# ИСТОРИЈА И ФИЛОЗОФИЈА МАТЕМАТИКЕ
# Предавања за академску 2024/25. годину

Зоран Петровић

## Праисторија

Антрополози нам кажу да нема културе, ма колико примитивна била, која нема у себи неко поимање броја. Наведимо неке примере.

- Нека абориџинска племена у Аустралији немају речи за бројеве веће од 2, имају само за 1 и 2, све остало је „много”.
- Индијанци око Амазона броје до 6, но немају речи за 3, 4, 5, 6, него је 3 два-један, 4 је два-два итд.
- Бушмани слично броје по 2 до 10. Овде је занимљиво истаћи да не желе да замене 2 краве за 4 свиње, али је у реду да замене једну краву за две свиње, а потом опет исто то!

Веома је занимљива анализа бројевних система код северноамеричких Индијанаца коју је 1913. године објавио Илс. Пре свега, наводи се да има 60 језичких група, а укупно око 750 језика. Нису сви различити, сматра се да има око 500 различитих језика. У оквиру исте језичке групе су језици који су слични као што су слични, на пример, шпански, италијански и француски. За 307 бројевних система базираних на анализи језика, имамо следеће податке:

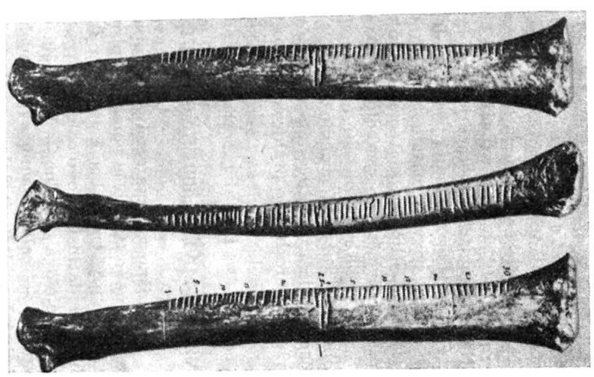
- 146 имају основу 10;
- 106 користе комбинацију основе 5 и 10;
- 35 користе комбинацију основе 5 и 20;
- 15 користе основу 4;
- 3 користе основу 3;
- 1 користи основу 8.

Не постоји чисто бинарни систем, али се трагови бинарног система налазе у 81 језику, где се појављује „дуплирање” – на пример 6 се изражава као $2 \times 3$, „поново 3”, „3, 3”, „тројке” и слично за 4, 8, 10 и 12. Сматра се да је то последица постојања великог броја природних парова (очију, шака, крила. . . ).

Једна занимљивост – на Навахо језику се број 10 изговара: „незна”.

За регистровање броја неких ствари, плодова, животиња коришћено је урезивање у камен, дрво, прављење чорова на нитима различите боје или дужине. Ако би били превелики бројеви за запис, онда би се зарези груписали у групе од по 5, 10, 20. То је значајно побољшање од бројања један по један.

Остаци костију показују да су такав начин записивања изумели људи у Старом каменом добу чак и пре 30 хиљада година. Посебно значајан пример је голењача младог вука нађена у Чехословачкој тридесетих година прошлог века. Она је дуга око 18 цм и има 55 дубока зареза који су мање-више исте дужине, а груписани су у групе од 5 зареза.

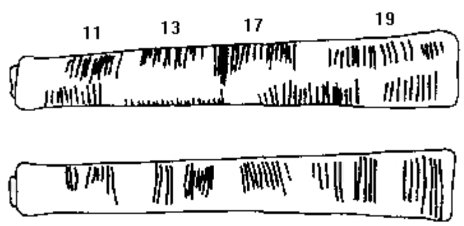


Слика 1: Кост из Старог каменог доба

Дуго се сматрало да су такви зарези записи из лова, али скорија разматрања су више склона интерпретацији да је ту било речи и о неком записивању о протоку времена. Обележавања на костима нађеним у неким француским пећинама крајем осамдесетих година XIX века су груписана у низове бројева који се понављају и који се слажу са бројем дана у узастопним Месечевим фазама. Тако да ту као да имамо неки лунарни календар.

