# ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА АЛГЕБРЕ И МАТЕМАТИЧКЕ ЛОГИКЕ

## ПРЕДАВАЊА

### ЗОРАН ПЕТРОВИЋ

## АКАДЕМСКА 2024/25 ГОДИНА

# 1 Прстени

У овом одељку, материјал ће нам углавном бити познат из претходних алгебарских курсева, али биће и понешто ново, или другачије описано.

За почетак имамо дефиницију прстена са јединицом, која нам је позната.

**Дефиниција 1.** Прстен са јединицом је уређена четворка $(R, +, \cdot, 1_R)$ за коју важи следеће.

1. $(R, +)$ је Абелова група.
2. $(R, \cdot, 1_R)$ је моноид.
3. За све $a, b, c, d \in R$: $(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.

Ако са $0_R$ означимо неутрал у Абеловој групи $(R, +)$, онда, стављајући $a = b = c = d = 0_R$ у горњем услову, добијамо једнакост:

$$(0_R + 0_R) \cdot (0_R + 0_R) = 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R.$$

Како је $0_R + 0_R = 0_R$, онда имамо једнакост

$$0_R \cdot 0_R = 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R, \tag{1}$$

из чега следи

$$0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R = 0_R. \tag{2}$$

Уколико узмемо произвољно $a \in R$, а ставимо да је $b = c = d = 0_R$, имамо да је

$$(a + 0_R) \cdot (0_R + 0_R) = a \cdot 0_R + a \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R,$$

те је
$$a \cdot 0_R = a \cdot 0_R + a \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R + 0_R \cdot 0_R.$$
Додавањем на обе стране $0_R \cdot 0_R$, и коришћењем једнакости (2) добијамо
$$0_R \cdot 0_R = a \cdot 0_R,$$
за свако $a \in R$. Но, како је $(R, \cdot, 1_R)$ моноид, имамо да је
$$0_R = 1_R \cdot 0_R = 0_R \cdot 0_R = a \cdot 0_R,$$
за свако $a \in R$. Наравно, читаоци могу да потраже и краћи доказ ове познате им чињенице. Уколико је $1_R = 0_R$, добија се да је $R = \{0_R\}$. Такав прстен се назива нула прстен и ми га нећемо сматрати за прстен са јединицом. Стога увек претпостављамо да је $1_R \neq 0_R$.

За вежбу изведите и једнакости $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ и $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Даље ћемо писати само 1, односно 0 ако се зна о ком прстену је реч. Прстен је комутативан уколико је таква операција множења. Уместо $a \cdot b$ писаћемо само $ab$. Генерално, за сваки прстен $(R, +, \cdot, 1_R)$ можемо посматрати и његов ОПОЗИТНИ прстен $(R^{\mathrm{op}}, +^{\mathrm{op}}, \cdot^{\mathrm{op}}, 1_{R^{\mathrm{op}}})$, где је $R^{\mathrm{op}} = R$, $+^{\mathrm{op}} = +$, $1_{R^{\mathrm{op}}} = 1_R$, док је, за све $a, b \in R$: $a \cdot^{\mathrm{op}} b = b \cdot a$. Уколико је $R$ комутативан прстен, онда је то исти прстен.

Наведимо неке примере прстена.

**Пример 2.** Ако је $A$ Абелова група, са $\mathrm{End}(A)$ означавамо скуп свих ендоморфизама ове групе, тј. скуп свих хомоморфизама $f\colon A \to A$. Тада је $(\mathrm{End}(A), +, \circ, \mathrm{id}_A)$ прстен са јединицом, при чему је множење операција композиције ендоморфизама, а збир ендоморфизама $f$ и $g$ дефинисан је са: за $a \in A$ је $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$. Ако су $f, g, h, k \in \mathrm{End}(A)$ и $a \in A$, имамо да је
$$\begin{aligned}
&((f+g)\circ(h+k))(a) = (f+g)((h+k)(a)) = (f+g)(h(a)+k(a)) \\
&= f(h(a)+k(a)) + g(h(a)+k(a)) = f(h(a)) + f(k(a)) + g(h(a)) + g(k(a)) \\
&= (f\circ h)(a) + (f\circ k)(a) + (g\circ h)(a) + (g\circ k)(a) = (f\circ h + f\circ k + g\circ h + g\circ k)(a),
\end{aligned}$$
те је заиста $(f+g)\circ(h+k) = f\circ h + f\circ k + g\circ h + g\circ k$. Остала својства су јасна. ♣

**Пример 3.** Нека је $R$ прстен са јединицом, а $G$ група. ГРУПНИ ПРСТЕН $(RG, +, \cdot, 1_{RG})$ дефинишемо на следећи начин.
$$RG := \{r\colon G \to R : r(g) \neq 0 \text{ само за коначно много } g \in G\}.$$
Ако су $r, s \in RG$ и $g \in G$, онда је:
$$(r+s)(g) := r(g) + s(g), \quad (r \cdot s)(g) := \sum_{hk=g} r(h)s(k).$$

Погодније је, у овом случају, уместо $r(g)$ писати $r_g$. Тада имамо:

$$(r+s)_g := r_g + s_g, \quad (r\cdot s)_g := \sum_{hk=g} r_h s_k.$$

Јединица прстена $RG$ је функција $1_{RG}$ задата са:

$$1_{RG}(g) = \begin{cases} 1_R, & g = e \\ 0_R, & g \neq e, \end{cases}$$

где је $e$ неутрал групе $G$. Уобичајено је писати елемент $r$ из $RG$ у облику формалне суме $r = \sum_{g\in G} r_g g$, где $r_g \in R$, при чему је $r_g \neq 0$, само за коначно много $g \in G$ (уколико је $G$ коначна група, овај услов је наравно непотребан). У овом запису сабирање и множење изгледа овако:

$$\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} s_g g = \sum_{g\in G} (r_g + s_g) g,$$

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big)\cdot\Big(\sum_{g\in G} s_g g\Big) &= \Big(\sum_{h\in G} r_h h\Big)\cdot\Big(\sum_{k\in G} s_k k\Big)\\ &= \sum_{h,k\in G} r_h s_k hk = \sum_{g\in G}\Big(\sum_{\substack{h,k\in G\\ hk=g}} r_h s_k\Big) g.\end{aligned}$$

♣

**Пример 4.** Уколико је $R$ прстен са јединицом, можемо посматрати и скуп $M_n(R)$, свих квадратних матрица над $R$ реда $n \geqslant 1$ са уобичајеним операцијама сабирања и множења (није никакав проблем што прстен $R$ није нужно комутативан). ♣

Подсетимо се да је прави делитељ нуле у прстену $R$ елемент $a \neq 0$ за који постоји $b \neq 0$ такав да је $a \cdot b = 0$. Комутативан прстен са јединицом је домен, ако у њему нема правих делитеља нуле. Елемент $a \in R$ је инвертибилан, ако постоји $b \in R$ такав да је $a \cdot b = 1$. Скуп инвертибилних елемената прстена $R$ означавамо са $U(R)$; ово је наравно група. Прстен са јединицом је прстен са дељењем (или тело), ако је у њему сваки елемент различит од нуле инвертибилан. Комутативан прстен са дељењем је поље.

**Дефиниција 5.** Нека су $(R, +^R, \cdot^R, 1_R)$ и $(S, +^S, \cdot^S, 1_S)$ прстени са јединицом такви да је $S \subseteq R$, $1_R = 1_S$ и за све $s_1, s_2 \in S$ важи:

$$s_1 +^S s_2 = s_1 +^R s_2, \quad s_1 \cdot^S s_2 = s_1 \cdot^R s_2.$$

Тада за прстен $S$ кажемо да је један потпрстен са јединицом прстена $R$.

Ни појам хомоморфизма нам није стран.

**Дефиниција 6.** Нека су $(R, +^R, \cdot^R, 1_R)$ и $(S, +^S, \cdot^S, 1_S)$ прстени са јединицом и $\phi\colon R \to S$. Тада је $\phi$ хомоморфизам прстена са јединицом уколико важи следеће.

1. $(\forall a, b \in R)\phi(a +^R b) = \phi(a) +^S \phi(b)$
2. $(\forall a, b \in R)\phi(a \cdot^R b) = \phi(a) \cdot^S \phi(b)$
3. $\phi(1_R) = 1_S$.

Уколико је $\phi$ бијекција, кажемо да је $\phi$ изоморфизам.

Наравно, често ћемо због једноставности сабирање и у $R$ и у $S$ означавати само са $+$; слично и за множење. Језгро хомоморфизма $\phi$, у ознаци $\operatorname{Ker}\phi$ је скуп свих елемената из $R$ који се са $\phi$ сликају у 0 у $S$. Приметимо да тада за сваки $x \in \operatorname{Ker}\phi$ и сваки $r \in R$ имамо да важи:

$$\phi(r \cdot x) = \phi(r) \cdot \phi(x) = \phi(r) \cdot 0 = 0, \quad \phi(x \cdot r) = \phi(x) \cdot \phi(r) = 0 \cdot \phi(r) = 0.$$

Такође, за све $x, y \in \operatorname{Ker}\phi$: $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = 0 + 0 = 0$, па $x + y \in \operatorname{Ker}\phi$.

**Дефиниција 7.** Нека је $(R, +, \cdot, 1)$ прстен са јединицом и $(I, +) \leqslant (R, +)$, Тада је

- $I$ леви идеал у прстену $R$ уколико за све $r \in R$ и све $x \in I$: $r \cdot x \in I$;
- $I$ десни идеал у прстену $R$ уколико за све $r \in R$ и све $x \in I$: $x \cdot r \in I$;
- $I$ двострани идеал у прстену $R$ уколико је и и леви и десни идеал у $R$.

Дакле, $\operatorname{Ker}\phi$ је један двострани идеал за сваки хомоморфизам $\phi$.

Када имамо двострани идеал $I$ можемо формирати количнички прстен по том идеалу. Приметимо најпре да, ако су $r, s \in R$ и $x, y \in I$, онда имамо

$$(a + x) \cdot (b + y) - a \cdot b = a \cdot b + a \cdot y + x \cdot b + x \cdot y - a \cdot b = a \cdot y + x \cdot b + x \cdot y \in I,$$

јер је $I$ двострани идеал.

**Дефиниција 8.** Нека је $(R, +, \cdot, 1)$ прстен са јединицом и $I$ један двострани идеал у $R$. Ако је $R/I = \{a + I : a \in R\}$ леви косет простор Абелове групе $(R, +)$ по подгрупи $I$, онда можемо дефинисати и множење у $R/I$ са:

$$(a + I) \cdot (b + I) = a \cdot b + I.$$

Горња анализа нам показује да је ово множење добро дефинисано. Тако добијамо прстен са јединицом $(R/I, +, \cdot, 1 + I)$.

Уколико је $I$ само леви или само десни идеал, онда на овај начин не можемо добити прстен. Добијамо само одговарајући модул, али о томе ћемо причати касније.

**Став 9.** Нека је $R$ прстен са јединицом. Скуп $I \subset R$ је двострани идеал акко постоји прстен са јединицом $S$ и хомоморфизам $\phi\colon R \to S$, такав да је $I = \operatorname{Ker}\phi$. У овом случају, $\phi[R]$ је потпрстен са јединицом прстена $S$, који је изоморфан количничком прстену $R/\operatorname{Ker}\phi$.

**Доказ.** Уколико је $I$ двострани идеал, за тражени прстен $S$ можемо узети $S = R/I$, а за хомоморфизам $\phi$, функцију $\phi\colon R \to R/I$ дефинисану са $\phi(a) := a+I$. Из саме дефиниције следи да је $\phi$ хомоморфизам. Осим тога, $\phi(a) = 0 + I$ акко $a + I = I$ акко $a \in I$, па је $I = \operatorname{Ker}\phi$.

Знамо да је језгро хомоморфизма двострани идеал и остало је само да докажемо тврђење садржано у последњој реченици. Имамо да је $1_S = \phi(1_R) \in \phi[R]$. Такође, за све $r_1, r_2 \in R$: $\phi(r_1)\cdot\phi(r_2) = \phi(r_1\cdot r_2) \in \phi[R]$ и $\phi(r_1) + \phi(r_2) = \phi(r_1 + r_2) \in \phi[R]$, те је $\phi[R]$ заиста потпрстен од $S$.

Дефинишемо $\psi\colon R/\operatorname{Ker}\phi \to \phi[R]$ са: $\psi(a + \operatorname{Ker}\phi) := \phi(a)$. Најпре, ако је $a + \operatorname{Ker}\phi = b + \operatorname{Ker}\phi$ имамо да је $a - b \in \operatorname{Ker}\phi$, па је $\phi(a-b) = 0$, те је $\phi(a) = \phi(b)$ и функција $\psi$ је добро дефинисана.

Ако су $a, b \in R$, онда имамо:

$$\begin{aligned}
\psi((a+\operatorname{Ker}\phi) + (b+\operatorname{Ker}\phi)) &= \psi(a+b+\operatorname{Ker}\phi) = \phi(a+b)\\
&= \phi(a)+\phi(b) = \psi(a+\operatorname{Ker}\phi)+\psi(b+\operatorname{Ker}\phi),\\
\psi((a+\operatorname{Ker}\phi)\cdot(b+\operatorname{Ker}\phi)) &= \psi(a\cdot b+\operatorname{Ker}\phi) = \phi(a\cdot b)\\
&= \phi(a)\cdot\phi(b) = \psi(a+\operatorname{Ker}\phi)\cdot\psi(b+\operatorname{Ker}\phi),
\end{aligned}$$

као и $\psi(1_R + \operatorname{Ker}\phi) = \phi(1_R) = 1_S$, те је $\psi$ хомоморфизам.

Из саме дефиниције $\psi$ видимо да је она „на”. Остаје само да се провери да је и „1–1”. Претпоставимо стога да је, за неке $a, b \in R$, $\psi(a + \operatorname{Ker}\phi) = \psi(b + \operatorname{Ker}\phi)$. То значи да је $\phi(a) = \phi(b)$, те $a - b \in \operatorname{Ker}\phi$ из чега следи да је $a + \operatorname{Ker}\phi = b + \operatorname{Ker}\phi$, што је и тражено. □

Следећи став се лако доказује.

**Став 10.** Пресек ма које фамилије идеала (левих, десних, или двостраних) је такође идеал.

**Дефиниција 11.** За идеал $M$ (леви, десни, двострани) прстена $R$ кажемо да је МАКСИМАЛАН, ако је $M \neq R$ и ако не постоји идеал $I$ такав да је $M \subset I \subset R$.

**Став 12.** Сваки прстен садржи максималан идеал.

**Доказ.** Доказ се изводи помоћу Цорнове леме. Рецимо да радимо са двостраним идеалима. Подсетимо се да Цорнова лема каже да, ако имамо неки парцијално уређени скуп $(P, \leqslant)$ (у даљем ПОСЕТ) и ако у њему сваки ланац (подскуп у коме су свака два елемента упоредива) има горње ограничење (мајоранту), онда у скупу постоји максимални елемент.

Дакле, нека је $R$ прстен и $\mathcal{I}$ скуп свих правих идеала (различитих од целог прстена) у овом прстену. Јасно је да је $\mathcal{I}$ посет у односу на релацију $\subseteq$. Нека је $\mathcal{L}$ ланац у $\mathcal{I}$. Покажимо да је

$$L = \bigcup_{I \in \mathcal{L}} I$$

идеал у $R$.

Најпре, ако су $x, y \in L$ имамо да $x \in I'$ и $y \in I''$ за неке $I', I'' \in \mathcal{L}$. Но, како је $\mathcal{L}$ ланац, важи да је $I' \subseteq I''$ или $I'' \subseteq I'$. У првом случају $x, y \in I''$, па и $x + y \in I''$, јер је $I''$ идеал, а у другом $x, y \in I'$, па и $x + y \in I'$, пошто је $I'$ идеал. Добијамо да $x + y \in L$.

Уколико је $x \in L$, а $r \in R$, онда $x \in I$ за неко $I \in \mathcal{L}$, па и $r \cdot x$ и $x \cdot r$ припадају $I$, јер је $I$ двострани идеал, те су оба елемента у $L$ што нам завршава доказ да је $L$ идеал.

Како је јасно да је $I \subseteq L$ за свако $I \in \mathcal{L}$, то је $L$ горње ограничење за $\mathcal{L}$, те по Цорновој леми $\mathcal{I}$ има максимални елелемент, а то је баш максимални идеал. $\square$

Ако је $R$ комутативан прстен, онда за идеал $I$ (овде се наравно леви, десни и двострани идеали поклапају) кажемо да је ПРОСТ уколико за све $a, b \in R$ важи: ако $ab \in I$ онда $a \in I$, или $b \in I$.

Следећа теорема би требало да буде позната из претходних алгебарских курсева.

**Теорема 13.** Нека је $R$ комутативни прстен.
а) Идеал $I$ је максималан акко $R/I$ је поље.
б) Идеал $I$ је прост акко $R/I$ је домен.
в) Сваки максималан идеал је прост.

Наведимо неке примере идеала.

