

Алгебра 3 - вежбе

Далибор Даниловић

21. мај 2024.

1. Решити једначину $x^3 - 6x + 9 = 0$ над пољем реалних бројева.
2. Решити једначину $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$ над пољем реалних бројева.
3. Решити једначину $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = 0$ над пољем реалних бројева.
4. Решити једначину $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ над пољем реалних бројева.
5. Нека је

$$\alpha = \sqrt[3]{4 + \sqrt{8}} - \sqrt[3]{4 - \sqrt{8}}.$$

- 1) Одредити кубну једначину са рационалним коефицијентима чије је α једно решење.
- 2) Одредити остала решења те једначине.

6. Нека је

$$\alpha = \sqrt[5]{2 + \sqrt{3}} - \sqrt[5]{2 - \sqrt{3}}.$$

- 1) Одредити једначину петог степена са рационалним коефицијентима чије је α једно решење.
- 2) Одредити остала решења те једначине.

7. Одредити сва решења једначине $x^n - a = 0$ где $a \in \mathbb{C}$.

8. Изразити број $a = \cos(15^\circ)$ алгебарски помоћу корена.

9. Пронаћи полином четвртог степена чија је једна нула $e^{\frac{2\pi i}{10}}$. Изразити затим $\cos\left(\frac{2\pi}{10}\right)$ помоћу корена па закључити да је правилан петоугао конструктибилан.

10. Испитати да ли је могуће конструисати угао од $3'$.

11. Нека су m, n узајамно прости природни бројеви. Ако су конструктибилни правилан m -угао и правилан n -угао, показати да је и правилан mn -угао конструктибилан. Закључити да је правилан 15-угао конструктибилан.

12. Нека је α угао за који је $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}$. Показати да се угао α лењиром и шестаром не може поделити на пет једнаких делова.

13. Показати да не могу све нуле полинома $p(X) = X^4 + 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ бити конструктибилне.

14. Нека је K поље такво да је $a^4 = a$ за све $a \in K$. Одредити карактеристику тог поља.

15. Нека је K поље карактеристике p . Показати да је

$$K^p = \{x^p \mid x \in K\}$$

потпоље поља K .

16. Нека је K поље чија карактеристика није два. Показати да је свако квадратно раширење облика $K(\sqrt{a})$ за $a \in K$. Ако су још $a, b \in K$ такви да \sqrt{a}, \sqrt{b} не припадају K , показати да је $K(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = K(\sqrt{a + \sqrt{b}})$.

