таква слика одржива. Постоји аргументација која показује да се вишеструки универзumi могу у великој мери „акумулирати” у један.

У другој верзији обилног платонизма, математички ентитет који постулира конзистентна математичка теорија, има *тачно она* математичка својства, која му теорија додељује. На пример, апстрактан ентитет који одговара ZFC је посебан у том смислу што не чини континуум хипотезу ни тачном ни лажном. Разлог је у томе што ZFC не повлачи ни континуум хипотезу ни њену негацију. Ово не значи да су сви начини конзистентног проширења ZFC равноправни. Неки начини могу бити плодносни и моћни, неки су мање такви. Али овај поглед забрањује да неки конзистентни начини проширења ZFC буду пожељнији зато што садрже истините принципи док други садрже лажне принципе.

4 Структурализам и номинализам

Бенасерафов рад је мотивисао филозофе да развију и структуралистичке и номиналистичке теорије у филозофији математике. А од краја осамдесетих година, комбинација структурализма и номинализма се такође развија.

4.1 Шта бројеви не могу бити

У раду из 1965. „Шта бројеви не могу бити” Бенасераф је формулисао изазов теоретско-скуповном платонизму. Ево о чему се ради. Постоји бесконачно много начина да се природни бројеви идентификују са скуповима. На пример, Цермело је то урадио овако:

$$0 := \emptyset, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{1\}, \quad 3 := \{2\}, \quad \dots$$

док је фон Нојман предложио:

$$0 := \emptyset, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \quad 3 := \{0, 1, 2\}, \quad \dots$$

Једноставно питање које Бенасераф поставља је:

Која је од могућих идентификација природних бројева и скупова истинска?

Јасно је да је веома тешко одговорити на ово питање. Није тешко видети како се може дефинисати функција следбеника, као и сабирање и множење, у оба наведена случаја, тако да сва аритметичка твђења за која узимамо да су тачна 'испадне' тачна. Заиста, ако се то

уради на природан начин, добијамо изоморфне структуре (у теоретско-скуповном смислу речи), а у изоморфним структурама су исте реченице истините (оне су елементарно еквивалентне). Једино када поставимо питања која нису чисто аритметичка, попут „Да ли $1 \in 3$?” ова два приступа природним бројевима дају различите одговоре. Тако да не могу оба приступа бити коректна.

Да резимирамо, долазимо до следеће ситуације. С једне стране не види се да постоји разлог зашто би један приступ био супериоран у односу на други. С друге стране, не могу оба приступа бити коректна. Ова неприлика се понекад зове Бенасерафов *проблем идентификације*.

Исправан закључак који се може извести из ове загонетке изгледа да је да ниједан од ова два приступа није коректан. Како би се слична разматрања појавила ако бисмо поредили друге разумне покушаје да се природни бројеви редукују на скупове, чини се да природни бројеви ипак нису скупови. Јасно је да се сличан аргумент може формулисати и са рационалне бројеве, реалне бројеве... Бенасераф закључује да ни они уопште нису скупови.

Није уопште јасно да ли је, на пример, Гедел, био посвећен редукуцији природних бројева на скупове. Платониста може подржавати тврдњу да се природни бројеви могу утопити у теоретско-скуповни универзум истовремено задржавајући став да на утапање не треба гледати као на онтолошку редукуцију. Заиста, као што смо видели код приступа у обилном платонизму, природни бројеви немају никаква друга својства осим оних које им придружује наша теорија природних бројева (Пеанова аритметика). Али се онда чини да би платонисти морали да заузму исти став у односу на рационалне бројеве, комплексне бројеве... Мада задржавање става да су природни бројеви *sui generis* (јединствени) свакако има извесну привлачност, чини се да је мање природно сматрати да су и комплексни бројеви, на пример, *sui generis*. И, било како било, чак и ако се природни бројеви, комплексни бројеви... у неком смислу не могу редуковати на нешто друго, ипак је природно запитати се да ли постоји неки други начин да се разјасни њихова природа.

4.2 Ante rem структурализам

Стјуарт Шапиро (1997) истиче корисну дистинкцију између алгебарских и неалгебарских теорија. Грубо говорећи, неалгебарске теорије су теорије, које су, на први поглед, теорије о јединственом моделу: циљани модел за теорију. Знамо за примере таквих теорија: аритметика, математичка анализа... Алгебарске теорије, пак, *нису* о јединственом моделу. Примери су теорија група, топологија, теорија графова...