**Пример 14.** У прстену са дељењем нема правих идеала.

**Пример 15.** Нека је $R$ прстен са јединицом, $n \geqslant 2$ и $S = M_n(R)$. Означимо типичан елемент из $S$ са $A = (a_{ij})$.
а) Ако је $1 \leqslant k \leqslant n$, онда је скуп свих $A \in S$ таквих да је $a_{ij} = 0$ за све $i \neq k$ један десни идеал у $S$.
б) Ако је $1 \leqslant k \leqslant n$, онда је скуп свих $A \in S$ таквих да је $a_{ij} = 0$ за све $j \neq k$ један леви идеал у $S$. ♣

За крај овог одељка, укажимо на једну занимљиву везу између групног прстена над $\mathbb{Z}$ и инвертибилних елемената у прстену.

**Теорема 16.** За сваку групу $G$ и прстен са јединицом $R$ постоји природна бијекција $\Phi_{G,R}$ између $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, R)$, скупа свих хомоморфизама прстена $\mathbb{Z}G$ у прстен $R$ и $\mathrm{Hom}(G, U(R))$, скупа свих хомоморфизама група $G$ у групу $U(R)$.

**Доказ.** Нека је $f\colon \mathbb{Z}G \to R$ хомоморфизам прстена. Дефинишемо хомоморфизам група $\Phi_{G,R}(f)\colon G \to U(R)$ са: $\Phi_{G,R}(f)(g) := f(g)$. Наиме, сваки елемент групе $G$ посматран као елемент групног прстена $\mathbb{Z}G$ је инвертибилан у том прстену – инверз му је $g^{-1}$, његов инверз у групи $G$ [1]. $\Phi_{G,R}(f)$ јесте хомоморфизам група: $\Phi_{G,R}(f)(g_1g_2) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$(јер је $f$ хомоморфизам прстена) $= \Phi_{G,R}(f)(g_1)\Phi_{G,R}(f)(g_2)$.

Да бисмо доказали да је $\Phi_{G,R}$ бијекција, најпогодније је наћи инверз $\Psi_{G,R}$. У ту сврху, нека је $h\colon G \to U(R)$ хомоморфизам група. Дефинишемо хомоморфизам прстена $\Psi_{G,R}(h)\colon \mathbb{Z}G \to R$ са:

$$\Psi_{G,R}(h)\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big) := \sum_{g\in G} r_g h(g).$$

Подсетимо се да су овде $r_g \in \mathbb{Z}$. Проверимо да је ово заиста хомоморфизам прстена.

$$\begin{aligned}\Psi_{G,R}(h)\Big(\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} s_g g\Big) &= \Psi_{G,R}(h)\Big(\sum_{g\in G}(r_g+s_g)g\Big) = \sum_{g\in G}(r_g+s_g)h(g)\\ &= \sum_{g\in G} r_g h(g) + \sum_{g\in G} s_g h(g) = \Psi_{G,R}(h)\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big) + \Psi_{G,R}(h)\Big(\sum_{g\in G} s_g g\Big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_{G,R}(h)\Big(\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big)\cdot\Big(\sum_{g\in G} s_g g\Big)\Big) = \Psi_{G,R}(h)\Big(\sum_{g\in G}\Big(\sum_{\substack{t,u\in G\\ tu=g}} r_t s_u\Big)g\Big)\\ &= \sum_{g\in G}\Big(\sum_{\substack{t,u\in G\\ tu=g}} r_t s_u\Big)h(g) = \sum_{g\in G}\Big(\sum_{\substack{t,u\in G\\ tu=g}} r_t s_u h(g)\Big) = \sum_{g\in G}\Big(\sum_{\substack{t,u\in G\\ tu=g}} r_t s_u h(tu)\Big)\\ &= \sum_{g\in G}\Big(\sum_{\substack{t,u\in G\\ tu=g}} r_t s_u h(t)h(u)\Big) = \sum_{t,u\in G} r_t s_u h(t)h(u) = \Big(\sum_{t\in G} r_t h(t)\Big)\Big(\sum_{u\in G} s_u h(u)\Big)\\ &= \Big(\sum_{g\in G} r_g h(g)\Big)\Big(\sum_{g\in G} s_g h(g)\Big) = \Psi_{G,R}(h)\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big)\cdot\Psi_{G,R}(h)\Big(\sum_{g\in G} s_g g\Big).\end{aligned}$$

Наравно, $\Psi_{G,R}(h)(1e) = 1h(e) = 1_R$.

Проверимо још и да су $\Phi_{G,R}$ и $\Psi_{G,R}$ инверзи један другом. Нека је $h \in \mathrm{Hom}(G, U(R))$ хомоморфизам група.

$$\Phi_{G,R}(\underbrace{\Psi_{G,R}(h)}_{f})(g) = f(g) = \Psi_{G,R}(h)(g) = h(g).$$

Дакле, $\Phi_{G,R}(\Psi_{G,R}(h)) = h$, па је $\Phi_{G,R}\circ\Psi_{G,R} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(G,U(R))}$.

[1] $g \in G$ видимо као формалну „суму” $1g$ у $\mathbb{Z}G$ (као функцију из $G$ у $\mathbb{Z}$ која $g$ слика у 1, а остале елементе у 0 – видети дефиницију групног прстена) и његов инверз је „сума” $1g^{-1}$

На сличан начин, ако је $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, R)$ имамо:

$$\begin{aligned}\Psi_{G,R}(\underbrace{\Phi_{G,R}(f)}_{h})\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big) &= \sum_{g\in G} r_g h(g)\\ &= \sum_{g\in G} r_g \Phi_{G,R}(f)(g) = \sum_{g\in G} r_g f(g) = f\Big(\sum_{g\in G} r_g g\Big),\end{aligned}$$

те је $\Psi_{G_R} \circ \Phi_{G,R} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G,R)}$.

О каквој се „природности” ради у формулацији ове теореме? Ево о чему је реч. Ако имамо и групу $G'$ и прстен $R'$, онда имамо и бијекцију $\Phi_{G',R'}$. Но, групе $G$ и $G'$, као и прстене $R$ и $R'$ можемо „повезати” хомоморфизмима $\varphi\colon G' \to G$ и $\theta\colon R \to R'$. Хомоморфизам група $\varphi$ индукује хомоморфизам прстена $\mathbb{Z}\varphi\colon \mathbb{Z}G' \to \mathbb{Z}G$:

$$\mathbb{Z}\varphi\Big(\sum_{g'\in G'} r_{g'} g'\Big) := \sum_{g'\in G'} r_{g'} \varphi(g'),$$

а хомоморфизам $\theta$ сужењем индукује хомоморфизам $U(\theta)\colon U(R) \to U(R')$: $U(\theta)(r) := \theta(r)$.

Приметимо да, ако је $G''$ још једна група и $\psi\colon G'' \to G'$ хомоморфизам група, важи једнакост $\mathbb{Z}(\varphi\circ\psi) = \mathbb{Z}\varphi \circ \mathbb{Z}\psi$, као и $\mathbb{Z}_{\mathrm{id}_G} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}G}$. Дакле, придруживање $G \mapsto \mathbb{Z}G$ задаје један ФУНКТОР из категорије група у категорију прстена са јединицом. На сличан начин, ако је $\rho\colon R' \to R''$ хомоморфизам прстена, важи једнакост $U(\rho\circ\theta) = U(\rho)\circ U(\theta)$, као и $U(\mathrm{id}_R) = \mathrm{id}_{U(R)}$. Дакле, придруживање $\theta \mapsto U(\theta)$ задаје један функтор из категорије прстена са јединицом у категорију група.

Помоћу хомоморфизама $\varphi$ и $\theta$ и ова два функтора, можемо задати пресликавања скупова $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\varphi,\theta)\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G,R) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G',R')$ и $\mathrm{Hom}(\varphi,U(\theta))\colon \mathrm{Hom}(G,U(R)) \to \mathrm{Hom}(G',U(R'))$ са:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\varphi,\theta)(f) := \theta\circ f\circ \mathbb{Z}\varphi, \quad \mathrm{Hom}(\varphi,U(\theta))(h) := U(\theta)\circ h\circ\varphi.$$

Природност о којој је реч се односи на то да одговарајући дијаграм (нацртати га) комутира, тј. да је

$$\mathrm{Hom}(\varphi,U(\theta))\circ\Phi_{G,R} = \Phi_{G',R'}\circ \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\varphi,\theta).$$

Уверимо се да је то тачно. У ту сврху, нека је $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G,R)$ и $g' \in G'$. Тада је

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}(\varphi,U(\theta))\circ\Phi_{G,R})(f)(g') &= \mathrm{Hom}(\varphi,U(\theta))(\Phi_{G,R}(f))(g')\\ &= (U(\theta)\circ\Phi_{G,R}(f)\circ\varphi)(g') = U(\theta)(\Phi_{G,R}(f)(\varphi(g')))\\ &= U(\theta)(f(\varphi(g'))) = \theta(f(\varphi(g'))) = (\theta\circ f\circ\varphi)(g'),\end{aligned}$$

те је $(\mathrm{Hom}(\varphi, U(\theta)) \circ \Phi_{G,R})(f) = \theta \circ f \circ \varphi$.

С друге стране, имамо да је

$$\begin{aligned}(\Phi_{G',R'} \circ \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\varphi, \theta))(f)(g') &= \Phi_{G',R'}(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\varphi, \theta)(f))(g') \\ &= \Phi_{G',R'}(\theta \circ f \circ \varphi)(g') = (\theta \circ f \circ \varphi)(g'),\end{aligned}$$

те је $(\Phi_{G',R'} \circ \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}\varphi, \theta))(f) = \theta \circ f \circ \varphi$. Дакле, тражена једнакост заиста важи и тиме је цео доказ завршен. $\square$

Чињеница да постоји природна (у наведеном смислу) бијекција између скупова $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}G, R)$ и $\mathrm{Hom}(G, U(R))$ се кратко изражава речима да је функтор $G \mapsto \mathbb{Z}G$ лево адјунгован функтору $R \mapsto U(R)$, но ту терминологију ћемо објаснити у наредним лекцијама. Само напоменимо овде да терминологија долази од појма адјунгованог оператора: ако је $A$ оператор на одговарајућем векторском простору и $v, w$ вектори из тог простора, онда имамо једнакост: $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle$ скаларних производа.

# 2 Модули

Почнимо дефиницијом модула над прстеном са јединицом.

**Дефиниција 17.** Нека је $R$ прстен са јединицом. Леви $R$-модул је уређени пар $(A, \rho)$,где је $A$ Абелова група, а $\rho\colon R \to \mathrm{End}(A)$. Десни $R$-модул је леви $R^{\mathrm{op}}$-модул.

Наравно, ако је прстен $R$ комутативан, не разликујемо леве и десне $R$-модуле и можемо их кратко звати $R$-модулима.

Како је, за сваки $r \in R$, слика $\rho(r)$ један ендоморфизам Абелове групе $A$, то за све $a, b \in A$ важи:

$$\rho(r)(a + b) = \rho(a) + \rho(b) \tag{3}$$

Такође, како је $\rho$ хомоморфизам прстена са јединицом $R$ у прстен са јединицом $\mathrm{End}(A)$, то је за све $r, s \in R$ испуњено: $\rho(r + s) = \rho(r) + \rho(s)$. Имајући у виду како је задата операција сабирања у прстену $\mathrm{End}(A)$ имамо да за све $a \in A$ важи:

$$\rho(r + s)(a) = \rho(r)(a) + \rho(s)(a). \tag{4}$$

Када посматрамо операцију множења, имамо да је за све $r, s \in R$ испуњено $\rho(r \cdot s) = \rho(r) \circ \rho(s)$, те за све $a \in A$ важи:

$$\rho(r \cdot s)(a) = \rho(r)(\rho(s)(a)). \tag{5}$$

Осим тога је $\rho(1_R) = \mathrm{id}_A$, тј. за све $a \in A$:

$$\rho(1_R)(a) = a. \tag{6}$$

Ако уместо $\rho(r)(a)$ пишемо $r \bullet a$, онда једнакости (3)–(6) можемо написати на следећи начин.

**M1.** За све $r \in R$, $a, b \in A$: $r \bullet (a + b) = r \bullet a + r \bullet b$.

**M2.** За све $r, s \in R$, $a \in A$: $(r + s) \bullet a = r \bullet a + s \bullet a$.

**M3.** За све $r, s \in R$, $a \in A$: $(r \cdot s) \bullet a = r \bullet (s \bullet a)$.

**M4.** За све $a \in A$: $1_R \bullet a = a$.

У случају десног $R$-модула (у даљем ћемо кратко говорити о левом и десном $R$-модулу подразумевајући да имамо „множење" елементима из $R$), имамо да је $\rho(r \cdot^{\mathrm{op}} s)(a) = (\rho(r) \circ \rho(s))(a)$, односно $\rho(s \cdot r)(a) = \rho(r)(\rho(s)(a))$. Стога је овде природно уместо $\rho(r)(a)$ писати $a \bullet r$, те имамо одговарајућу једнакост: $(a \bullet (s \cdot r)) = (a \bullet s) \bullet r$. Видимо и зашто причамо о левом и десном модулу. Ако се $A$ састоји само из једног елемента, дакле ако је $A = \{0_A\}$, онда се $A$ може видети као модул над било којим прстеном и кажемо да је то тривијални модул.

Наведимо неколико (нетривијалних) примера.

**Пример 18.** Најпре, свака Абелова група $A$ је један $\mathbb{Z}$-модул: за $m \in \mathbb{Z}$ и $a \in A$ је $m \bullet a := ma$. ♣

**Пример 19.** Ако је $K$ поље, онда $K$-модул није ништа друго до векторски простор над пољем $K$. ♣

**Пример 20.** Ако је $R$ прстен са јединицом онда је сваки леви (десни) идеал $I$ један леви (десни) $R$-модул: $r \bullet a := r \cdot a$ ($a \bullet r = a \cdot r$). Посебно је и $R$ и леви и десни $R$-модул. ♣

**Пример 21.** Ако $R$ прстен са јединицом, а $G$ група, онда $R$ постаје леви $RG$-модул са: $(\sum_g r_g g) \bullet s := \sum_g r_g s$. На аналогни начин је $R$ један десни $R$-модул. ♣

**Пример 22.** Нека је $R$ прстен. Тада је $M_n(R)$ леви $R$-модул: $r \bullet (a_{ij}) := (r \cdot a_{ij})$. Такође је $R^n$ један леви $M_n(R)-$ модул: $(a_{ij}) \bullet (r_j) := (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot r_j)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot r_1 + a_{12} \cdot r_2 + \cdots + a_{1n} \cdot r_n \\ a_{21} \cdot r_1 + a_{22} \cdot r_2 + \cdots + a_{2n} \cdot r_n \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot r_1 + a_{n2} \cdot r_2 + \cdots + a_{nn} \cdot r_n \end{pmatrix}.$$

♣

Да бисмо имали категорију, потребни су нам и одговарајући морфизми.

**Дефиниција 23.** Нека су $A$ и $B$ леви $R$-модули. Тада је функција $\phi\colon A \to B$ један хомоморфизам левих $R$-модула уколико важи следеће:

1. За све $a_1, a_2 \in A$: $\phi(a_1 + a_2) = \phi(a_1) + \phi(a_2)$;

2. за све $r \in R$ и $a \in A$: $\phi(r \bullet a) = r \bullet \phi(a)$.

Ако су $A$ и $B$ леви $R$-модули, означимо са $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ скуп свих хомоморфизама левих модула. Ово је Абелова група у односу на операцију $+$ задату са: $(\phi+\psi)(a) := \phi(a)+\psi(a)$. Проверимо горња својства.

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(a_1 + a_2) &= \phi(a_1 + a_2) + \psi(a_1 + a_2) = \phi(a_1) + \phi(a_2) + \psi(a_1) + \psi(a_2)\\ &= (\phi(a_1) + \psi(a_1)) + (\phi(a_2) + \psi(a_2)) = (\phi + \psi)(a_1) + (\phi + \psi)(a_2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(r \bullet a) &= \phi(r \bullet a) + \psi(r \bullet a) = r \bullet \phi(a) + r \bullet \psi(a)\\ &= r \bullet (\phi(a) + \psi(a)) = r \bullet ((\phi + \psi)(a)).\end{aligned}$$

Ако са $\mathrm{Hom}(A, B)$ означимо скуп свих хомоморфизама Абелових група (а овај скуп јесте сам по себи Абелова група у односу на горезадату операцију сабирања), пошто је сваки хомоморфизам левих модула уједно и хомоморфизам одговарајућих Абелових група, можемо да констатујемо да је $\mathrm{Hom}_R(A, B) \subseteq \mathrm{Hom}(A, B)$. Но, важи и више, $\mathrm{Hom}_R(A, B) \leqslant \mathrm{Hom}(A, B)$. Да бисмо доказали да је подгрупа, приметимо најпре да је $\mathrm{Hom}_R(A, B) \neq \emptyset$, јер нула хомоморфизам $0$ ($0(a) = 0_B$ за све $a \in A$) јесте хомоморфизам $R$-модула. Ако $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, онда је

$$\begin{aligned}(\phi - \psi)(r \bullet a) &= \phi(r \bullet a) - \psi(r \bullet a)\\ &= r \bullet \phi(a) - r \bullet \psi(a) = r \bullet (\phi(a) - \psi(a)) = r \bullet (\phi - \psi)(a).\end{aligned}$$

Стога и $\phi - \psi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, па је $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ заиста подгрупа групе $\mathrm{Hom}(A, B)$. Приметимо да је $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B)$.