17. Одредити примитивни елемент раширења $K = \mathbb{Z}_7(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ поља \mathbb{Z}_7 .
18. Испитати која су од следећих раширења нормална и за она која нису, одредити им нормално затворење.
- 1) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), F = \mathbb{Q}$;
 - 2) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}), F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
 - 3) $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i), F = \mathbb{Q}$;
 - 4) $E = \mathbb{F}_3(X), F = \mathbb{F}_3(X^2)$;
 - 5) $E = \mathbb{Q}(X), F = \mathbb{Q}(X^3)$;
 - 6) $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}), F = \mathbb{Q}$.
19. Ако су раширења L/E и E/F нормална, испитати да ли је нормално и раширење L/F .
20. Нека је L/F раширење поља и нека су $F \subseteq E_1, E_2 \subseteq L$ међураширења. Ако су раширења E_1/F и E_2/F нормална, показати да су то и раширења $E_1 \cap E_2/F$ и E_1E_2/F .
21. Показати да полином $p(X) = X^6 - 2tX^3 + t \in \mathbb{F}_3(t)[X]$ није сепарабилан.
22. Нека је F поље коначне карактеристике p и E/F коначно раширење. Показати да је $\alpha \in E$ сепарабилан над F ако и само ако је $K(\alpha) = K(\alpha^p)$.
23. Нека је E/F раширење. Показати да је скуп E_s сепарабилних елемената над F једно поље.
24. Нека је L/F раширење поља и нека су $F \subseteq E_1, E_2 \subseteq L$ међураширења. Ако су раширења E_1/F и E_2/F сепарабилна, показати да су то и раширења $E_1 \cap E_2/F$ и E_1E_2/F .
25. Одредити примитивни елемент раширења $E = \mathbb{R}(X, Y)$ над $F = \mathbb{R}(X^2, Y^2)$.
26. Показати да раширење $E = \mathbb{F}_2(X, Y)$ поља $F = \mathbb{F}_2(X^2, Y^2)$ нема примитивни елемент.
27. Нека је E раширење поља F карактеристике p . Показати да за сваки елемент $\alpha \in E$ постоји неки број r такав да је елемент α^{p^r} сепарабилан над F .
28. Нека је E коренско поље полинома $f(X) = (X^4 - 1)(X^2 - 5)$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}(E/F)$ и потпуну Галуаову кореспонденцију.
29. Нека је $E = \mathbb{R}(X)$ и $F = \mathbb{R}(X^2 + \frac{1}{X^2})$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}(E/F)$ и потпуну Галуаову кореспонденцију.
30. Нека је E коренско поље полинома $f(X) = X^3 - 2$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}(E/F)$ и потпуну Галуаову кореспонденцију.
31. Нека је E коренско поље полинома $f(X) = X^7 - 1$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}(E/F)$ и потпуну Галуаову кореспонденцију.
32. Нека је E коренско поље полинома $f(X) = X^5 - 2$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}(E/F)$ и потпуну Галуаову кореспонденцију.
33. Нека је E коренско поље полинома $f(X) = X^6 + 3$ над $F = \mathbb{Q}$. Показати да је раширење E/F Галуаово и одредити Галуаову групу $\mathcal{G}(E/F)$.
34. Нека је E коренско поље полинома $f(X) = X^7 - 2$ над $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}(E/F)$ и потпуну Галуаову кореспонденцију.
35. Нека је E коренско поље полинома $f(X) = X^7 - 2$ над $F = \mathbb{Q}(\cos(\frac{2\pi}{7}))$. Показати да је раширење E/F Галуаово, одредити Галуаову групу $\mathcal{G}(E/F)$ и потпуну Галуаову кореспонденцију.

36. Показати да је раширење $E = \mathbb{Q} \left(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{(2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{3})} \right)$ Галуаово над \mathbb{Q} и показати да је Галуаова група $\mathcal{G}(E/\mathbb{Q})$ изоморфна кватернионској групи.
37. Нека је $f(X) = X^p - X + k \in \mathbb{F}_p^n$ за прост број p . Показати да је f нерастављив ако и само ако нема нулу у \mathbb{F}_p^n . Показати затим да је полином $f(X) = X^p - X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ нерастављив.
38. Посматрајмо полином $f(X) = X^p - a \in \mathbb{Q}[X]$ који нема нулу у \mathbb{Q} . Нека је E коренско поље полинома f . Показати да је $[E : \mathbb{Q}] = p(p-1)$. Потом показати да је Галуаова група $\mathcal{G}(E/\mathbb{Q})$ изоморфна афиној групи

$$\text{Aff}_2(\mathbb{F}_p) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

39. Показати да је полином $f(X) = X^4 + 1$ нерастављив над $\mathbb{Z}[X]$ али да је растављив над коначним пољем \mathbb{F}_p за сваки прост број p .
40. Одредити Галуаову групу коренског поља полинома $f(X) = X^8 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.
41. Нека је $f \in \mathbb{Q}[X]$ нерастављив полином. Ако f има једну реалну и једну чисто комплексну нулу, показати да Галуаова група $\mathcal{G}(E/\mathbb{Q})$ његовог коренског поља E није Абелова група.
42. Нека је $\Phi_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ n -ти циклотимични полином. Показати наредна тврђења.