Бенасерафов изазов се може поставити објектима за које се чини да неалгебарске теорије описују. Али се тај изазов не може поставити ал-

гебарским теоријама. Алгебарске теорије се не занимају самим математичким објектима; оне се занимају структурним аспектима математичких објеката. То је навело Бенасерафа да се пита да ли то може бити тачно такође и за неалгебарске теорије. Можда се из Бенасерафовог проблема идентификације може закључити да чак ни аритметика не описује специфичне математичке објекте, него само описује структурне везе?



Слика 55: Шапиро и Резник

Шапиро и Мајкл Резник (1997) имају став да све математичке теорије, чак и неалгебарске, описују структуре. Ова позиција је позната као *структурализам*. Структуре се састоје од *места (позиција)*, која стоје у структурним односима једно према другом. Стога математичке теорије описују места (позиције) у структурама. Али оне не описују објекте. Број 3, на пример, при овом гледишту неће бити објекат, него место у структури природних бројева.

Системи су примери структура. Системи који дају пример структуре која је описана неалгебарском теоријом су изоморфни један другом и стога, што се теорије тиче, подједнако добри. Системи наведени у претходном одељку могу се видети као примери структуре природних бројева. $\{\{\emptyset\}\}$ и $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ су подједнако погодни да играју улогу броја три. Али ниједан од њих *није* број три, пошто је број три слободно место у структури природних бројева и то слободно место нема никакву унутрашњу структуру. Системи типично садрже структурна својства осим оних која су релевантна за структуре за које се узимају као примери.

Разумна питања идентитета су она која могу бити постављена унутар структуре. То су питања на која је могуће одговорити на основу структурних аспеката структуре. Питања идентитета која иду изван структуре немају смисла. Може се поставити питање да ли $3 \in 4$, али не убедљиво: ово питање укључује категоријску грешку. Оно меша две различите структуре: $\in$ је теоретско-скуповни појам, док су 3 и 4 места у структури природних бројева. Чини се да је то задовољавајући одговор на Бенасерафов изазов.

По Шапировом гледишту, структуре нису онтолошки зависне од постојања система који представљају примере за њих. Чак и ако не би било бесконачних система у Природи, структура природних бројева би постојала. Тако да су структуре, како их Шапиро схвата, апстрактни платонски ентитети. Шапирова врста структурализма се често назива *ante rem* (*пре ствари*) структурализам.

У уџбеницима теорије скупова ми такође налазимо појам структуре. Теоретско-скуповна дефиниција нам, као што добро знамо, каже да је структура $(n + 1)$ -торка која се састоји од скупа, више операција на том скупу, више релација на њему и више истакнутих елемената тог скупа. Али то не може бити појам структуре који структурализам у филозофији математике има на уму. Наиме, теоретско-скуповни појам структуре претпоставља појам скупа, који се по структурализму и сам мора објаснити у структурним терминима. Или, да то кажемо другачије, теоретско-скуповна структура је само систем који је пример структуре која му онтолошки претходи.

Без обзира на ово, мотивација за проширивање *ante rem* структурализма чак до теорије скупова није потпуно очигледна. Присетимо се да главна мотивација за примену структуралистичког схватања математичке области лежи у Бенасерафовом проблему идентификације. За теорију скупова је тешко поставити изазов идентификације: скупови се обично не дефинишу помоћу једноставнијих појмова.

Чини се да *ante rem* структурализам описује појам структуре на помало кружни начин. Структура се описује као места која стоје у односу једно према другом, али се место не може описати независно од структуре којој припада. Но, то није обавезно проблем. За *ante rem* структуралисту, појам структуре је примитивни концепт, који се не може дефинисати преко основнијих термина. У најбољем случају, можемо конструисати аксиоматску теорију математичких структура.

Али, Бенасерафов епистемолошки проблем ипак се и даље чини ургентним. Структуре и места у структурама можда нису објекти, али јесу апстрактне. Тако да је природно да се питамо како успевамо да дођемо до знања о њима. Овај проблем је био неким филозофима разлог да развију номиналистичку теорију математике и да потом помире ту теорију са основним начелима структурализма.