За два модула $A$ и $B$ кажемо да су изоморфни ако постоји хомоморфизам $\phi\colon A \to B$ који је бијекција.

Категорију левих $R$-модула и хомоморфизама левих $R$-модула ћемо означити са ${}_R\mathfrak{M}$, а категорију десних $R$-модула и хомоморфизама десних $R$-модула са $\mathfrak{M}_R$. Ако је $A$ један леви $R$-модул, то ћемо кратко писати овако: $A \in_R \mathfrak{M}$, а ако је $\phi\colon A \to B$, хомоморфизам левих $R$-модула, кратко ћемо рећи да је $\phi$ у ${}_R\mathfrak{M}$.

**Дефиниција 24.** Уколико је $R$ прстен са јединицом, $A \in_R \mathfrak{M}$, $A' \subseteq A$, тада је $A'$ подмодул од $A$ уколико је $A'$ подгрупа од $A$ и за сваки $a' \in A'$, $r \in R$ је $r \bullet a' \in A'$.

Ако је $A'$ подмодул од $A$ то ћемо означавати са $A' \leqslant A$. Пошто је $A'$ и подгрупа Абелове групе $A$, можемо дефинисати количничку подгрупу $A/A'$ но на њој можемо задати и структуру левог $R$-модула са: $r \bullet (a + A') := r \bullet a + A'$. Читаоцима остављамо да провере да је ова операција добро дефинисана и да заиста добијамо један леви $R$-модул. Он се назива количнички модул. Важи следећа теорема.

**Теорема 25.** Нека је $\phi\colon A \to B$ у ${}_R\mathfrak{M}$. Тада важи следеће.

1. $\operatorname{Ker}\phi := \{a \in A : \phi(a) = 0_B\} \leqslant A$;
2. $\operatorname{Im}\phi = \phi[A] \leqslant B$;
3. $A/\operatorname{Ker}\phi \cong \operatorname{Im}\phi$.

**Доказ.** 1. Знамо да је $\operatorname{Ker}\phi$ подгрупа од $A$. Ако је $a \in \operatorname{Ker}\phi$ и $r \in R$, онда је $\phi(r \bullet a) = r \bullet \phi(a) = r \bullet 0_B = 0_B$, па је $\operatorname{Ker}\phi$ заиста подмодул од $A$.

2. Знамо да је $\operatorname{Im}\phi$ подгрупа од $B$. Уколико је $\phi(a) \in \operatorname{Im}\phi$ и $r \in R$ имамо да је $r \bullet \phi(a) = \phi(r \bullet a) \in \operatorname{Im}\phi$.

3. Дефинишемо $\psi\colon A/\operatorname{Ker}\phi \to \operatorname{Im}\phi$ са: $\psi(a + \operatorname{Ker}\phi) := \phi(a)$. Из теорије група знамо да је ово добро дефинисана функција и да је изоморфизам група. Остаје само да проверимо да је модулски хомоморфизам:

$$\psi(r \bullet (a + \operatorname{Ker}\phi)) = \psi(r \bullet a + \operatorname{Ker}\phi) = \phi(r \bullet a) = r \bullet \phi(a) = r \bullet \psi(a + \operatorname{Ker}\phi).$$

Дакле, $\psi$ је изоморфизам и доказ је завршен. □

Наравно, за $\operatorname{Ker}\phi$ кажемо да је језгро хомоморфизма $\phi$, а за $\operatorname{Im}\phi$ да је слика тог хомоморфизма. Корисно је уочити да је $\operatorname{Ker}\phi = \phi^{-1}[\{0\}]$. Приметимо да можемо формирати и количнички модул $B/\operatorname{Im}\phi$ и њега означавамо са $\operatorname{Coker}\phi$ и то је којезгро хомоморфизма $\phi$. Из теорије група знамо да је дати хомоморфизам „1–1” ако и само ако му је језгро тривијалан модул, док је таутолошка чињеница да је хомоморфизам „на” ако и само ако му је којезгро тривијалан модул.

Уколико је $A_1, A_2 \leqslant A$, онда можемо формирати суму модула $A_1$ и $A_2$: $A_1 + A_2 := \{a_1 + a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$ и то је такође подмодул од $A$. Наравно, и пресек подмодула је подмодул. Следећа теорема се лако изводи из претходно доказане теореме.

**Теорема 26.** 1. За $A_1, A_2 \leqslant A$ важи: $(A_1 + A_2)/A_1 \cong A_2/A_1 \cap A_2$.

2. Ако је $A'' \leqslant A' \leqslant A$, онда: $(A/A'')\big/(A'/A'') \cong A/A'$.

**Доказ.** 1. Дефинишемо $\phi\colon A_2 \to (A_1 + A_2)/A_1$ са: $\phi(x) = x + A_1$. Уколико је $a_1 + a_2 \in A_1 + A_2$ произвољан елемент, онда је $(a_1 + a_2) + A_1 = a_2 + A_1 = \phi(a_2)$, па је $\phi$ „на”. За $x \in A_2$ имамо да је $x \in \operatorname{Ker}\phi$ акко је $x + A_1 = A_1$ што је еквивалентно са $x \in A_1$. Дакле, $\operatorname{Ker}\phi = A_1 \cap A_2$ и резултат следи из теореме 25.

2. Дефинишемо $\phi\colon A \to (A/A'')\big/(A'/A'')$ са: $\phi(a) := (a + A'') + A'/A''$. Наравно, овде би ипак требало проверити да ли је $A'/A'' \leqslant A/A''$. Но, то лако следи из $A' \leqslant A$ (уверите се у ово). Јасно је да је $\phi$ „на”.

Приметимо да

$$\begin{aligned} a \in \operatorname{Ker}\phi \text{ акко } & (a + A'') + A'/A'' = A'/A'' \\ \text{акко } & a + A'' \in A'/A'' \\ \text{акко } & a + A'' = a_1 + A'' \text{ за неко } a_1 \in A' \\ \text{акко } & a - a_1 \in A'' \text{ за неко } a_1 \in A' \\ \text{акко } & a - a_1 = a_2 \text{ за неко } a_1 \in A' \text{ и неко } a_2 \in A'' \\ \text{акко } & a = a_1 + a_2 \text{ за неко } a_1 \in A' \text{ и неко } a_2 \in A''. \end{aligned}$$

Но, како је $A'' \subseteq A'$, добијамо да је последњи услов еквивалентан са $a \in A'$ (уверите се у ово), па је $\operatorname{Ker}\phi = A'$. □

Наравно, доказ под 2. смо могли извести и на стандардан начин, како смо радили у ранијим курсевима, али није лоше нешто и другачије урадити. ☺

Сада ћемо се на кратко посветити неким појмовима из теорије категорија. Могли бисмо и без тога, али ипак је корисније то урадити на овај начин. Као што знамо (рецимо из једног од курсева топологије), свака категорија $\mathcal{C}$ састоји се од КЛАСЕ објеката $O(\mathcal{C})$ и класе стрелица (или морфизама) $A(\mathcal{C})$.

⌈ Овде истичемо да користимо појам класе и то не само ради лепшег изражавања. Као што математику можемо засновати на аксиомама ZFC (Цермело–Френкел уз аксиому избора), тако постоји и аксиоматизација NBG (фон Нојман–Бернајс–Гедел) у којој се појављују, осим скупова и класе. Класа може бити подскуп друге класе, а ако је класа ЕЛЕМЕНТ неке друге класе, онда је она СКУП. Дакле, скупови су елементи неких класа. Ми знамо да не постоји скуп свих скупова, али постојаће УНИВЕРЗАЛНА класа која се састоји од свих скупова. Како ми желимо да разматрамо и категорију скупова, у којима су објекти сви скупови, а стрелице сва пресликавања међу њима, потребан нам је шири појам од скупа. Уколико у некој категорији објекти чине скуп за ту категорију кажемо да је МАЛА КАТЕГОРИЈА. ⌋

За свака два објекта $A, B$ имамо СКУП стрелица из $A$ у $B$, који се означава са $\mathcal{C}(A, B)$. Претпостављамо да је $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \emptyset$ уколико је $(A, B) \neq (A', B')$. За сваки објекат $A$ постоји и стрелица $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$. Имамо и операцију композиција стрелица

$$\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

за коју важи:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f), \text{ за } (f, g, h) \in \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(C, D)$$

и

$$1_B \circ f = f = f \circ 1_A, \text{ за } f \in \mathcal{C}(A, B).$$

Објекти свакако јесу скупови, али стрелице нису нужно функције. На пример, сваки посет $P$ се природно може видети као (мала) категорија $\mathcal{P}$. Имамо да је $O(\mathcal{P}) = P$, док је за свака два $A, B \in P$:

$$\mathcal{C}(A,B) = \begin{cases} \{(A,B)\}, & \text{ако је } A \leqslant_P B, \\ \emptyset, & \text{иначе .} \end{cases}$$

Поента је да буде тачно један елемент у $\mathcal{C}(A,B)$ акко је $A \leqslant_P B$, не мора то бити баш овај који смо навели. Без обзира на чињеницу да стрелице не морају бити функције, ако је $f \in \mathcal{C}(A,B)$ пишемо то кратко: $f\colon A \to B$. Просто је то погодно тако писати.

Категорију која има тачно један елемент називамо МОНОИД (а ако је то мала категорија, онда се заиста поклапа са појмом моноида који знамо), категорију у којој је свака стрелица изоморфизам (стрелица $f \in \mathcal{C}(A,B)$ је изоморфизам, уколико постоји стрелица $g \in \mathcal{C}(B,A)$ таква да је $g \circ f = 1_A$ и $f \circ g = 1_B$), називамо ГРУПОИД, а категорију која је и моноид и групоид називамо ГРУПА (ако је мала категорија у питању, то је заиста група у добро нам познатом смислу).

Ово што нам је сада важно је да уведемо појам ПРОИЗВОДА и КОПРОИЗВОДА у категорији.

**Дефиниција 27.** Нека је $\mathcal{C}$ нека категорија и $A_i$, за $i \in I$ фамилија објеката у $\mathcal{C}$.

1. ПРОИЗВОД ових објеката, ако постоји, чине објекат $P$ и стрелице $p_i\colon P \to A_i$ тако да је испуњено следеће. За сваки објекат $X$ из $\mathcal{C}$ и стрелице $f_i\colon X \to A_i$ постоји тачно једна стрелица $f\colon X \to P$ тако да је $p_i \circ f = f_i$ за све $i \in I$.

2. КОПРОИЗВОД ових објеката, ако постоји, чине објекат $S$ и стрелице $q_i\colon A_i \to S$ тако да је испуњено следеће. За сваки објекат $X$ из $\mathcal{C}$ и стрелице $f_i\colon A_i \to X$ постоји тачно једна стрелица $f\colon S \to X$ тако да је $f \circ q_i = f_i$ за све $i \in I$.

Писаћемо $(P; (p_i)_{i\in I})$ за производ и $(S; (q_i)_{i\in I})$ за копроизвод. Ни производ ни копроизвод неких објеката не мора постојати у датој категорији, али ако неки од њих постоји, он је јединствено одређен до на изоморфизам. Наиме, претпоставимо да и $P'$, заједно са $p'_i\colon P' \to A_i$ задовољава услове из дефиниције производа. Тада постоји тачно једна стрелица $f\colon P' \to P$ таква да је $p_i \circ f = p'_i$ за све $i \in I$, као и тачно једна стрелица $g\colon P \to P'$ таква да је $p'_i \circ g = p_i$ за све $i \in I$. Тада добијамо да је $p'_i \circ (g \circ f) = p'_i$ за све $i \in I$. Но, тај услов испуњава и $\mathrm{id}_{P'}$. Због јединствености добијамо да мора бити $g \circ f = \mathrm{id}_{P'}$. На сличан начин добијамо да је и $f \circ g = \mathrm{id}_P$, па су $f$ и $g$ изоморфизми.

**Пример 28.** Нека је $\mathcal{C} = Set$, тј. категорија свих скупова и функција између њих. Није тешко проверити да производ објеката $A_i$, $i \in I$, у овој категорији, чини Декартов производ скупова $P = \Pi_{i \in I} A_i$ заједно са пројекцијама $p_i \colon P \to A_i$ $(p_i(a_s)_{s \in I} = a_i)$.

Копроизвод чини ДИСЈУНКТНА унија ових скупова, тј. $S = \bigcup_{i \in I}(A_i \times \{i\})$, уз функције $q_i \colon A_i \to S$ задате са: $q_i(a) = (a, i)$ за $a \in A_i$. Уверите се да је ово заиста копроизвод у категорији скупова.

Вратимо се сада на категорију ${}_R\mathfrak{M}$.

**Теорема 29.** За сваки комутативан прстен $R$ и фамилију левих $R$-модула $A_i$ у категорији ${}_R\mathfrak{M}$ постоји и производ и копроизвод.

**Доказ.** Производ није тешко конструисати. Заправо, то је директан производ модула $A_i$: $P = \Pi_{i \in I} A_i$, са операцијама задатим по координатама: $(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I} := (a_i + b_i)_{i \in I}$, $r \bullet (a_i)_{i \in I} := (r \bullet a_i)_{i \in I}$, док су $p_i \colon P \to A_i$ пројекције. Уверимо се да је ово производ. У ту сврху, нека је $X$ један леви $R$-модул и $f_i \colon X \to A_i$ хомоморфизми модула. Дефинишемо $f \colon X \to \Pi_{i \in I} A_i$ са: $f(x) := (f_i(x))_{i \in I}$, за $x \in X$. Ово јесте хомоморфизам левих $R$-модула: $f(x+y) = (f_i(x+y))_{i \in I} = (f_i(x)+f_i(y))_{i \in I}$ (јер су $f_i$ хомоморфизми) $= (f_i(x))_{i \in I} + (f_i(y))_{i \in I} = f(x) + f(y)$. Такође, $f(r \bullet x) = (f_i(r \bullet x))_{i \in I} = (r \bullet f_i(x))_{i \in I} = r \bullet (f_i(x))_{i \in I} = r \bullet f(x)$. Имамо и да је $(p_j \circ f)(x) = p_j(f(x)) = p_j(f_i(x))_{i \in I} = f_j(x)$ за све $j \in I$. Из овог последњег добијамо и да је $f$ јединствено одређено.

Доказ егзистенције копроизвода је нешто сложенији. Нека је

$$S := \{(a_i) \in \Pi_{i \in I} A_i : a_i \neq 0, \text{ само за коначно много } i \in I\}.$$

Јасно је да је ово леви $R$-модул (који је заправо подмодул од $P$). Дефинишемо $q_i \colon A_i \to S$ са:

$$(q_i(a))_j = \begin{cases} a, & \text{ако је } j = i \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

за $a \in A_i$. Дакле, на $i$-ту координату смо поставили елементе из $A_i$ а све остале координате су једнаке 0. Ако је $X$ један леви $R$-модул и $f_i \colon A_i \to X$, онда можемо дефинисати $f \colon S \to X$ са: $f((a_i)_{i \in I}) := \sum_{i \in I} f_i(a_i)$. Ова сума је заправо коначна, јер је, за сваки $(a_i)_{i \in I} \in S$ само коначно много координата различито од нуле. Јасно је да је за свако $i \in I$: $(f \circ q_i)(a)) = f(q_i(a)) = \sum_{j \in I} f_j(q_i(a))_j = f_i(a)$ (пошто су остале координате једнаке нули). Појаснимо зашто имамо јединственост тог $f$. Нека је $F \colon S \to X$ ма који хомоморфизам за који важи $F \circ q_i = f_i$ за све $i \in I$. Уколико је $s \in S$, онда је $s_i \neq 0$ само за коначно много индекса $i$. Нека су то индекси $i_1, \ldots, i_n$. Посматрајмо елементе $a[1], \ldots, a[n] \in S$ задате са:

$$a[k]_i = \begin{cases} s_{i_k}, & \text{за } i = i_k, \\ 0, & \text{иначе ,} \end{cases}$$

за $k \in \{1, \dots, n\}$. Видимо две ствари. Најпре, $a[k] = q_{i_k}(s_{i_k})$ за $k \in \{1, \dots, n\}$. А такође је $s = a[1] + \cdots + a[n]$. Стога имамо да је

$$\begin{aligned} F(s) &= F(a[1]) + \cdots + F(a[n]) = F(q_{i_1}(s_{i_1})) + \cdots + F(q_{i_n}(s_{i_n})) \\ &= (F \circ q_{i_1})(s_{i_1}) + \cdots + (F \circ q_{i_n})(s_{i_n}) = f_{i_1}(s_{i_1}) + \cdots + f_{i_n}(s_{i_n}) = f(s). \qquad \square \end{aligned}$$

За копроизвод $S$ модула $A_i$ користимо ознаку $\bigoplus_{i \in I} A_i$ и називамо га и ДИРЕКТНОМ СУМОМ модула $A_i$. У случају два модула користимо ознаку $A \oplus B$. Аналогно за $n$ модула користимо запис $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$. Приметимо да у случају коначног скупа индекса за објекат који се појављује у дефиницији копроизвода добијамо исти као и у случају производа, но морфизми који чине структуру су, наравно, другачији.