- 1) Ако је $n = p$ прост број и $r \geq 1$, тада је

$$\Phi_{p^r}(X) = \Phi_p(X^{p^{r-1}}).$$

- 2) Ако је n непаран број, тада је

$$\Phi_{2n}(X) = \Phi_n(-X).$$

- 3) Ако је p прост број који не дели n , тада је

$$\Phi_n(X^p) = \Phi_{pn}(X) \Phi_n(X).$$

- 4) Ако је p прост број који дели n , тада је

$$\Phi_{pn}(X) = \Phi_n(X^p).$$

- 5) За број $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ задат простом факторизацијом, дефинишемо $r(n) = p_1 \cdots p_r$. Ако је $n > 1$, тада је

$$\Phi_n(X) = \Phi_{r(n)} \left(X^{\frac{n}{r(n)}} \right)$$

па закључити да је

$$\Phi_n(X) = \Phi_{r(n)} \left(X^{p_1^{\alpha_1-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1}} \right).$$

- 6) Ако су $r, s > 1$ узајамно прости бројеви, тада је

$$\Phi_{rs}(X) = \prod_{d|rs} (\Phi_s(X^d))^{\mu\left(\frac{rs}{d}\right)}.$$

43. Нека је $p > 2$ прост број. Означимо са $\xi \in \mathbb{C}$ примитивни p -ти корен из јединице. Галуаово раширење $E = \mathbb{Q}(\xi)$ има Галуаову групу $G = \mathcal{G}(E/\mathbb{Q})$ изоморфну цикличној групи \mathbb{Z}_{p-1} . Означимо са H јединствену подгрупу индекса два групе G . Одредити фиксно поље $K = E^H$.
44. Показати да је свако квадратно раширење поља \mathbb{Q} садржано у неком циклотомичном раширењу.
45. Посматрајмо елемент $\alpha = \xi + \xi^2 \in \mathbb{Q}(\xi)$ где је ξ примитивни тринаести корен из јединице. Одредити степен минималног полинома елемента α над \mathbb{Q} .

46. Нека су $E_1/F, E_2/F$ коначна Галуаова раширења. Показати да су тада и раширења E_1E_2/F и $E_1 \cap E_2/F$ Галуаова. Ако је додатно група $\mathcal{G}(E_1 \cap E_2/F)$ Абелова, показати да је наредни низ кратак тачан низ група и хомоморфизама

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}(E_1E_2/F) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{G}(E_1/F) \times \mathcal{G}(E_2/F) \xrightarrow{D} \mathcal{G}(E_1 \cap E_2/F) \longrightarrow 0$$

где су $\Delta(\phi) = (\phi|_{E_1}, \phi|_{E_2})$ дијагонала и $D(\phi, \psi) = \phi|_{E_1 \cap E_2} \circ (\psi|_{E_1 \cap E_2})^{-1}$ разлика.

47. Нека су за бројеве $m, n > 1$ означени $d = \text{НЗД}(m, n)$ и $s = \text{НЗС}(m, n)$. Показати да важи $\mathbb{Q}(\xi_m, \xi_n) = \mathbb{Q}(\xi_s)$ и $\mathbb{Q}(\xi_m) \cap \mathbb{Q}(\xi_n) = \mathbb{Q}(\xi_d)$.
48. 1) Нека су d, n позитивни цели такви да $d \mid n$. Ако је p прост број такав да $p \mid \Phi_n(x)$ и $p \mid \Phi_d(x)$ за цео број x , показати да тада $p \mid n$.
- 2) Показати да је $\Phi_n(0) = 1$ за $n > 1$.
- 3) Нека је p прост број такав да $p \mid \Phi_n(x)$ за цео број x . Показати да тада важи $p \mid n$ или $p \equiv 1 \pmod{n}$.
- 4) Нека је $n > 1$ цео број. Показати да постоји бесконачно много простих бројева p за које је $p \equiv 1 \pmod{n}$.
49. 1) Показати да за коначну Абелову групу G постоји број n такав да постоји сурјективни хомоморфизам $(\mathbb{Z}_n)^* \rightarrow G$.
- 2) Показати да за коначну Абелову групу G постоји Галуаово раширење L/\mathbb{Q} за које је $\mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) \cong G$.
50. Нека је p прост број и $\xi = \xi_p \in \mathbb{C}$. Означимо $L = \mathbb{Q}(\xi)$ и $G = \mathcal{G}(L/\mathbb{Q})$. Нека је $G = \langle \phi \rangle$ генератор групе G која је реда $p-1$ који је јединствено одређен са $\phi(\xi) = \xi^k$. За делилац $d \mid p-1$ нека је $p-1 = dm$. Подгрупа $G_d = \langle \phi^m \rangle$ је јединствена подгрупа реда d групе G . Ако је