4.3 Математика без апстрактних ентитета

Гудман и Квајн (1947) су започели пројекат преформулација теорија из природних наука без коришћења апстрактних ентитета. Номинализам у математици је схватање по коме или математички објекти, релације и структуре уопште не постоје, или не постоје као апстрактни

објекти. У овом другом случају се предлажу неке конкретне замене за математичке објекте.

Номиналистичка реконструкција научних теорија се показала као тежак задатак. Квајн га је одмах, после почетних покушаја, напустио. У протеклим деценијама многе теорије су предложене које наводно дају номиналистичку реконструкцију математике.

У номиналистичкој реконструкцији математике, конкретни ентитети морају да играју улогу, коју апстрактни ентитети играју у платонистичкој визији математике, а конкретне релације треба да буду коришћене за симулирање математичких релација међу математичким објектима. Али, ту се појављују проблеми. Најпре, још је Хилберт 1925. приметио да, имајући у виду дискретизацију природе у квантној механици, природне науке могу напослетку да тврде да има само коначно много конкретних ентитета. Но, чини се да би нам требало бесконачно много њих који би играли улогу природних бројева — заборавимо на реалне бројеве на тренутак. Где номиналиста налази тражену колекцију конкретних ентитета? Друго, чак и ако се претпостави егзистенција бесконачно много конкретних објеката, није уопште јасно да се чак и елементарне математичке теорије могу симулирати помоћу номиналистичких релација.

Хартри Филд (1980) је учинио озбиљан покушај да изведе номиналистичку реконструкцију Њутнове механике. Основа идеја је ова. Филд је желео да користи конкретне сурогате за реалне бројеве и функције на њима. Заузео је реалистички став ка просторном континууму и сматрао области простора за физички реалне као што су то столице и столови. И узео је да те области буду конкретне (уосталом, оне су лоциране у простору). Ако рачунамо и веома неповезане, онда имамо онолико области Њутновог простора као што има подскупова скупа реалних бројева. И онда има довољно конкретних ентитета да играју улогу природних бројева, реалних бројева и функција на реалним бројевима. А то је довољно за формулацију Њутнове механике. Наравно, било би још више интересантно имати номиналистичку реконструкцију још савременије научне теорије попут квантне механике. Али, с обзиром да се пројекат може извести за Њутнову механику, одређени степен почетног оптимизма је оправдан.



Слика 56: Филд

Јасно је да овај пројекат има своја ограничења. Може бити могуће номиналистички интерпретирати просторе функција на реалним бројевима, али је превише очекивати да ће се на тај начин наћи номиналистичка интерпретација теорије скупова. Ипак, ако је успешан унутар својих ограничења, онда Филдов програм ипак нешто постиже.

Пошто би то значило да су, бар у неком обиму, (апстрактни) математички ентитети необавезни. То би био значајан корак ка подривању аргумента неизоставности за Квајнов скромни платонизам у математици.

Филдова стратегија има шансе само ако Хилбертов страх да у фундаменталном смислу наше најбоље научне теорије имплицирају да постоји само коначно много конкретних ентитета, није основан. Ако неко има разумевања за Хилбертову забринутост, али не верује у постојање апстрактних ентитета, онда може тврдити да има само коначно много математичких ентитета, дакле оповргавајући основне принципе елементарне аритметике. Ово доводи до позиције која је позната као УЛТРА-ФИНИТИЗАМ.

У већини приказа, ултра-финитизам доводи, као и интуиционизам, до ревизионизма у математици. Пошто се чини да би онда морало бити прихваћено, на пример, постојање највећег природног броја.

Гледано са стране, теорија која постулира само коначан математички универзум чини се теоријски слабом са аспекта налажења доказа и стога је вероватно конзистентна. Али Вудин (2011) је развио аргумент који наводно показује да, из ултра-финитистичке перспективе, нема основа да се тврди да је ова теорија вероватно конзистентна.

Без обзира на Вудинов аргумент, многим је већ тврдња да постоји највећи број претешка да је 'прогутају'.