Посматрајмо низ левих $R$-модула и хомоморфизама:

$$A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A''.$$

За овај низ кажемо да је тачан у $A$ уколико је $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$. Приметимо да, ако је $\alpha = 0$, тј. хомоморфизам који све елементе из $A'$ слика у $0_A$, онда је горњи низ тачан у $A$ акко је $\beta$ „1–1”. Слично, ако је $\beta = 0$, онда је низ тачан у $A$ акко је $\alpha$ „на”. Стога је низ

$$0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0,$$

где смо са 0 означавили тривијалан $R$-модул, тачан у свим нетривијалним модулима уколико је $\alpha$ „1–1”, $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \beta$ и $\beta$ је „на”. Овакав низ зовемо и КРАТАК ТАЧАН НИЗ.

Следећа опсервација је понекад корисна. Претпоставимо да је низ

$$A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A''$$

тачан у $A$ и нека је $\theta \colon A \to B$ изоморизам. Тада је низ

$$A \xrightarrow{\theta \circ \alpha} B \xrightarrow{\beta \circ \theta^{-1}} A''$$

тачан у $B$. Наиме,

$$\operatorname{Ker}(\beta \circ \theta^{-1}) = (\beta \circ \theta^{-1})^{-1}[\{0\}] = \theta[\beta^{-1}[\{0\}]] = \theta[\operatorname{Ker} \beta] = \theta[\operatorname{Im} \alpha] = \operatorname{Im}(\theta \circ \alpha).$$

Приметимо да сваки хомоморфизам $\phi \colon A \to B$ „производи” тачан низ

$$0 \to \operatorname{Ker} \phi \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\pi} \operatorname{Coker} \phi \to 0,$$

где је $\iota$ УКЉУЧЕЊЕ (инклузија) $\operatorname{Ker} \phi$ у $A$: $\iota(a) = a$, а $\pi$ је задато са $\pi(b) = b + \operatorname{Im} \phi$. Приметимо још да два тачна низа

$$A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to A'' \xrightarrow{\gamma} A''' \xrightarrow{\delta} A'''',$$

можемо спојити у дужи тачан низ:

$$A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\gamma\circ\beta} A''' \xrightarrow{\delta} A''''.$$

Наиме, како је $\gamma$ „1–1" то је $\mathrm{Ker}(\gamma\circ\beta) = \mathrm{Ker}\,\beta$ ($\gamma(\beta(a)) = 0$ акко $\beta(a) = 0$), а како је $\beta$ „на", то је $\mathrm{Im}(\gamma\circ\beta) = (\gamma\circ\beta)[A] = \gamma[\beta[A]] = \gamma[A''] = \mathrm{Im}\,\gamma$.

Из два тривијално тачна низа

$$0 \to A \xrightarrow{id_A} A \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to B \xrightarrow{id_B} B \to 0 \tag{7}$$

можемо формирати кратак тачан низ

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \oplus B \xrightarrow{p} B \to 0, \tag{8}$$

где је $i(a) = (a, 0)$, а $p(a, b) = b$. Заправо, ако приметимо да је, на пример, $A \oplus 0 = A$, и додамо 0 модуле на крајеве ових низова:

$$0 \to A \xrightarrow{id_A} A \to 0 \to 0 \quad \text{и} \quad 0 \to 0 \to B \xrightarrow{id_B} B \to 0,$$

видимо да наведни кратак тачан низ добијамо налажењем директне суме ова два низа, тј. на свакој позицији узимамо директну суму наведених модула, а хомоморфизми су оно што морају бити. Стога се може природно рећи да два низа у (7) настају цепањем тачног низа у (8).

Ово је била кратка мотивација за следећу теорему.

**Теорема 30.** Нека је $0 \to A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\epsilon} A'' \to 0$ кратак тачан низ. Следећи услови су еквивалентни.

1. Постоји $\eta\colon A \to A'$ тако да је $\eta \circ \mu = \mathrm{id}_{A'}$.
2. Постоји $\eta\colon A \to A'$ тако да је $(A, \eta, \epsilon)$ производ модула $A'$ и $A''$.
3. Постоји $\nu\colon A'' \to A$ тако да је $\varepsilon \circ \nu = \mathrm{id}_{A''}$.
4. Постоји $\nu\colon A'' \to A$ тако да је $(A, \mu, \nu)$ копроизвод модула $A'$ и $A''$.
5. Постоје $\eta\colon A \to A'$ и $\nu\colon A'' \to A$ тако да је $\mu\circ\eta + \nu\circ\epsilon = \mathrm{id}_A$.

**Доказ.** 1. $\Longrightarrow$ 2. Докажимо најпре да је ограничење (рестрикција) $\epsilon|_{\mathrm{Ker}\,\eta}\colon \mathrm{Ker}\,\eta \to A''$ изоморфизам. У ту сврху, нека је $a'' \in A''$. Како је $\epsilon$ „на", то постоји $a \in A$ такав да је $\epsilon(a) = a''$. Наравно, то $a$ не мора бити у језгру од $\eta$, али мало га „коригујмо", тј. уочимо елемент $a_0 = a - \mu(\eta(a))$. Како је $\epsilon\circ\mu = 0$, то је и $\epsilon(a_0) = a''$, Осим тога $\eta(a_0) = \eta(a) - \eta(\mu(\eta(a))) = \eta(a) - \eta(a) = 0$, па $a_0 \in \mathrm{Ker}\,\eta$, те је наведено ограничење заиста „на". Уколико се $a \in \mathrm{Ker}\,\eta$ при $\epsilon$ слика у 0, тј. ако $a \in \mathrm{Ker}\,\epsilon \cap \mathrm{Ker}\,\eta = \mathrm{Im}\,\mu \cap \mathrm{Ker}\,\eta$ имамо да је $a = \mu(a')$ за неко $a' \in A'$, а такође је и $0 = \eta(a) = \eta(\mu(a')) = a'$, па је $a = \mu(0) = 0$ и добили смо тражени изоморфизам.

Нека су $\phi\colon X \to A'$ и $\psi\colon X \to A''$ хомоморфизми $R$-модула. Треба показати да постоји тачно један хомоморфизам $f\colon X \to A$ такав да је $\eta \circ f = \phi$ и $\epsilon \circ f = \psi$. Тражени хомоморфизам $f$ задајемо са:

$$f(x) = \mu(\phi(x)) + (\epsilon|_{\operatorname{Ker}\eta})^{-1}(\psi(x)).$$

Како $(\epsilon|_{\operatorname{Ker}\eta})^{-1}(\psi(x)) \in \operatorname{Ker}\eta$ имамо да је $\eta(f(x)) = \eta(\mu(\phi(x))) + 0 = \phi(x)$. Такође је $\epsilon(f(x)) = \epsilon(\mu(\phi(x))) + \psi(x) = \psi(x)$. Да бисмо показали јединственост, претпоставимо да је $F\colon X \to A$ хомоморфизам за који важи $\eta \circ F = \phi$ и $\epsilon \circ F = \psi$. Тада за сваки $x \in X$ добијамо да $F(x) - f(x) \in \operatorname{Ker}\epsilon \cap \operatorname{Ker}\eta$, а горе смо показали да је тај пресек тривијалан. То завршава доказ јединствености.

2. $\Longrightarrow$ 1. Дакле, имамо производ $A' \xleftarrow{\eta} A \xrightarrow{\epsilon} A''$, а такође и производ $A' \xleftarrow{p_1} A' \times A'' \xrightarrow{p_2} A''$. Стога постоји изоморфизам $\theta\colon A \to A' \times A''$ за који важи $p_1 \circ \theta = \eta$ и $p_2 \circ \theta = \epsilon$. Дакле, $\theta(a) = (\eta(a), \epsilon(a))$ и, за $a' \in A'$: $\theta(\mu(a')) = (\eta(\mu(a')), \epsilon(\mu(a')) = ((\eta \circ \mu)(a'), 0)$. Но, $\theta$ је изоморфизам и његово сужење $\underline{\theta}\colon \operatorname{Ker}\epsilon \to \operatorname{Ker}p_2$ је такође изоморфизам. Наиме, ако је $a \in \operatorname{Ker}\epsilon$, онда је $p_2(\theta(a)) = \epsilon(a) = 0$, па наведено сужење заиста постоји. Наравно, и сужење је „1–1”. Коначно, ако је $(a', a'') \in \operatorname{Ker}p_2$ постоји неко $a \in A$ ($\theta$ је „на”) такво да је $\theta(a) = (a', a'')$. Но, $0 = p_2(a', a'') = p_2(\theta(a)) = \epsilon(a)$, те $a \in \operatorname{Ker}\epsilon$, те је сужење и „на”. Јасно је да је $\operatorname{Ker}p_2 = A' \times \{0\}$, те $\underline{\theta}$ остварује изоморфизам између $\operatorname{Ker}\epsilon = \operatorname{Im}\mu$ и $A' \times \{0\}$, те онда композиција $\theta \circ \mu$ остварује изоморфизам између $A'$ и $A' \times \{0\}$ облика $a' \mapsto ((\eta \circ \mu)(a'), 0)$ и коначно добијамо да је $\omega = \eta \circ \mu\colon A' \to A'$ изоморфизам. Ако за $\eta'$ означимо композицију $\omega^{-1} \circ \eta\colon A \to A'$ добијамо да је $\eta' \circ \mu = (\omega^{-1} \circ \eta) \circ \mu = \omega^{-1} \circ (\eta \circ \mu) = \omega^{-1} \circ \omega = \mathrm{id}_A$ те смо добили тражени хомоморфизам.

Читаоцима остављамо да за вежбу по аналогији докажу да важи еквиваленција 3. $\Longleftrightarrow$ 4.

5. $\Longrightarrow$ 1. Дакле, постоје $\eta\colon A \to A'$ и $\nu\colon A'' \to A$ тако да је $\mu \circ \eta + \nu \circ \epsilon = \mathrm{id}_A$. Компоновањем са $\mu$ са десне стране (преткомпоновањем) добијамо $\mu \circ \eta \circ \mu + \nu \circ \epsilon \circ \mu = \mu$. Како је $\epsilon \circ \mu = 0$, добијамо $\mu \circ \eta \circ \mu = \mu$. Но, $\mu$ је „1–1” па следи да је $\eta \circ \mu = \mathrm{id}_{A'}$ (уверите се у ово).

5. $\Longrightarrow$ 3. Једнакост из 5. компонујемо сада са $\epsilon$ са леве стране (посткомпонујемо) и добијамо $\epsilon \circ \mu \circ \eta + \epsilon \circ \nu \circ \epsilon = \epsilon$. Како је $\epsilon \circ \mu = 0$, имамо $\epsilon \circ \nu \circ \epsilon = \epsilon$, па из чињенице да је $\epsilon$ „на” добијамо $\epsilon \circ \nu = \mathrm{id}_{A''}$ (уверите се зашто је ово заиста тако).

3. $\Longrightarrow$ 5. Посматрајмо хомоморфизам $\xi = \mathrm{id}_A - \nu \circ \epsilon\colon A \to A$. Посткомпоновањем са $\epsilon$ добијамо $\epsilon \circ \xi = \epsilon - \epsilon \circ \nu \circ \epsilon = \varepsilon - \varepsilon = 0$. Ово нам говори да је $\operatorname{Im}\xi \subseteq \operatorname{Ker}\epsilon = \operatorname{Im}\mu$. Како је $\mu$ „1–1”, постоји функција $\mu^{-1}\colon \operatorname{Im}\mu \to A'$, па можемо дефинисати функцију $\eta = \mu^{-1} \circ \xi$. Како је $(\mu \circ \mu^{-1})(a) = a$ за све $a \in \operatorname{Im}\mu$, имамо да је $\mu \circ \eta = \mu \circ \mu^{-1} \circ \xi = \xi = \mathrm{id}_A - \nu \circ \epsilon$, па добијамо $\mu \circ \eta + \nu \circ \epsilon = \mathrm{id}_A$.

Остављамо читаоцима за вежбу да докажу да 1. $\Longrightarrow$ 5. $\square$

**Последица 31.** Нека је $\pi\colon A \to A$ ПРОЈЕКТОР, тј. нека задовољава услов $\pi^2 = \pi$. Тада је $A \cong \operatorname{Im}\pi \oplus \operatorname{Ker}\pi$.

**Доказ.** Посматрамо кратак тачан низ

$$0 \to \operatorname{Ker}\pi \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\epsilon} \operatorname{Im}\pi \to 0.$$

Наравно, $\mu$ је укључивање, а $\epsilon$ је сужење од $\pi$ добијено смањивањем кодомена. Можемо дефинисати укључење $\nu\colon \operatorname{Im}\pi \to A$, тј. $\nu(a) = a$. Ако је $b \in \operatorname{Im}\pi$, је $b = \pi(a)$ за неко $a \in A$ и $\epsilon(\nu(b)) = \pi(\pi(a)) = \pi^2(a) = \pi(a) = b$, па је $\epsilon \circ \nu = \mathrm{id}_{\operatorname{Id}\pi}$. Стога је, по претходној теореми $A \cong \operatorname{Ker}\pi \oplus \operatorname{Im}\pi$. $\square$

Но, посветимо се још мало овом примеру. Наиме, и $\operatorname{Ker}\pi$ и $\operatorname{Im}\pi$ су подмодули од $A$ и можемо формирати суму тих подмодула. Покажимо да важи следећи став.

**Став 32.** Нека је $\pi\colon A \to A$ пројектор као у претходној последици. Тада важи следеће.

(1) $\operatorname{Ker}\pi + \operatorname{Im}\pi = A$;

(2) $\operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\pi = \{0\}$;

(3) Сваки елемент $a \in A$ се на јединствен начин може изразити у облику $a = x + y$, где $x \in \operatorname{Ker}\pi$ и $y \in \operatorname{Im}\pi$.

**Доказ.** Нека је $a \in A$. Тада $a - \pi(a) \in \operatorname{Ker}\pi$. Наиме, $\pi(x) = \pi(a) - \pi^2(a) = \pi(a) - \pi(a) = 0$. Дакле, имамо да је $a = (a - \pi(a)) + \pi(a)$, при чему $a - \pi(a) \in \operatorname{Ker}\pi$, а $\pi(a) \in \operatorname{Im}\pi$ и показали смо да важи (1).

Уколико $a \in \operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\pi$ имамо да је $a = \pi(x)$ за неки $x \in A$, јер је $a \in \operatorname{Im}\pi$, као и да је $\pi(a) = 0$, јер је $a$ у језгру. Но, тада имамо $0 = \pi(a) = \pi(\pi(x)) = \pi^2(x) = \pi(x) = a$ и доказали смо (2).

Коначно, ако је $a = x + y = x' + y'$, где $x, x' \in \operatorname{Ker}\pi$, а $y, y' \in \operatorname{Im}\pi$, онда $x - x' = y' - y \in \operatorname{Ker}\pi \cap \operatorname{Im}\pi = \{0\}$ и доказали смо и (3). $\square$

Користићемо ad hoc ознаку $\dot{+}$ за овакву суму и зваћемо је УНУТРАШЊА ДИРЕКТНА СУМА. Дакле, $A = \operatorname{Ker}\pi \dot{+} \operatorname{Im}\pi$. Општије, ако је $A_i$ фамилија подмодула од $A$, онда $\dot{+}_{i\in I} A_i$ означава суму подмодула за коју важи да се сваки елемент те суме на јединствен начин може приказати у облику суме елемената из тих модула. Важи следећа теорема.

**Теорема 33.** Нека је $A_i$, $i \in I$ фамилија подмодула од $A$, $q_i\colon A_i \to A$ њихова укључења у $A$. Тада су следећи услови еквивалентни.

(1) $(A; (q_i)_{i\in I})$ је копроизвод (директна сума) подмодула $A_i$;

(2) $A = +_{i\in I} A_i$ и за свако $i \in I$: $A_i \cap (+_{j\neq i} A_j) = \{0\}$;

(3) $A = \dot{+}_{i\in I} A_i$.

**Доказ.** (1) $\Longrightarrow$ (2). Претпоставимо да је $A' = +_{i\in I} A_i \neq A$. Како је $A$ копроизвод подмодула $A_i$, то постоји тачно једно : $A \to A/A'$ такво да је $f \circ q_i = 0$ за све $i \in I$. Но, то није тачно. И нула морфизам који слика све елементе из $A$ у нулу и стандардни морфизам $p\colon a \mapsto a + A'$ испуњавају ова два услова, а $p \neq 0$, јер $A/A'$ није тривијалан модул.