$$\theta_d = \sum_{\psi \in G_d} \psi(\xi) = \xi + \phi^m(\xi) + \dots + \phi^{(d-1)m}(\xi)$$

показати да важи $L^{G_d} = \mathbb{Q}(\theta_d)$.

51. Нека је $\xi = e^{\frac{2\pi i}{17}}$, $L = \mathbb{Q}(\xi)$, $G = \mathcal{G}(L/\mathbb{Q}) = \langle \phi \rangle$. Описати Гаусове периоде $\theta_2, \theta_4, \theta_8$.
52. Нека је $n > 1$. Одредити максимално реално међураширење циклотомичног раширења $\mathbb{Q}(\xi_n)/\mathbb{Q}$.
53. Показати да је

$$\left[\mathbb{Q} \left(\sin \frac{2\pi}{n} \right) : \mathbb{Q} \right] = \begin{cases} \varphi(n), & 4 \nmid n \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & n \equiv 0 \pmod{8} \\ \frac{\varphi(n)}{4}, & n \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

54. Показати да је

$$\left[\mathbb{Q} \left(\text{tg} \frac{2\pi}{n} \right) : \mathbb{Q} \right] = \begin{cases} \varphi(n), & 4 \nmid n \\ \frac{\varphi(n)}{4}, & n \equiv 0 \pmod{8} \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & n \equiv 4 \pmod{8} \end{cases}$$

55. Одредити нормалну базу за свако од следећих раширења L/K .

- 1) $L = \mathbb{Q}(i), K = \mathbb{Q}$
- 2) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), K = \mathbb{Q}$
- 3) $L = \mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{5}}\right), K = \mathbb{Q}$.

56. Ако је $v \in L$ нормалан вектор Галуаовог раширења L/K , показати да је то и примитивни елемент. Показати да не важи обрнуто.

57. Нека је L/K раширење степена два. Показати да је $\alpha \in L$ нормалан вектор ако и само ако важи да $\alpha \notin K$ и $\text{Tr}(\alpha) \neq 0$.
58. Нека је L/K Галуаово раширење степена три, потпоља од \mathbb{R} . Показати да је $\alpha \in L$ нормалан вектор ако и само ако важи да $\alpha \notin K$ и $\text{Tr}(\alpha) \neq 0$.
59. Одредити сва целобројна решења једначине $X^2 + Y^2 = Z^2$.
60. Одредити сва целобројна решења једначине $X^2 - 3Y^2 = Z^2$.
61. Изразити полином $f = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3)$ преко елементарних симетричних полинома.
62. Изразити полином $X_1^3 + \dots + X_n^3$ преко елементарних симетричних полинома.
63. Нека је $p_k = X_1^k + \dots + X_n^k$. Показати да важе Њутнови идентитети

$$p_k - e_1 p_{k-1} + \dots \pm p_1 e_{k-1} \mp k e_k = 0$$

за све $n, k \geq 1$. Закључити да полиноми p_1, \dots, p_n генеришу прстен симетричних полинома.

64. Одредити дискриминанту полинома $f(X) = X^n + sX + t$.
65. Нека је p прост број. Испитати решивост једначине $X^5 + p^2X - p = 0$ у радикалима над \mathbb{Q} .
66. Испитати решивост једначине $X^5 - X + 1 = 0$ у радикалима над \mathbb{Q} .
67. Испитати решивост једначине $X^7 - 10X^5 + 15X + 5 = 0$ у радикалима над \mathbb{Q} .