4.4 In re структурализам

Филдова физикална интерпретација аритметике и анализе не само да подрива Квајн-Патнамов аргумент неизоставности него и делимично даје одговор на Бенасерафов епистемолошки изазов. Наравно, није лак задатак објаснити како људи добијају сазнања о просторно-временским регионима. Али су ипак, по мишљењу већине филозофа ти региони реални. Тако да не морамо више да објашњавамо како математичари од крви и меса остају у контакту са нефизичким ентитетима. Али Бенасерафов проблем идентификације остаје. Можемо се запитати зашто баш нека тачка простор-времена или његов регион, а не неки други, играју улогу броја π , на пример.

Чини се да је привлачно у одговору на проблем идентификације комбиновати структуралистички приступ са Филдовим номинализмом. То води ка верзији НОМИНАЛИСТИЧКОГ СТРУКТУРАЛИЗМА који се може овако скицирати. Фокусирајмо се на математичку анализу. Номиналистички структуралист одриче да је неки конкретан физички систем јединствена планирана интерпретација анализе. Сви конкретни физички системи који задовољавају основне принципе реалне анализе (RA) би исто тако добро могли да се искористе. Тако да је садржај реченице ϕ језика анализе грубо дат са:

У сваком конкретном систему S у коме је RA тачно, тачно је и ϕ .

Ово повлачи да су, као и у *ante rem* структурализму, само структурни аспекти релеватни за истину или лажност математичких твђења. Али, за разлику од *anti rem* структурализма, ниједна апстрактна структура није постулирана изнад и изван конкретних система.

По *in rebus* (краће: *in re*) (*у ствари*) структурализму, нема апстрактних структура изнад система који их остварују; структуре постоје само у системима који их остварују. Због овог разлога, *in re* структурализам се понекад описује и као „структурализам без структура”. Номиналистички структурализам је облик *in re* структурализма, али то није његов једини облик. Чак се и верзије платонизма које сматрају да се математика заправо бави структурама у теоретско-скуповном смислу речи, могу видети као облици *in re* структурализма.

У математичком разговору на неалгебарске објекте (као што су природни бројеви) и математичке објекте (као што је број 1) позивамо се помоћу тачно одређених описа. То јако сугерише да математички симболи ($\mathbb{N}, 1$) имају јединствену референцу а не „подељену” као што би то желео *in re* структурализам. Али *in re* структуралисти аргументују да такви математички симболи функционишу као посвећене променљиве као што се у обичном говору користи неко одређено име за слоган који се користи у општој ситуацији.

Ако је Хилбертова брига основана, у смислу да нема конкретних физичких система, који чине постулате математичке анализе тачним, онда горње преношење садржаја реченице језика анализе од стране номиналистичког структуралисте погрешно даје услове истинитости таквих реченица. Наиме, тада би за *сваку* универзално квантификовану реченицу ϕ њена парафраза била празно (безсадржајно) истинита. Тако да је егзистенцијална претпоставка у смислу да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за RA потребна да би се подржала горња анализа садржаја математичких твђења. Можда би у ту сврху могло да послужи нешто попут Филдове конструкције.

Патнам је рано (1967) приметио да ако се горње објашњење садржаја математичких реченица донекле измени, суштински слабија основна претпоставка је довољна за добијање коректних истинитосних услова. Он је предложио следећу условну изведбу садржаја реченице у језику анализе:

Обавезно, у сваком конкретном систему S у коме је RA тачно, тачно је и ϕ .

Ово је јаче твђење него што је претходна неусловна изведба била. Али чини се да је подједнако уверљива. И предност ове интерпретације је да је следећа условна егзистенцијална основна претпоставка довољна да учини истинитосне услове за математичка твђења исправним:

Могуће је да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за RA .

(„Могуће је” овде значи „Јесте, или је био случај да је”.) Чини се да је тако Хилбертовој забринутости адекватно посвећена пажња. Пошто по Патнамовом приступу, истинитост математичких реченица не зависи више од физичких претпоставки о стварном свету.

Наравно, није лако дати задољавајућу причу како знамо да је ова условна егзистенцијална претпоставка испуњена. Али, можемо се надати да је задатак ипак лакши од задатка да се објасни како успевамо да сазнајемо чињенице о апстрактним ентитетима. И не треба заборавити да структуралистички аспект ове (условне) номиналистичке позиције, успева да контролише Бенасерафов проблем идентификације.