Претпоставимо да је за неко $i \in I$: $A_i \cap (+_{j\neq i} A_j) \neq \{0\}$ и нека је $b \neq 0$ нетривијалан елемент из тог пресека. Стога је $b = a_{j_1} + \cdots + a_{j_n}$ за неке $j_1, \ldots, j_n$ различите од $i$. Дефинишимо $f_k\colon A_k \to A$ са:

$$f_k = \begin{cases} q_i, & \text{ако је } k = i,\\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По дефиницији копроизвода следи да постоји јединствен $f\colon A \to A$ такав да је $f \circ q_k = f_k$ за све $k \in I$. То значи да је $f(b) = f(q_i(b)) = f_i(b) = b$ и $f(a_{j_s}) = f(q_{j_s}(a_{j_s})) = f_{j_s}(a_{j_s}) = 0$ за све $s = \overline{1,n}$, па је $f(a_{j_1} + \cdots + a_{j_n}) = 0$. Добили смо да је $b = 0$ и та контрадикција завршава доказ ове импликације.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Знамо да је $A = +_{i\in I} A_i$. Претпоставимо да приказ елемената из $A$ у облику суме елемената из тих подмодула није јединствен. То значи да имамо једнакост $a_{i_1} + \cdots + a_{i_n} = b_{i_1} + \cdots + b_{i_n}$ за неке $i_1, \ldots, i_n$, при чему $a_{i_k}, b_{i_k} \in A_{i_k}$, а међу њима може бити и оних који су једнаки нули, али за бар једно $s$ је $a_{i_s} \neq b_{i_s}$. Тада имамо једнакост:

$$A_{i_s} \ni a_{i_s} - b_{i_s} = \sum_{k\neq s} (b_{i_k} - a_{i_k}) \in +_{j\neq i} A_i.$$

Дакле, имамо елемент различит од нуле који се налази у тривијалном пресеку. Та контрадикција завршава доказ ове импликације.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Нека је $Y$ произвољан модул и $f_i\colon A_i \to Y$ произвољни хомоморфизми. Треба показати да постоји тачно један $f\colon A \to Y$ тако да је $f \circ q_i = f_i$ за све $i \in I$. Тражено $f$ дефинишемо на следећи начин. Нека је $a \in A$. Како је $A = \dot{+}_{i\in I} A_i$, то је $a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}$ за неке $i_1, \ldots, i_n$ и $a_{i_k} \in A_{i_k}$. Тада стављамо да је $f(a) = f_{i_1}(a_{i_1}) + \cdots + f_{i_n}(a_n)$. Ово јесте хомоморфизам модула. Најпре, ако је $r \in R$, онда је $r \bullet a = r \bullet a_{i_1} + \cdots + r \bullet a_{i_n}$, при чему $r \bullet a_{i_k} \in A_{i_k}$, јер су ово подмодули од $A$. Стога је

$$\begin{aligned} f(r\bullet a) = f_{i_1}(r\bullet a_{i_1}) + \cdots + f_{i_n}(r\bullet a_{i_n}) &= r\bullet f(a_{i_1}) + \cdots + r\bullet f(a_{i_n})\\ &= r\bullet (f(a_{i_1}) + \cdots + f(a_{i_n})) = r\bullet f(a). \end{aligned}$$

Доказ да је $f(a+b) = f(a) + f(b)$ остављамо читаоцима за вежбу. Дакле, $f$ јесте хомоморфизам модула и јасно је да је $f \circ q_i = f_i$ за све $i \in I$ пошто смо га управо тако и дефинисали. За доказ јединствености, претпоставимо да је $g\colon A \to Y$ неки хомоморфизам за који важи: $g \circ q_i =$

$f_i$. Уколико је $a \in A$, онда је, као и горе, $a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}$, за неке $a_{i_k}$ па је

$$\begin{aligned} g(a) = g(a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}) = g(a_{i_1}) + \cdots + g(a_{i_n}) \text{ јер је } a \text{ хомоморфизам} \\ = g(q_{i_1}(a_{i_1})) + \cdots + g(q_{i_n}(a_{i_n})) = (g \circ q_{i_1})(a_{i_1}) + \cdots + (g \circ q_{i_n})(a_{i_n}) \\ = f_{i_1}(a_{i_1}) + \cdots + f_{i_n}(a_{i_n}) = f(a). \end{aligned}$$

Овим је завршен и доказ последње импликације. $\square$

У даљем раду ћемо и унутрашњу директну суму подмодула $A_i$ означавати са $\bigoplus_{i \in I} A_i$, а свакако ће нам из контекста бити јасно уколико се ради о њој.

**Дефиниција 34.** Нека је $A$ леви $R$-модул и $S \subseteq A$. Подмодул генерисан скупом $S$ је најмањи подмодул који садржи $S$ као свој подскуп. Ако је $S$ коначан, онда за такав модул кажемо да је коначно генерисан, а ако је једночлан, онда кажемо да је цикличан.

**Став 35.** Нека су $A$ и $S$ као у претходној дефиницији. Тада је подмодул $B$ генерисан скупом $S$:

$$B = \left\{ \sum_{a \in S'} r_a \bullet a : S' \text{ је коначан подскуп од } S, r_a \in R \right\}.$$

**Доказ.** Ово је једноставно, остављамо читаоцима за лаку вежбу. $\square$

Приметимо да се за тривијалан модул може узети да му је скуп генератора празан, али и једночлан – састоји се само од 0.

Важи следећа веома корисна карактеризација цикличних модула.

**Став 36.** Леви $R$-модул $A$ је цикличан ако и само постоји леви идеал $I$ у $R$ тако да је $A \cong R/I$.

**Доказ.** Наравно, из примера 20 знамо да је сваки леви идеал подмодул прстена у коме се налази. Но, $R/I$ јесте цикличан, генерисан је елементом $1 + I$: за све $r \in R$ је $r + I = r \bullet (1 + I)$.

Нека је $A$ цикличан леви $R$-модул и нека је он генерисан елементом $a_0$. То значи да је $A = \{r \bullet a_0 : r \in R\}$. Посматрајмо функцију $\phi \colon R \to A$ задату са $\phi(r) := r \bullet a_0$. Имамо да је

$$\phi(r + r') = (r + r') \bullet a_0 = r \bullet a_0 + r' \bullet a_0 = \phi(r) + \phi(r').$$

Такође, $\phi(s \cdot r) = (s \cdot r) \bullet a_0 = s \bullet (r \bullet a_0) = s \bullet \phi(r)$. Стога је $\phi$ хомоморфизам левих $R$-модула. Јасно је да је $\phi$ „на”. Тада је $\operatorname{Ker} \phi$ идеал у прстену $R$, а на основу теореме 25 добијамо изоморфизам $R/\operatorname{Ker} \phi \cong A$. $\square$

# 3 Функтор Hom

Најпре уводимо појам бимодула.

**Дефиниција 37.** Нека су $R$ и $S$ прстени са јединицом. Ако је $A$ један леви $R$-модул и десни $S$-модул, онда кажемо да је $A$ један $(R, S)$-бимодуле ако за све $r \in R$, $s \in S$, $a \in A$ важи: $(r * a) \star s = r * (a \star s)$.

Категорију свих $(R, S)$-бимодула означићемо са ${}_R\mathfrak{M}_S$. Приметимо да је сваки леви $R$-модул заправо један $(R, \mathbb{Z})$-бимодул. Слично се и десни модули могу видети као бимодули. Сваки $(R, S)$-бимодул можемо идентификовати са $(S^{\mathrm{op}}, R^{\mathrm{op}})$-бимодулом. Могао би се чак и $(R, S)$-бимодул идентификовати са левим $(R \times S^{\mathrm{op}})$-модулом, али ипак то нећемо радити. Приметимо само да се, у случају комутативног прстена $R$ сваки леви $R$ модул може видети не само и као десни $R$-модул, него и као $(R, R)$-бимодул. Ради једноставности ознака, користићемо ознаку $\cdot$ и за лево и за десно дејство, док ћемо ознаку за множење у прстену изостављати кад год можемо.

Нека је $A \in_R \mathfrak{M}_S$, $B \in_R \mathfrak{M}_T$. Тада на Абеловој групи $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ можемо задати структуру $(S, T)$-модула на следећи начин. Ако је $s \in S$, $t \in T$, $\phi \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, онда $s \cdot \phi$ и $\phi \cdot t$ дефинишемо са:

$$(s \cdot \phi)(a) := \phi(a \cdot s), \qquad (\phi \cdot t)(a) := \phi(a) \cdot t.$$

Треба проверити да $s \cdot \phi, \phi \cdot t \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$.

$$\begin{aligned}(s \cdot \phi)(a_1 + a_2) = \phi((a_1 + a_2) \cdot s) &= \phi(a_1 \cdot s + a_2 \cdot s) \\ &= \phi(a_1 \cdot s) + \phi(a_2 \cdot s) = (s \cdot \phi)(a_1) + (s \cdot \phi)(a_2);\end{aligned}$$

$$(s \cdot \phi)(r \cdot a) = \phi((r \cdot a) \cdot s) = \phi(r \cdot (a \cdot s)) = r \cdot \phi(a \cdot s) = r \cdot (s \cdot \phi)(a);$$

$$\begin{aligned}(\phi \cdot t)(a_1 + a_2) = \phi(a_1 + a_2) \cdot t &= (\phi(a_1) + \phi(a_2)) \cdot t \\ &= \phi(a_1) \cdot t + \phi(a_2) \cdot t = (\phi \cdot t)(a_1) + (\phi \cdot t)(a_2);\end{aligned}$$

$$(\phi \cdot t)(r \cdot a) = \phi((r \cdot a) \cdot t) = \phi(r \cdot (a \cdot t)) = r \cdot \phi(a \cdot t) = r \cdot (\phi \cdot t)(a).$$

Проверавамо да ли је $\mathrm{Hom}_R(A, B)$ леви $S$-модул.

**M1.** $$\begin{aligned}(s \cdot (\phi_1 + \phi_2))(a) = (\phi_1 + \phi_2)(a \cdot s) &= \phi_1(a \cdot s) + \phi_2(a \cdot s) \\ &= (s \cdot \phi_1)(a) + (s \cdot \phi_2)(a) = (s \cdot \phi_1 + s \cdot \phi_2)(a);\end{aligned}$$

**M2.** $$\begin{aligned}&((s_1 + s_2) \cdot \phi)(a) = \phi(a \cdot (s_1 + s_2)) = \phi(a \cdot s_1 + a \cdot s_2) \\ &\quad = \phi(a \cdot s_1) + \phi(a \cdot s_2) = (s_1 \cdot \phi)(a) + (s_2 \cdot \phi)(a) = (s_1 \cdot \phi + s_2 \cdot \phi)(a);\end{aligned}$$

**M3.** $((s_1 s_2) \cdot \phi)(a_1) = \phi(a \cdot (s_1 s_2)) = \phi((a \cdot s_1) \cdot s_2) = (s_2 \cdot \phi)(a \cdot s_1) = (s_1 \cdot (s_2 \cdot \phi))(a);$

**M4.** $(1_S \cdot \phi)(a) = \phi(a \cdot 1_S) = \phi(a)$.

Проверу да је $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ десни $T$-модул остављамо за вежбу.

Такође треба проверити слагање ових дејстава:

$$((s\cdot\phi)\cdot t)(a) = (s\cdot\phi)(a)\cdot t = \phi(a\cdot s)\cdot t;$$

$$(s\cdot(\phi\cdot t))(a) = (\phi\cdot t)(a\cdot s) = \phi(a\cdot s)\cdot t.$$

Заиста је $(s\cdot\phi)\cdot t = s\cdot(\phi\cdot t)$.

Нека су дати модули $A, A_1, A_2, A_3 \in_R \mathfrak{M}_S$; $B, B_1, B_2, B_3 \in_R \mathfrak{M}_T$ и хомоморфизми $\phi \in \mathrm{Hom}_R(A_1, A_2)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_R(A_2, A_3)$; $\kappa \in \mathrm{Hom}_R(B_1, B_2)$, $\lambda \in \mathrm{Hom}_R(B_2, B_3)$. Дефинишемо

$$\phi^*\colon \mathrm{Hom}_R(A_2, B) \to \mathrm{Hom}_R(A_1, B)$$

са $\phi^*(\alpha) := \alpha\circ\phi$ за $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(A_1, A_2)$. Аналогно се дефинишу $\psi^*$ и $(\psi\circ\phi)^*$.

Нека $\beta \in \mathrm{Hom}_R(A_3, B)$. Тада је

$$(\psi\circ\phi)^*(\beta) = \beta\circ(\psi\circ\phi) = (\beta\circ\psi)\circ\phi = \phi^*(\beta\circ\psi) = \phi^*(\psi^*(\beta)) = (\phi^*\circ\psi^*)(\beta),$$

па је

$$(\psi\circ\phi)^* = \phi^*\circ\psi^*.$$

Уколико је $A_1 = A_2 = B = A$ и $\phi = \mathrm{id}_A$, имамо да је $\mathrm{id}_A^*(\alpha) = \alpha\circ\mathrm{id}_A = \alpha$, па је

$$\mathrm{id}_A^* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(A,A)}.$$

Дефинишемо

$$\kappa_*\colon \mathrm{Hom}_R(A, B_1) \to \mathrm{Hom}_R(A, B_2)$$

са: $\kappa_*(\theta) := \kappa\circ\theta$, за $\theta \in \mathrm{Hom}_R(A, B_1)$. Аналогно се дефинишу $\lambda_*$ и $(\lambda\kappa)_*$. Нека $\theta \in \mathrm{Hom}(A, B_1)$. Тада је

$$(\lambda\circ\kappa)*(\theta) = (\lambda\circ\kappa)\circ\theta = \lambda\circ(\kappa\circ\theta) = \lambda\circ(\kappa_*(\theta)) = \lambda_*(\kappa_*(\theta)) = (\lambda_*\kappa_*)(\theta),$$

па је

$$(\lambda\circ\kappa)_* = \lambda_*\circ\kappa_*.$$

Уколико је $A = A_1 = B_1 = B_2$ и $\kappa = \mathrm{id}_A$, имамо да је $(\mathrm{id}_A)_*(\theta) = \mathrm{id}_A\circ\theta = \theta$, па је

$$(\mathrm{id}_A)_* = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_(A,A)}.$$

Нека је $\mathcal{C}$ ма која категорија. Можемо дефинисати опозитну категорију $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ са: $O(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = O(\mathcal{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$, $f\circ^{\mathrm{op}} g := g\circ f$. Кратко речено, опозитна категорија се добија од почетне категорије „обртањем” свих стрелица. Ако су $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ ма које категорије, онда је функтор $F$ из категорије $\mathcal{C}$ у категорију $\mathcal{D}$, у ознаци $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, придруживање $O(\mathcal{C} \ni A \mapsto F(A) \in \mathcal{D}$ при чему важи да је $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ кад год постоји $g \circ f$, као и $F(1_A) = 1_{F(A)}$ за све $A \in \mathcal{C}$. За функтор $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ кажемо и да је један КОНТРАВАРИЈАНТАН функтор из $\mathcal{C}$ у $\mathcal{D}$ (за обичан функтор се каже и да је КОВАРИЈАНТАН).

Сада можемо формулисати следећу теорему.

**Теорема 38.** Нека $A \in_R \mathfrak{M}_S$, $B \in_R \mathfrak{M}_T$. Тада је придруживање

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_R(A, X), \quad (X \xrightarrow{\phi} Y) \mapsto (\mathrm{Hom}_R(A, X) \xrightarrow{\phi_*} \mathrm{Hom}_R(A, Y)$$

један коваријантни функтор из категорије ${}_R\mathfrak{M}_T$ у категорију ${}_S\mathfrak{M}_T$, а придруживање

$$X \mapsto \mathrm{Hom}_R(X, B), \quad (X \xrightarrow{\phi} Y) \mapsto (\mathrm{Hom}_R(Y, B) \xrightarrow{\phi^*} \mathrm{Hom}_R(X, B)$$

један контраваријантни функтор из категорије ${}_R\mathfrak{M}_S$ у категорију ${}_S\mathfrak{M}_T$.

**Доказ.** Заправо смо скоро све доказали у претходној дискусији. Остало је само да се покаже да су $\phi_*$ и $\phi^*$ хомоморфизми одговарајућих модула. Докажимо то за $\phi_*$.

Дакле, треба показати да је $\phi_*(s \cdot \alpha) = s \cdot \phi_*(\alpha)$, за $s \in S$ и $\phi_*(\alpha \cdot t) = \phi_*(\alpha) \cdot t$, за $t \in T$. Нека је $a \in A$.

$$\begin{aligned}&\phi_*(s \cdot \alpha)(a) = (\phi \circ (s \cdot \alpha))(a) = \phi((s \cdot \alpha)(a)) = \phi(\alpha(a \cdot s))\\ &= (\phi \circ \alpha)(a \cdot s) = \phi_*(\alpha)(a \cdot s) = (s \cdot \phi_*(\alpha))(a), \text{ па је } \phi_*(s \cdot \alpha) = s \cdot \phi_*(\alpha).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\phi_*(\alpha \cdot t)(a) = (\phi \circ (\alpha \cdot t))(a) = \phi((\alpha \cdot t)(a)) = \phi(\alpha(a) \cdot t)\\ &= \phi(\alpha(a)) \cdot t = (\phi_*(\alpha))(a) \cdot t = (\phi_*(\alpha) \cdot t)(a), \text{ па је } \phi_*(\alpha \cdot t) = \phi_*(\alpha) \cdot t.\end{aligned}$$

Доказ за $\phi^*$ остављамо читаоцима за вежбу. □

Све ово што смо радили могло је да се примени и када имамо ситуацију у којој су $A$ и $B$ десни $R$-модули, тј. у случају да разматрамо $\mathrm{Hom}_R(A, B)$, где $A \in_S \mathfrak{M}_R$, а $B \in_T \mathfrak{M}_R$, но то се може свести на претходно тако што идентификујемо ${}_S\mathfrak{M}_R$ са ${}_{R^{\mathrm{op}}}\mathfrak{M}_{S^{\mathrm{op}}}$ и ${}_T\mathfrak{M}_R$ са ${}_{R^{\mathrm{op}}}\mathfrak{M}_{T^{\mathrm{op}}}$. Остављамо читаоцима формулације и провере тих тврђења (директно, без ове идентификације). То је добра, мада можда мало досадна вежба. Добро је да то бар једном „прође кроз руку".

**Теорема 39.** Посматрајмо прстен $R$ као један $(R, R)$ модул (коришћењем множења у самом прстену). Уколико је $B \in_R \mathfrak{M}_S$, онда је $\mathrm{Hom}_R(R, B) \in_R \mathfrak{M}_S$ и постоји природан изоморфизам $\mathrm{Hom}_R(R, B) \cong B$.

**Доказ.** Дефинишемо функцију $F_B\colon \mathrm{Hom}_R(R, B) \to B$ са $F_B(\phi) := \phi(1)$.

$F_B$ је хомоморфизам модула.

$$F_B(\phi + \psi) = (\phi + \psi)(1) = \phi(1) + \psi(1) = F_B(\phi) + F_B(\psi);$$

$$F_B(r\cdot\phi) = (r\cdot\phi(1)) = \phi(1\cdot r) = \phi(r) = r\cdot\phi(1) = r\cdot F_B(\phi);$$
$$F_B(\phi\cdot s) = (\phi\cdot s)(1) = \phi(1)\cdot s = F_B(\phi)\cdot s.$$

$F_B$ је „на”. Нека је $b\in B$ произвољан. Дефинишемо $\phi\in \mathrm{Hom}_R(R,B)$ са: $\phi(r) := r\cdot b$. Овако дефинисано $\phi$ јесте хомоморфизам левих модула. Наиме, $\phi(r_1+r_2) = (r_1+r_2)\cdot b = r_1\cdot b + r_2\cdot b = \phi(r_1)+\phi(r_2)$; такође је $\phi(rr_1) = (rr_1)\cdot b = r\cdot(r_1\cdot b) = r\cdot\phi(r_1)$. Како је $F_B(\phi) = \phi(1) = 1\cdot b = b$, то је $F_B$ „на”.

$F_B$ је „1–1”. Нека је $F_B(\phi) = F_B(\psi)$. Тада је $\phi(1) = \psi(1)$. Ако је $r\in R$ произвољан, имамо да је $\phi(r) = r\cdot\phi(1) = r\cdot\psi(1) = \psi(r)$, па је заиста $\phi = \psi$.

Природност. Нека је $\alpha\colon B\to B'$ хомоморфизам модула. Треба показати да важи једнакост: $\alpha\circ F_B = F_{B'}\circ\alpha_*$. У ту сврху, нека је $\phi\in\mathrm{Hom}_R(R,B)$.

$$(\alpha\circ F_B)(\phi) = \alpha(F_B(\phi)) = \alpha(\phi(1)) = (\alpha\circ\phi)(1) = \alpha_*(\phi)(1) = F_{B'}(\alpha_*(\phi)) = (F_{B'}\circ\alpha_*)(\phi). \quad \square$$

**Теорема 40.** Нека $A, A_i{\in}_R\mathfrak{M}_S$, $B, B_i{\in}_R\mathfrak{M}_T$, за $i\in I$. Тада постоје природни изоморфизми $(S,T)$-бимодула:

$$\mathrm{Hom}_R(A, \Pi_{i\in I}B_i) \cong \Pi_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(A, B_i),\ \mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I}A_i, B) \cong \Pi_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(A_i, B).$$

**Доказ.** Ово лако следи из својстава производа и копроизвода: хомоморфизам у производ је потпуно одређен компонентама и слично за копроизвод. $\square$

**Дефиниција 41.** Претпоставимо да је $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ коваријантан функтор из неке категорије модула у неку категорију модула. Тада кажемо да је он ЛЕВО ТАЧАН ако кратак тачан низ у $\mathcal{C}$

$$0\to A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\epsilon} A'' \to 0 \tag{9}$$

преводи у тачан низ у $\mathcal{D}$

$$0\to F(A') \xrightarrow{F(\mu)} F(A) \xrightarrow{F(\epsilon)} F(A'').$$

У случају да је $F$ контраваријантан функтор, кажемо да је лево тачан ако кратак тачан низ (20) преводи у тачан низ

$$0\to F(A'') \xrightarrow{F(\epsilon)} F(A) \xrightarrow{F(\mu)} F(A').$$

**Теорема 42.** Оба функтора разматрана у теореми 38 су лево тачни.

**Доказ.** Потребно је само доказати да су следећи низови тачни:

$$0\to \mathrm{Hom}_R(B,A') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_R(B,A) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathrm{Hom}_R(B,A'') \tag{10}$$

$$0\to \mathrm{Hom}_R(A'',B) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Hom}_R(A,B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_R(A',B) \tag{11}$$

Но, ми смо имплицитно практично све ово доказали доказујући теорему 30! Али, урадимо то ипак сада и експлицитно.

Уколико је $\mu_*(\phi) = 0$, то значи да је $\mu \circ \phi = 0$, те је, за све $b \in B$: $\mu(\phi(b)) = 0$, те из чињенице да је $\mu$ „1–1" следи да је $\phi(b) = 0$. Стога је $\phi = 0$ и $\mu_*$ је „1–1". Уколико је $\epsilon_*(\psi) = 0$, то значи да је $\epsilon \circ \psi = 0$, те је $\operatorname{Im}\psi \subseteq \operatorname{Ker}\epsilon = \operatorname{Im}\mu$. Стога за сваки $b \in B$ постоји (и то тачно један, јер је $\mu$ „1–1") $a' \in A'$ такав да је $\mu(a') = \psi(b)$. Стога имамо дефинисану функцију $\theta\colon B \to A'$ са: $\theta(b) = a' \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mu(a') = \psi(b)$. Проверите за вежбу да је $\theta \in \operatorname{Hom}_R(B, A')$. Тада имамо да је $\mu_*(\theta) = \mu \circ \theta = \psi$.

Уколико је $\epsilon^*(\gamma) = 0$, за $\gamma \in \operatorname{Hom}_R(A'', B)$, то је $\gamma \circ \epsilon = 0$. Ако је $a'' \in A''$, како је $\epsilon$ „на", то постоји $a \in A$ тако да је $a'' = \epsilon(a)$, па је $\gamma(a) = \gamma(\epsilon(a'')) = (\gamma \circ \epsilon)(a') = 0$, па је заправо $\gamma = 0$. Уколико је $\mu^*(\psi) = 0$, за $\psi \in \operatorname{Hom}_R(A, B)$, то је $\psi \circ \mu = 0$. То значи да је ограничење $\psi$ на $\operatorname{Im}\mu = \operatorname{Ker}\epsilon$ једнако нули. Стога можемо дефинисати хомоморфизам $\overline{\psi}\colon A/\operatorname{Ker}\epsilon \to B$ са: $\overline{\psi}(a + \operatorname{Ker}\epsilon) := \psi(a)$. Наиме, ако је $a + \operatorname{Ker}\epsilon = a_1 + \operatorname{Ker}\epsilon$, онда је $a - a_1 \in \operatorname{Ker}\epsilon$, па је $\psi(a - a_1) = 0$, те је $\psi(a) = \psi(a_1)$. Проверите да је $\overline{\psi}$ хомоморфизам модула. Како је $\epsilon$ „на", то постоји изоморфизам $\overline{\epsilon} : A/\operatorname{Ker}\epsilon \cong A''$ који $a + \operatorname{Ker}\epsilon$ слика у $\epsilon(a)$. Нека је $\theta = \overline{\psi} \circ \overline{\epsilon}^{-1} \in \operatorname{Hom}_R(A'', B)$. Нека је $a \in A$. Тада је

$$\theta(\epsilon(a)) = \overline{\psi}(\overline{\epsilon}^{-1}(\epsilon(a)) = \overline{\psi}(a + \operatorname{Ker}\epsilon) = \psi(a).$$

Дакле, $\epsilon^*(\theta) = \theta \circ \epsilon = \psi$. □

# 4 Функтор $\bigotimes$

Било би корисно да су читаоци упознати са тензорским производом Абелових група, но то није неопходно у ономе што следи пошто ћемо све извести *ab ovo*.

**Дефиниција 43.** Нека $A \in_R \mathfrak{M}_S$, $B \in_S \mathfrak{M}_T$. Дефинишемо $A \otimes_S B$, тензорски производ од $A$ и $B$ над $S$ на следећи начин. Нека је $\mathcal{F}(A \times B)$ слободна Абелова група са скупом генератора $A \times B$. Посматрамо подгрупу $\mathcal{R}(A \times B)$ ове групе генерисану елементима:

- $(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$, $a_1, a_2 \in A$, $b \in B$;
- $(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$, $a \in A$, $b_1, b_2 \in B$;
- $(as, b) - (a, sb)$, $a \in A$, $b \in B$, $s \in S$.

$$A \otimes_S B := \mathcal{F}(A \times B)/\mathcal{R}(A \times B).$$

**Став 44.** На Абеловој групи $A \otimes_S B$ задајемо структуру $(R, T)$-бимодула са:

$$r \cdot (a \otimes b) := (ra) \otimes b, \text{ за } a, \in A, b \in B, r \in R$$

$$(a \otimes b) \cdot t := a \otimes (bt), \text{ за } a \in A, b \in B, t \in T.$$

Са $a \otimes b$ означавамо класу елемента $(a, b) \in \mathcal{F}$.

**Доказ.** Како је скуп генератора за $\mathcal{F}(A \times B)$ скуп $A \times B$, то је сваки елемент из $\mathcal{F}(A \times B)/\mathcal{R}(A \times B)$ класа елемента $(a_1, b_1) + \cdots + (a_k, b_k) - (a_{k+1}, b_{k+1}) - \cdots - (a_n, b_n)$ за неке $a_i \in A$, $b_j \in B$, тј. добија се сабирањем и одузимањем класа елемената $(a_i, b_i)$, тј. сабирањем и одузимањем $a_i \otimes b_i$. Дакле, елементи облика $a \otimes b$, за $a \in A$ и $b \in B$ су генератори ове групе. Но, не постоји јединственост приказа елемената из групе $\mathcal{F}(A \times B)/\mathcal{R}(A \times B)$ у овом облику, тј. може се десити да имамо једнакост

$$\begin{aligned} a_1 \otimes b_1 + \cdots + a_k \otimes b_k - a_{k+1} \otimes b_{k+1} - \cdots - a_n \otimes b_n \\ = a_1' \otimes b_1' + \cdots + a_l' \otimes b_l' - a_{l+1}' \otimes b_{l+1}' - \cdots - a_m' \otimes b_m', \end{aligned} \tag{12}$$

при чему се ни број сабирака са леве и десне стране не мора поклапати, нити знаци самих сабирака, нити поједини сабирци. Ако бисмо користили суму са леве стране, онда бисмо множењем са $r$ слева добили елемент

$$(ra_1) \otimes b_1 + \cdots + (ra_k) \otimes b_n - (ra_{k+1}) \otimes b_{k+1} - \cdots - (ra_n) \otimes b_n, \tag{13}$$

а ако бисмо користили суму са десне стране, добили бисмо елемент

$$(ra_1') \otimes b_1' + \cdots + (ra_l') \otimes b_l' - (ra_{l+1}') \otimes b_{r+1}' - \cdots - (ra_m') \otimes b_m' \tag{14}$$

и морамо се уверити да се ради о истом елементу. Но, шта значи то да имамо једнакост (12)? То заправо значи да

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) + \cdots + (a_k, b_k) - (a_{k+1}, b_{k+1}) - \cdots - (a_n, b_n) \\ - (a_1', b_1') - \cdots - (a_l', b_l') + (a_{l+1}', b_{l+1}') + \cdots + (a_m', b_m') \in \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{15}$$

Једнакост елемената (13) и (14) еквивалентна је са

$$\begin{aligned} (ra_1, b_1) + \cdots + (ra_k, b_k) - (ra_{k+1}, b_{k+1}) - \cdots - (ra_n, b_n) \\ - (ra_1', b_1') - \cdots - (ra_l', b_l') + (ra_{l+1}', b_{l+1}') + \cdots + (ra_m', b_m') \in \mathcal{R}. \end{aligned} \tag{16}$$

Овде треба обратити пажњу на чињеницу да је $\mathcal{R}(A \times B) \subseteq \mathcal{F}(A \times B)$ и да су у $\mathcal{F}(A \times B)$ елементи $(a, b)$ СЛОБОДНИ генератори, па међу њима нема никаквих веза!

Покажимо да ако $\sum_i \pm_i (x_1, y_i) \in \mathcal{R}(A \times B)$, онда и $\sum_i \pm_i (rx_i, y_i)$ припада $\mathcal{R}(A \times B)$, за све $x_i \in A$, $y_i \in B$, $r \in R$, $\pm_i \in \{+, -\}$. Из тога следи да (15) $\Rightarrow$ (16). Довољно је показати да су генератори у $\mathcal{R}(A \times B)$. А то није тешко.

- Из $(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \in \mathcal{R}(A \times B)$ имамо да је $(r(a_1 + a_2), b) - (ra_1, b) - (ra_2, b) = (ra_1 + ra_2) - (ra_1, b) - (ra_2, b) \in \mathcal{R}(A \times B)$ (користили смо да је $r(a_1 + a_2) = ra_1 + ra_2$ у $A$).

- Из $(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2) \in \mathcal{R}(A \times B)$ непосредно следи да $(ra, b_1 + b_2) - (ra, b_1) - (ra, b_2) \in \mathcal{R}(A \times B)$.

- Из $(as, b) - (a, sb) \in \mathcal{R}(A \times B)$ имамо да је $(r(as), b) - (ra, sb) = ((ra)s, b) - (ra, sb) \in \mathcal{R}(A \times B)$ (користили смо да је $r(as) = (ra)s$ у $A$).

Овим смо показали да је множење елементима из $R$ слева добро дефинисано. На аналогни начин се доказује да је и множење елементима из $T$ здесна добро дефинисано. Остављамо читаоцима да то ураде, као и да доврше доказ да се овако заиста добија $(R, T)$-бимодул. □

Уколико је $S = \mathbb{Z}$, уместо $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ кратко ћемо писати само $A \otimes B$. На основу дефиниције, у модулу $A \otimes_S B$ важе следеће релације:

$$(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \quad a \otimes (b_1 + b_2) = a \otimes b_1 + a \otimes b_2, \tag{17}$$

за све $a, a_1, a_2 \in A$ и $b, b_1, b_2 \in B$, као и

$$as \otimes b = a \otimes sb, \tag{18}$$

за све $a \in A$, $b \in B$ и $s \in S$.

Доказ следећег става остављамо читаоцима уз напомену да је можда очигледан, али да ипак покушају да све то лепо протумаче.

**Став 45.** *(i)* $A_1 \otimes_S A_2 \cong A_2 \otimes_{S^{\mathrm{op}}} A_1$.
*(ii)* Ако $A \in_R \mathfrak{M}_S$, $B \in_S \mathfrak{M}_T$, $C \in {}_T\mathfrak{M}_U$, онда је

$$(A \otimes_S B) \otimes_T C \cong A \otimes_S (B \otimes_T C).$$

**Став 46.** Ако $A \in_R \mathfrak{M}_S$ и ако се $R$ посматра као $(R, R)$-бимодул, онда је $R \otimes_R A \cong A$.

**Доказ.** Дефинишемо $\phi\colon A \to R \otimes_R A$ са: $\phi(a) = 1 \otimes a$.

$\phi$ је хомоморфизам бимодула.

$$\phi(a_1 + a_2) = 1 \otimes (a_1 + a_2) = 1 \otimes a_1 + 1 \otimes a_2 = \phi(a_1) + \phi(a_2);$$

$$\phi(ra) = 1 \otimes (ra) = 1r \otimes a = r1 \otimes a = r \cdot (1 \otimes a) = r \cdot \phi(a).$$

$$\phi(as) = 1 \otimes (as) = (1 \otimes a) \cdot s = \phi(a) \cdot s$$

$\phi$ је „на”. Тензорски производ је генерисан елементима $r \otimes a$, за $r \in R$ и $a \in A$. Но, $r \otimes a = 1 \otimes ra = \phi(ra)$. Како су сви генератори у $\operatorname{Im} \phi$, то је $\phi$ „на”.