Патнамова стратегија такође има своја ограничења. У случају примене те стратегије на теорију скупова, груба верзија условне претпоставке је:

Могуће је да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за ZFC.

Парсонс (1990) је приметио да када су потребни светови који садрже колекције физичких ентитета који имају велике бесконачне кардиналности или су чак толико велики да уопште имају кардинални број, постаје тешко да се они виде као могући конкретни физички системи. Не чини се да има разлога да верујемо да постоји физички светови који садрже „веома бесконачно много” ентитета.

4.5 Фикционализам

На основу претходних предлога, тврђења обичне математике су истинита када се погодно интерпретирају. Номиналистички приказ математике, који ће сада бити дискутован сматра да су сва егзистенцијална математичка тврђења лажна просто зато што не постоје математички ентитети (из истих разлога ће сва универзална математичка тврђења бити тачна).

Фикционализам сматра да су математичке теорије као измишљене приче попут бајки и романа. Математичке теорије описују измишљене ентитете, на исти начин на који литература описује измишљене ликове. Ова позиција је најпре уобличена 1989. и последњих година добија на популарности.

Овај груби опис фикционалистичке позиције непосредно отвара питање каква су врста ентитета измишљени ентитети. Чини се да је то дубоко метафизички онтолошки проблем. Један начин да се ово питање у потпуности избегне је да се тврди да не постоје измишљени ентитети. Математичке теорије треба да буду виђене као позиви за учешће у играма у којима се правимо да неки математички ентитети постоје.

У сваком случају, као што је речено, по фикционалистичком гледишту, математичка теорија није буквално истинита. Без обзира на то, математика се користи да се дође до истине. Тако да морамо да одузмемо нешто из онога што је буквално речено када говоримо о физичкој теорији која укључује математику, ако желимо да дођемо до истине. Али то захтева теорију о томе како то одузимање садржаја функционише. Таква теорија је развијена од стране Јабла 2014.

Ако је фикционалистичка теза исправна, тада је један од захтева који се мора поставити на математичке теорије, сигурно тај да оне морају бити конзистентне. Филд додаје и други захтев: математика мора бити 'конзервативна' у односу на природне науке. То, грубо говорећи, значи да кад год се тврђење емпиријске теорије може извести из математике, мора, у принципу, бити могуће извести га без коришћења ма које математичке теорије. Ако то не би био случај, тада би аргумент неизоставности могао бити искоришћен против фикционализма. Да ли је математика заиста конзервативна у односу на физику је тренутно контроверзно питање. Шапиро је 1983. формулисао аргумент некомплетности који би требало да оспори Филдову тврдњу.

Ако заисте не постоје математички (измишљени) ентитети, као што тврди једна форма фикционализма, онда се Бенасерафов епистемолошки проблем и не појављује. Фикционализам стога дели предност над већином варијанти платонизма са номиналистичком реконструкцијом математике. Али позивање на претварања повлачи то да се логичка форма математичких реченица разликује понешто од њеног површног облика. Ако постоје измишљени објекти, онда се за ту форму може узети да је истог облика како и изгледа. Али, ако постоје апстрактни ентитети, Бенасерафов епистемолошки проблем се појављује.

Да ли је Бенасерафов проблем идентификације решен или није, није сасвим јасно. Генерално, фикционализам је нередукционистички приказ математике. Да ли је ентитет у једној математичкој теорији идентичан ентитету који се појављује у другој теорији се обично оставља неодређеним. Но, Бургес је 2014. исправно истакао да се математика ипак разликује од литературе у томе што су литерарни ликови обично ограничени на једно дело, док се исти математички ентитети појављују у различитим математичким теоријама. Уосталом, ентитети са истим именом (попут π) појављују се у различитим теоријама. Можда фикционалиста може да сматра да када математичар развија нову теорију у којој се „старији” математички ентитет појављује, онда ће тај ентитет бити више прецизиран. Одређенија својства му се придају него раније и то је у реду док се задржава пуна конзистентност.

Стандардна примедба формализму је такође погодна и за фикционализам. Фикционалисти морају да нађу неко објашњење чињенице да се проширивање математичке теорије на један начин, често сматра више задовољавајућим него на други начин, који је неспојив са првим. Често постоји бар привид да постоји прави начин да се математичка теорија прошири.