$\phi$ је „1–1”. Претпоставимо да је $\phi(a) = 0$. То значи да $(1, a) \in \mathcal{R}$ (видети дефиницију тензорског производа). Можемо да дефинишемо функцију $f\colon R \times A \to A$ са: $f(r, a) = ra$. Ако је $\mathcal{F}(R \times A)$ слободна Абелова група са скупом генератора $R \times A$, онда постоји јединствен хомоморфизам

Абелових група $\overline{f}\colon \mathcal{F}(R\times A)\to A$ за који је $\overline{f}(r,a)=f(r,a)=ra$ за све $r\in R$, $a\in A$. Приметимо да је

$$\begin{aligned}\overline{f}\big((r_1+r_2,a)-(r_1,a)-(r_2,a)\big)&=\overline{f}(r_1+r_2,a)-\overline{f}(r_1,a)-\overline{f}(r_2,a)\\&=(r_1+r_2)a-r_1a-r_2a=0.\end{aligned}$$

Слично,

$$\begin{aligned}\overline{f}\big((r,a_1+a_2)-(r,a_1)-(r,a_2)\big)&=\overline{f}(r,a_1+a_2)-\overline{f}(r,a_1)-\overline{f}(r,a_2)\\&=r(a_1+a_2)-ra_1-ra_2=0.\end{aligned}$$

Наравно, имамо и да је $\overline{f}\big((rs,a)-(r,sa)\big)=\overline{f}(rs,a)-\overline{f}(r,sa)=(rs)a-r(sa)=0$. Дакле, $\overline{f}$ слика сваки генератор од $\mathcal{R}(R\times A)$ у нулу, па стога слика целу ту подгрупу у 0. Самим тим је и $a=1\cdot a=\overline{f}(1,a)=0$.

Тиме смо завршили доказ да је $\phi$ изоморфизам модула. $\square$

Користили смо да се сваки елемент у тензорском производу $A\otimes_R B$ може приказати у облику $a_1\otimes b_1+\cdots+a_k\otimes b_k-a_{k+1}\otimes b_{k+1}-\cdots a_n\otimes b_n$ за неке $k$ и $n$ и неке $a_i\in A$, $b_j\in B$. Заправо се сваки елемент може приказати у облику збира елемената облика $a\otimes b$, без коришћења знака за одузимање.

Најпре: $0_A\otimes b=0_{A\otimes_R B}$, за све $b\in B$; такође је: $a\otimes 0_B=0_{A\otimes_R B}$ за све $a\in A$. Наиме,

$$0_A\otimes b=(0_A+0_A)\otimes b=0_A\otimes b+0_A\otimes b \text{ (на основу (17)}$$

и скраћивањем у Абеловој групи $A\otimes_R B$ добијамо да је $0_A\otimes b=0_{A\otimes_R B}$. Одавде лако следи да је $-(a\otimes b)=(-a)\otimes b$:

$$a\otimes b+(-a)\otimes b=(a+(-a))\otimes b=0_A\otimes b=0_{A\otimes_R B}.$$

Наравно, на исти начин можемо радити са другим фактором у тензорском производу. Сада видимо зашто се сваки елемент у тензорском производу може приказати у облику збира елемената облика $a\otimes b$.

Нека је $\alpha\colon A\to A'$ у ${}_R\mathfrak{M}_S$ и $\beta\colon B\to B'$ у ${}_S\mathfrak{M}_T$. Желимо да дефинишемо $\alpha\otimes\beta\colon A\otimes_R B\to A'\otimes_R B'$ тако да буде $(\alpha\otimes\beta)(a\otimes b)=\alpha(a)\otimes\beta(b)$ за све $a\in A$ И $b\in B$. То ћемо урадити на следећи начин. Дефинишемо функцију $f\colon A\times B\to A'\otimes_R B'$ са $f(a,b):=\alpha(a)\otimes\beta(b)$. Ако је $\mathcal{F}(A\times B)$ слободна Абелова група са скупом генератора $A\times B$, онда постоји јединствен хомоморфизам Абелових група $\overline{f}\colon \mathcal{F}(A\times B)\to A'\otimes_R B'$, такав да је $\overline{f}(a,b)=\alpha(a)\otimes\beta(b)$. Да бисмо имали хомоморфизам из тензорског производа морамо проверити да се сви елементи из $\mathcal{R}(A\times B)$ сликају у нулу.

$$\begin{aligned}\overline{f}\big((a_1+a_2,b)-(a_1,b)-(a_2,b)\big)&=\overline{f}(a_1+a_2,b)-\overline{f}(a_1,b)-\overline{f}(a_2,b)\\&=\alpha(a_1+a_2)\otimes\beta(b)-\alpha(a_1)\otimes\beta(b)=\alpha(a_2)\otimes\beta(b)\\&=\big(\alpha(a_1)+\alpha(a_2)\big)\otimes\beta(b)-\alpha(a_1)\otimes\beta(b)=\alpha(a_2)\otimes\beta(b)=0 \text{ (на основу (17))}.\end{aligned}$$

Аналогно се добија да је $\overline{f}\big((a, b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2)\big)=0$.

$$\begin{aligned}\overline{f}\big((as,b)-(a,sb)\big) &= \overline{f}(as,b)-\overline{f}(a,sb)=\alpha(as)\otimes\beta(b)-\alpha(a)\otimes\beta(sb)\\ &= \alpha(a)s\otimes\beta-\alpha(a)\otimes s\beta(b) \text{ ($\alpha$ и $\beta$ су хомоморфизми бимодула)}\\ &= 0 \text{ (на освову релације (18)).}\end{aligned}$$

Дакле, заиста $\overline{f}$ слика сваки елемент из $\mathcal{R}(A\times B)$ у нулу, па индукује хомоморфизам Абелових група (који ћемо означити онако како смо желели) $\alpha\otimes\beta\colon A\otimes_R B\to A'\otimes_R B'$. Како је $a\otimes b$ заправо класа елемента $(a,b)$, видимо да је заиста $(\alpha\otimes\beta)(a\otimes b)=\alpha(a)\otimes\beta(b)$. Само још треба проверити да је ово хомоморфизам бимодула.

$$\begin{aligned}(\alpha\otimes\beta)(r\cdot(a\otimes b)) &= (\alpha\otimes\beta)(ra\otimes b)=\alpha(ra)\otimes\beta(b)\\ &= r\alpha(a)\otimes\beta(b)=r\cdot(\alpha(a)\otimes\beta(b)) \text{ ($\alpha$ је хомоморфизам бимодула)}\\ &= r\cdot(\alpha\otimes\beta)(a\otimes b).\end{aligned}$$

Слично се показује да је $(\alpha\otimes\beta)((a\otimes b)\cdot t)=(\alpha\otimes\beta)(a\otimes b)\cdot t$.

Уколико $\alpha'\colon A'\to A''$ и $\beta'\colon B'\to B''$, онда је

$$\begin{aligned}((\alpha'\otimes\beta')\circ(\alpha\otimes\beta))(a\otimes b) &= (\alpha'\otimes\beta')\big((\alpha\otimes\beta)(a\otimes b)\big)\\ &= (\alpha'\otimes\beta')(\alpha(a)\otimes\beta(b))=\alpha'(\alpha(a)\otimes\beta'(\beta(b))=(\alpha'\circ\alpha)(a)\otimes(\beta'\circ\beta)(b),\end{aligned}$$

па је $(\alpha'\otimes\beta')\circ(\alpha\otimes\beta)=(\alpha'\circ\alpha)\otimes(\beta'\circ\beta)$.

Ово нам омогућава да тензорски производ, као и Hom, посматрамо као функтор на два начина.

1. $A\otimes_S -\colon Y\mapsto A\otimes Y$, $(\beta\colon Y\to Y')\mapsto(\mathrm{id}_A\otimes\beta\colon A\otimes_S Y\to A\otimes_S Y')$.
2. $-\otimes B\colon A\mapsto X\otimes B$, $(\alpha\colon X\to X')\mapsto(\alpha\otimes\mathrm{id}_B\colon X\otimes_S B\to X'\otimes_S B)$.

Лако се можемо уверити да ово јесу (коваријантни) функтори.

**Теорема 47.** Овако задати функтори су десно тачни, тј.

а) за сваки кратак тачан низ у ${}_R\mathfrak{M}_S$

$$0\to A'\xrightarrow{\mu}A\xrightarrow{\epsilon}A''\to 0$$

и $B\in{}_S\mathfrak{M}_T$ низ

$$A'\otimes_S B\xrightarrow{\mu\otimes\mathrm{id}_B}A\otimes_S B\xrightarrow{\epsilon\otimes\mathrm{id}_B}A''\otimes_S B\to 0$$

је тачан у ${}_R\mathfrak{M}_T$ и

б) за сваки кратак тачан низ у ${}_S\mathfrak{M}_T$

$$0\to B'\xrightarrow{\phi}B\xrightarrow{\psi}B''\to 0$$

и $A \in_R \mathfrak{M}_S$ низ

$$A \otimes_S B' \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \phi} A \otimes_S B \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \psi} A \otimes_S B'' \to 0$$

је тачан у ${}_R\mathfrak{M}_T$.

**Доказ.** Доказаћемо део под а). Део под б) доказује се на аналоган начин. Како је $\epsilon \circ \mu = 0$, то је и $(\epsilon \otimes \mathrm{id}_B) \circ (\mu \otimes \mathrm{id}_B) = (\epsilon \circ \mu) \otimes (\mathrm{id}_B \circ \mathrm{id}_B) = 0 \otimes \mathrm{id}_B = 0$. Пошто је $\epsilon$ „на”, то за сваки $a'' \in A''$ постоји $a \in A$ тако да је $\epsilon(a) = a''$, па, стога, за сваки адитивни генератор $a'' \otimes b$ за $A'' \otimes B$ постоји $a \in A$ и $b \in B$ тако да је $(\epsilon \otimes \mathrm{id}_B)(a \otimes b) = \epsilon(a) \otimes \mathrm{id}_B(b) = a'' \otimes b$, те је $\epsilon \otimes \mathrm{id}_B$ такође „на”. Остаје да се докаже да је $\mathrm{Ker}(\epsilon \otimes \mathrm{id}_B) \subseteq \mathrm{Im}(\mu \otimes \mathrm{id}_B)$.

Нека је $P = A \otimes_S B / \mathrm{Im}(\mu \otimes \mathrm{id}_B)$. Ако је $z \in A \otimes_S B$, са $[z]$ означавамо његову класу у $P$. Дефинишемо функцију $f\colon A'' \times B \to P$ са:

$$f(a'', b) := [a \otimes b] \overset{\mathrm{def}}{\iff} \epsilon(a) = a''.$$

Покажимо да је функција добро дефинисана. Наиме, претпоставимо да је $\epsilon(a) = \epsilon(a_1) = a''$. То значи да је $a - a_1 \in \mathrm{Ker}\,\epsilon = \mathrm{Im}\,\mu$, те постоји $a' \in A'$ тако да је $a - a_1 = \mu(a')$. Но, то значи да је

$$a \otimes b - a_1 \otimes b = (a - a_1) \otimes b = \mu(a') \otimes b = (\mu \otimes \mathrm{id}_B)(a' \otimes b),$$

па $a \otimes b - a_1 \otimes b \in \mathrm{Im}(\mu \otimes \mathrm{id}_B)$ те је $[a \otimes b] = [a_1 \otimes b]$.

Стога $f$ дефинише на тачно један начин хомоморфизам Абелових група $\overline{f}\colon \mathcal{F}(A'' \times B) \to P$, тако да је $\overline{f}(a'', b) = f(a'', b)$, где је, наравно, $\mathcal{F}(A'' \times B)$, слободна Абелова група са скупом генератора $A'' \times B$. Означимо, као и раније, са $\mathcal{R}(A'' \times B)$ подгрупу ове групе из дефиниције 43. Тада је $A'' \otimes B = \mathcal{F}(A'' \times B) / \mathcal{R}(A'' \times B)$.

Нека $\sum_i a_i \otimes b_i \in \mathrm{Ker}(\epsilon \otimes \mathrm{id}_B)$. То значи да је $\sum_i \epsilon(a_i) \otimes b_i = 0_{A'' \otimes B}$, односно, то значи да $\sum_i (\epsilon(a_i), b_i) \in \mathcal{R}(A'' \times B)$. Покажимо да $\overline{f}$ слика све елементе из $\mathcal{R}(A'' \times B)$ у $0_P$. Наравно, проверавамо на генераторима. Нека су $a_1'', a_2'' \in A''$, $b \in B$. Уколико је $\epsilon(a_1) = a_1''$ и $\epsilon(a_2) = a_2''$, онда је $\epsilon(a_1 + a_2) = \epsilon(a_1) + \epsilon(a_2) = a_1'' + a_2''$, па имамо да је $f(a_1'', b) = [a_1 \otimes b]$, $f(a_2'', b) = [a_2 \otimes b]$ и $f(a_1'' + a_2'', b) = [(a_1 + a_2) \otimes b]$. Стога

$$\begin{aligned}
&\overline{f}\big((a_1'' + a_2'', b) - (a_1'', b) - (a_2'', b)\big) = f(a_1'' + a_2'', b) - f(a_1'', b) - f(a_2'', b) \\
&= [(a_1 + a_2) \otimes b] - [a_1 \otimes b] - [a_2 \otimes b] = [a_1 \otimes b + a_2 \otimes b] - [a_1 \otimes b] - [a_2 \otimes b] \\
&\qquad = [a_1 \otimes b] + [a_2 \otimes b] - [a_1 \otimes b] - [a_2 \otimes b] = 0_P.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{f}\big((a'', b_1 + b_2) - (a'', b_1) - (a'', b_2)\big) &= f(a'', b_1 + b_2) - f(a'', b_1) - f(a'', b_2) \\
&= [a \otimes (b_1 + b_2)] - [a \otimes b_1] - [a \otimes b_2] = 0_P.
\end{aligned}$$

Уколико је $\epsilon(a) = a''$ и $s \in S$, онда је $\epsilon(as) = \epsilon(a)s = a''s$, па имамо да је $f(a'', b) = [a \otimes b]$ и $f(a''s, b) = [as \otimes b]$.

$$\overline{f}\big((as, b) - (a, sb)\big) = f(as, b) - f(a, sb) = [as \otimes b] - [a \otimes sb] = [a \otimes sb] - [a \otimes sb] = 0_P.$$

Дакле, $\overline{f}$ слика сваки елемент из $\mathcal{R}(A'' \times B)$ у $0_P$, што значи да добијамо да је и $\overline{f}\big(\sum_i (\epsilon(a_i), b_i)\big) = 0_P$. Но,

$$\overline{f}\big(\sum_i (\epsilon(a_i), b_i)\big) = \sum_i f(\epsilon(a_i), b_i) = \sum_i [a_i \otimes b_i] = \left[\sum_i (a_i \otimes b_i)\right],$$

што значи да $\sum_i (a_i \otimes b_i) \in \mathrm{Im}(\mu \otimes \mathrm{id}_B)$. □

**Теорема 48.** Нека $A, A_i \in {}_R\mathfrak{M}_S$, за $i \in I$; $B, B_i \in {}_S\mathfrak{M}_T$, за $i \in I$. Тада

$$\big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \otimes_S B \cong \bigoplus_{i \in I} \big(A_i \otimes_S B\big) \text{ и } A \otimes_S \big(\bigoplus_{i \in I} B_i\big) \cong \bigoplus_{i \in I} (A \otimes_S B_i).$$

**Доказ.** Докажимо само први изоморфизам, други се доказује аналогно. Показаћемо да $\big(\big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \otimes_S B; (q_k)_{k \in I}\big)$ испуњава услове дефиниције копроизвода $(R,T)$-бимодула $A_i \otimes_S B$, за погодно изабране хомоморфизме $q_k \colon A_i \otimes_S B \to \big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \otimes_S B$, за $k \in I$. Најпре дефинишимо те хомоморфизме. Пођимо од функција $g_k \colon A_k \times B \to \big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \otimes_S B)$ дефинисаних са $g_k(a_k, b) := (\overline{a_k})_{i \in I} \otimes b$, где је

$$(\overline{a_k})_i := \begin{cases} a_k, & i = k \\ 0_{A_i}, & i \neq k. \end{cases}$$

Напоменимо да овде користимо реализацију копроизвода модула $A_i$ у облику подскупа производа $\Pi_{i \in I} A_i$ у којима је само коначно много компонената различито од нуле, а операције су по координатама. Тада имамо јединствене хомоморфизме $\overline{g}_k \colon \mathcal{F}(A_k \times B) \to \big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \otimes_S B$, такве да је $\overline{g}_k(a_k, b) = g_k(a_k, b)$ за све $(a_k, b) \in A_k \times B$. Као и раније, лако се провери да $\overline{g}_k$ слика све елементе из $\mathcal{R}(A_k \times B)$ у нулу, те добијамо индуковане хомоморфизме $q_k \colon A_k \otimes_S B \to \big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \otimes_S B$.

Нека је $C \in {}_R\mathfrak{M}_T$, $\phi_i \colon A_i \otimes_S B \to C$ у ${}_R\mathfrak{M}_T$. Треба показати да постоји јединствен хомоморфизам $\phi \colon \big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \otimes_S B \to C$ такав да је $\phi \circ q_i = \phi_i$ за све $i \in I$.

Најпре дефинишемо функцију $f \colon \big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \times B \to C$ са: $f((a_i)_{i \in I}, b) := \sum_{i \in I} \phi_i(a_i \otimes b)$. Ова сума је коначна, јер је $a_i \neq 0$ само за коначно много $i \in I$. Понављамо добро нам познати поступак. Са $\mathcal{F}$ означимо слободну Абелову групу са групом генератора $\big(\bigoplus_{i \in I} A_i\big) \times B$, а са $\mathcal{R}$ подгрупу генерисану елементима из дефиниције 43. Задата функција $f$ се на јединствен начин продужава до хомоморфизма $\overline{f} \colon \mathcal{F} \to C$ Абелових група. Генератори из $\mathcal{R}$ сликају се у $0_C$.

$$\begin{aligned}
&\overline{f}\big(((a_i)_{i\in I}+(\bar{a}_i)_{i\in I},b)-((a_i)_{i\in I},b)-((\bar{a}_i)_{i\in I},b)\big)\\
&\qquad\qquad = f\big((a_i)_{i\in I}+(\bar{a}_i)_{i\in I},b\big)-f\big((a_i)_{i\in I},b\big)-f\big((\bar{a}_i)_{i\in I},b\big)\\
&\qquad\qquad = f\big((a_i+\bar{a}_i)_{i\in I},b\big)-f\big((a_i)_{i\in I},b\big)-f\big((\bar{a}_i)_{i\in I},b\big)\\
&\qquad\qquad = \sum_{i\in I}\phi_i((a_i+\bar{a}_i)\otimes b)-\sum_{i\in I}\phi_i(a_i\otimes b)-\sum_{i\in I}\phi_i(\bar{a}_i\otimes b)\\
&\qquad\qquad = \sum_{i\in I}\big(\phi_i(a_i\otimes b+\bar{a}_i\otimes b)-\phi_i(a_i\otimes b)-\phi_i(a_i\otimes b)\big)=\\
&\qquad\qquad\qquad \sum_{i\in I}\big(\phi(a_i\otimes b)+\phi_i(\bar{a}_i\otimes b)-\phi_i(a_i\otimes b)-\phi_i(\bar{a}_i\otimes b)\big)=0_C.
\end{aligned}$$

Проверу за друга два типа генератора остављамо читаоцима. Стога $\overline{f}$ индукује хомоморфизам Абелових група $\phi\colon \mathcal{F}/\mathcal{R}\to C$. Како је $\mathcal{F}/\mathcal{R}$ заправо $\big(\bigoplus_{i\in I}A_i\big)\otimes_S B$, то смо добили $\phi\colon \big(\bigoplus_{i\in I}A_i\big)\otimes_S B\to C$, за који је $\phi((a_i)_{i\in I}\otimes b)=\sum_{i\in I}\phi_i(a_i\otimes b)$. Приметимо да је

$$(\phi\circ q_k)(a_k\otimes b)=\phi(q_k(a_k\otimes b))=\phi((\overline{a_k})_{i\in I}\otimes b)=\sum_{i\in I}\phi_i((\overline{a_k})_i\otimes b)=\phi_k(a_k\otimes b),$$

па је $\phi\circ q_k=\phi_k$ за све $k\in I$. Јасно је да је $\phi$ овако јединствено задато. Наиме, ако је $\phi'$ други хомоморфизам који задовољава услов $\phi'\circ q_k=\phi_k$ за све $k\in I$, онда, за адитивни генератор $(a_i)_{i\in I}\otimes b$ најпре приметимо да је $a_i\neq 0$ само за коначно много индекса $i$. Нека су то $i_1,\dots,i_s$. Но, тада је $(a_i)_{i\in I}$ збир од $s$ елемената код којих је компонента различита од 0 тачно на једној позицији; прецизно: $(a_i)_{i\in I}=\sum_{l=1}^{s}\overline{a_{i_s}}$. Добијамо да је

$$\begin{aligned}
\phi'((a_i)_{i\in I}\otimes b)&=\sum_{l=1}^{s}\phi'(\overline{a_{i_l}}\otimes b)=\sum_{l=1}^{s}\phi'(q_{i_l}(a_{i_l})\otimes b)\\
&=\sum_{l=1}^{s}(\phi'\circ q_{i_;})(a_{i_l}\otimes b)=\sum_{l=1}^{s}\phi_{i_l}(a_{i_l}\otimes b)=\phi((a_i)_{i\in I}\otimes b),
\end{aligned}$$

па се добија да је $\phi'=\phi$ на адитивним генераторима, те је стога $\phi'=\phi$.

Остаје да се провери да је $\phi$ хомоморфизам $(R,T)$-бимодула.

$$\begin{aligned}
&\phi\Big(r\cdot\big((a_i)_{i\in I}\otimes b\big)\Big)=\phi\big((ra_i)_{i\in I}\otimes b\big)=\sum_{i\in I}\phi_i(ra_i\otimes b)\\
&=\sum_{i\in I}\phi_i(r\cdot(a_i\otimes b))=\sum_{i\in I}r\phi(a_i\otimes b)=r\cdot\sum_{i\in I}\phi_i(a_i\otimes b)=r\cdot\phi\big((a_i)_{i\in I}\otimes b\big).
\end{aligned}$$

Проверите за вежбу слагање са множењем здесна елементима из $T$. $\square$

**Пример 49.** Посматрајмо категорију $Set$ свих скупова и функција међу њима. Тада имамо природну бијекцију између $Set(X \times Y, Z)$ и $Set(X, Set(Y, Z))$. Наиме, свакој функцији $f\colon X \times Y \to Z$ можемо придружити функцију $f^\sharp\colon X \to Set(Y, Z)$ са $f^\sharp(x)(y) := z$. Није тешко уверити се да је ово бијекција. Природност се састоји у следећем. Ако су $X', Y', Z'$ неки други скупови и $\alpha\colon X' \to X$, $\beta\colon Y' \to Y$, $\gamma\colon Z \to Z'$, бијекције за тројке $(X, Y, Z)$ и $(X', Y', Z')$ лепо се слажу са овим функцијама у следећем смислу. Ако је $f \in Set(X \times Y, Z)$, онда јој можемо придружити функцију $\gamma \circ f \circ (\alpha \times \beta) \in Set(X' \times Y', Z')$, где смо са $\alpha \times \beta$ означили која $X \times Y$ слика у $X' \times Y'$ тако што $(x, y)$ слика у $(\alpha(x), \beta(y))$. Слично, функцији $g$ из $Set(X, Set(Y, Z))$ можемо придружити функцију из $Set(X', Set(Y', Z'))$ дефинисану са: $x' \mapsto \gamma \circ g(\alpha(x')) \circ \beta$. Означимо са

$$\Phi_{(X,Y,Z)}\colon Set(X \times Y, Z) \to Set(X, Set(Y, Z))$$

горенаведену бијекцију. Тада је, за све $f \in Set(X \times Y, Z)$ и $x' \in X'$:

$$\Phi_{(X',Y',Z')}\big(\gamma \circ f \circ (\alpha \times \beta)\big)(x') = \gamma \circ \Phi_{(X,Y,Z)}(f)\big(\alpha(x')\big) \circ \beta. \tag{19}$$

Ово изгледа знатно компликованије него што у суштини јесте. Поента је да је горња бијекција дефинисана независно од било каквих избора у скуповима о којима је реч и зато се слаже са разним композицијама.

Проверимо једнакост (19). По дефиницији имамо да је, за $y' \in Y'$:

$$\Phi_{(X',Y',Z')}\big(\gamma \circ f \circ (\alpha \times \beta)\big)(x')(y') = (\gamma \circ f \circ (\alpha \times \beta))(x', y') = \gamma(f(\alpha(x'), \beta(y'))).$$

С друге стране, за $y' \in Y$:

$$(\gamma \circ \Phi_{(X,Y,Z)}(f)\big(\alpha(x')\big) \circ \beta)(y') = \gamma(\Phi_{X,Y,Z}(f)(\alpha(x')(\beta(y')) = \gamma(f(\alpha(x'), \beta(y'))).$$

Дакле, једнакост заиста важи.

Разлог зашто смо узимали, на пример, да $\alpha$ слика $X'$ у $X$, а $\gamma$ $Z$ у $Z'$ лежи у томе што такво $\alpha$, за свако $Z$, индукује пресликавање из $Set(X, Z)$ у $Set(X', Z)$, док $\gamma$ за свако $X$ индукује пресликавање из $Set(X, Z)$ у $Set(X, Z')$. Кратко, $Set(-, -)$ је контраваријантно (обрће стрелице) по првој, а коваријантно по другој компоненти.

Из ових разлога, ако фиксирамо $Y$ и посматрамо два функтора $X \mapsto X \times Y$ и $Z \mapsto Set(Y, Z))$ (уз јасно дефинисана и придруживања функција), онда наведена природна бијекција говори да је први функтор лево адјунгован другом функтору, односно, да је други функтор десно адјунгован првом функтору. ♣

Својство да неки функтор има њему десно (или лево) адјунгован функтор му даје извесне особине, али се ми тиме нећемо детаљно бавити због ограничености времена. Само наводимо важну везу између функтора $-\otimes_S B$ и $\mathrm{Hom}_T(B, -)$: први је лево адјунгован другом, односно важи следећа теорема.

**Теорема 50.** Нека $B \in {}_S\mathfrak{M}_T$. Тада постоји природан изоморфизам Абелових група
$$\mathrm{Hom}_{(R,T)}(A \otimes_S B, C) \cong \mathrm{Hom}_{(R,S)}(A, \mathrm{Hom}_T(B, C)),$$
где $A \in {}_R\mathfrak{M}_S$ и $C \in {}_R\mathfrak{M}_T$.

**Доказ.** Нека је $\theta \in \mathrm{Hom}_{(R,T)}(A \otimes_S B, C)$. Дефишемо
$$\Phi_{(A,B,C)}(\theta) \in \mathrm{Hom}_{(R,S)}(A, \mathrm{Hom}_T(B, C))$$
са: $\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(b) := \theta(a \otimes b)$. Треба показати неколико ствари.

Најпре,

$\mathbf{\Phi_{(A,B,C)}}(\theta)$ **је хомоморфизам** $(\mathbf{R}, \mathbf{S})$**-бимодула**. Нека $a \in A$, $b \in B$.

$$\begin{aligned}
\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(ra)\big)(b) &= \theta((ra) \otimes b) \\
&= \theta(r(a \otimes b)) \text{ по дефиницији структуре } R\text{-модула на } A \otimes_S B \\
&= r\theta(a \otimes b), \text{ јер је } \theta \text{ хомоморфизам } (S,T)\text{-модула} \\
&= r\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(b) = \big(r \cdot \Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(b),
\end{aligned}$$

па је $\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(r \cdot a) = r \cdot \Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)$. Овде треба напоменути да се структура $(R, S)$-бимодула на $\mathrm{Hom}_T(B, C)$ задаје са:
$$(r \cdot \phi)(b) := r(\phi(b)), \quad (\phi \cdot s)(b) := \phi(sb).$$

Проверите да је овако заиста задата структура $(R, S)$-бимодула на $\mathrm{Hom}_T(B, C)$ и упоредите са тиме како задајемо бимодулску структуру у случају хомоморфизама левих модула (почетак одељка о функтору Hom).

$$\begin{aligned}
\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(as)\big)(b) &= \theta(as \otimes b) = \theta(a \otimes sb) = \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(sb) \\
&= \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a) \cdot s\big)(b) \text{ (по структури бимодула на } \mathrm{Hom}_T(B, C)),
\end{aligned}$$

па је $\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(as) = \Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a) \cdot s$.

$$\begin{aligned}
\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a_1 + a_2)\big)(b) &= \theta((a_1 + a_2) \otimes b) = \theta(a_1 \otimes b + a_2 \otimes b) \\
&= \theta(a_1 \otimes b) + \theta(a_2 \otimes b) = \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a_1)\big)(b) + \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a_2)\big)(b) \\
&= \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a_1) + \Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a_2)\big)(b),
\end{aligned}$$

па је $\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a_1 + a_2) = \Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a_1) + \Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a_2)$.

$\mathbf{\Phi_{(A,B,C)}}(\theta)(\mathbf{a})$ **је хомоморфизам десних T-модула.**

$$\begin{aligned}
\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(b_1 + b_2) &= \theta(a \otimes (b_1 + b_2)) = \theta(a \otimes b_1 + a \otimes b_2) \\
&= \theta(a \otimes b_1) + \theta(a \otimes b_2) = \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(b_1) + \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(b_2).
\end{aligned}$$

$$\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(a)(bt) = \theta(a\otimes bt) = \theta((a\otimes b)t)$$
$$= \theta(a\otimes b)t = \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(b)t.$$

**$\mathbf{\Phi_{(A,B,C)}}$ је хомоморфизам Абелових група.**

$$\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta_1+\theta_2)(a)\big)(b) = (\theta_1+\theta_2)(a\otimes b)$$
$$= \theta_1(a\otimes b)+\theta_2(a\otimes b) = \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta_1)(a)\big)(b) + \big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta_2)(a)\big)(b),$$

па је $\Phi_{(A,B,C)}(\theta_1+\theta_2) = \Phi_{(A,B,C)}(\theta_1)+\Phi_{(A,B,C)}(\theta_2)$.

**$\mathbf{\Phi_{(A,B,C)}}$ је „1–1”.** Нека је $\Phi_{(A,B,C)}(\theta) = 0_{\mathrm{Hom}_{(R,S)}(A,\mathrm{Hom}_T(B,C))}$. То значи да је за свако $a\in A$: $\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a) = 0_{\mathrm{Hom}_T(B,C)}$. Те је за свако $a\in A$ и свако $b\in B$: $\big(\Phi_{(A,B,C)}(\theta)(a)\big)(b) = 0_C$, тј. за $\theta(a\times b)=0$ за све $a\in A$, $b\in B$. Како су ово адитивни генератори од $A\otimes_S B$, то закључујемо да је $\theta = 0_{\mathrm{Hom}_{(R,T)}(A\otimes_S B,C)}$.

**$\mathbf{\Phi_{(A,B,C)}}$ је „на”.** Нека $\xi\in\mathrm{Hom}_{(R,S)}(A,\mathrm{Hom}_T(B,C))$. Дефинишимо $f\colon A\times B\to C$ са: $f(a,b) := \xi(a)(b)$. Ако је $\overline{f}\colon \mathcal{F}(A\times B)\to C$ јединствен хомоморфизам Абелових група који проширује $f$, проверимо да слика све елементе из $\mathcal{R}(A\times B)$ у нулу.

$$\overline{f}\big((a_1+a_2,b)-(a_1,b)-(a_2,b)\big) = f(a_1+a_2,b)-f(a_1,b)-f(a_2,b)$$
$$= \xi(a_1+a_2)(b)-\xi(a_1)(b)-\xi(a_2)(b) = (\xi(a_1)+\xi(a_2))(b)-\xi(a_1)(b)-\xi(a_2)(b)$$
$$= \xi(a_1)(b)+\xi(a_2)(b)-\xi(a_1)(b)-\xi(a_2)(b) = 0_C.$$

Лако се добија и да је $\overline{f}\big((a,b_1+b_2)-(a,b_1)-(a,b_2)\big) = 0_C$.

$$\overline{f}\big((as,b)-(a,sb)\big) = f(as,b)-f(a,sb) = \xi(as)(b)-\xi(a)(sb)$$
$$= (\xi(a)\cdot s)(b)-\xi(a)(sb),\ \text{јер је } \xi \text{ хомоморфизам десних } S\text{-модула}$$
$$= \xi(a)(sb)-\xi(a)(sb)$$
$$(\text{по дефиницији структуре десног } S\text{-модула на } \mathrm{Hom}_T(B,C)) = 0_C.$$

Дакле, $\overline{f}$ индукује хомоморфизам Абелових група $\theta\colon A\otimes B\to C$ и може се проверити да је то хомоморфизам $(R,T)$-модула. Како је, по самој дефиницији $\theta(a\otimes b) = f(a,b) = \xi(a)(b)$, то је $\Phi_{(A,B,C)}(\theta) = \xi$.

Прецизно разјашњење природности и проверу остављамо читаоцима за вежбу, јер је потпуно аналогно примеру за скупове. □

**Задатак за вежбу.**

Доказати да тачност низа $R$-модула

$$A' \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\epsilon} A'' \to 0 \tag{20}$$

следи из тачности низа

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(B, A') \xrightarrow{\mu_*} \mathrm{Hom}_R(B, A) \xrightarrow{\epsilon_*} \mathrm{Hom}_R(B, A'') \tag{21}$$

за сваки $R$-модул $B$, а следи такође и из тачности

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A'', B) \xrightarrow{\epsilon^*} \mathrm{Hom}_R(A, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}_R(A', B) \tag{22}$$

за сваки $R$-модул $B$. ♠

Размислите како бисте могли да искористите овај задатак и претходну теорему да докажете теореме 47 и 48.