Један изузетан примерак нађен је 1960. године у Ишангу дуж обала Језера Едвард, близу изворишта Нила. Старост тог археолошког налазишта је процењена на 17 хиљада година п. н. е. што је неких 12 хиљада година пре појављивања првих пољопривредних заједница у долини Нила. Ради се о лишњачи бабуна, која је највероватније служила као ручка неког оруђа, које се користило за урезивање, тетовирање, или чак и за писање на неки начин. Садржи групе зареза које су груписане у три јасно дефинисане колоне. Не чини се да се ради о декоративном начину груписања, због своје неправилности. Наиме, једна од колона садржи групе од 11, 21, 19 и 9 зареза, што подсећа на $10+1, 20+1, 20-1, 10-1$. У другој колони има осам група са (редом): 3, 6, 4, 8, 10, 5, 5, 7 зареза. Као да овде има речи о неком удвостручавању (али, чему онда ту и 7?).

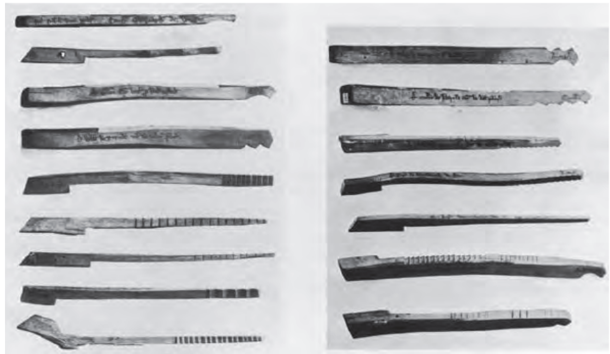
Последња колона има групе од по 11, 13, 17 и 19 зареза. Тешко да се овде, као што неки наводе, ради о простим бројевима. Више се чини да је и овде реч о неком календару пошто је $11+21+19+9=60=11+13+17+19$ (збирови бројева у првој и трећој колони).




Слика 2: Зарези на кости из Ишанга

Урезивање као метод за регистровање података, дуго је задржан. Следећи пример је занимљив. У Британији су се у дашчице од лешниковог дрвета дужине од 15 до 23 цм правили зарези као записи о новцу. Зарез који је био дебљине шаке, одговарао је износу од 1000 фунти, дебљине палца – 100 фунти, а дебљине малог прсте – 20 фунти. Када би се давао зајам, дашчица би се преломила на пола тако да се видео зарез на свакој половини. Један део би задржао државни трезор, а други би узео дужник. Тако би се лако могло проверити поређењем дашчица да ли се рачуни „слажу”.

Занимљива је терминологија. Уколико би неко позајмио новац енглеској националној банци, он би узимао половину те дашчице и тај део који би он узео називао се „stock”. Дакле, он је био „stockholder”. Када би он желео да уновчи то што је имао, донео би свој део дашчице и онда би се то проверило – „check”. Одатле су казније изведени називи за „акције” и „чекове”. Тај систем је укинут тек 1826. године. Године 1834. када су силне дашчице које су још преостале спаљене у пећима које су подгревале Кућу лордова, ватра је измакла контроли и проширила се толико да је изгорела цела зграда парламента.



Слика 3: Дашчице из тринаестог века

Други начин записивања налазимо код Инка у Перуу. Постојао је прилично добро разрађен систем „кипуа" („чворова који говоре").

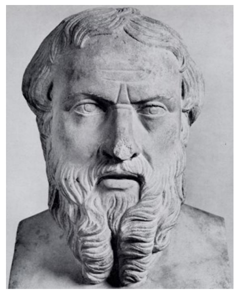
Слика 4: Кипу

То су биле групе врпци направљених од уплетених влакана од вуне или длаке животиња из породице камелида (на пример, ту спада лама), различите боје и дужине са више чворова на њима. Инке нису имали писмо, кипуи су чували разне податке. Ми не знамо у потпуности које су све податке, сем чисто нумеричких (подаци о складиштима, броју људи и слично), чували на тај начин, али је занимљиво да се тако неки логичко-нумерички систем могао развити у култури која није имала писмо. Кипуи су садржали од 3 до скоро 1000 ниски. Нажалост, шпански освајачи су сматрали да су ти чудни записи ђавољи производ и скоро су сви уништени, остало је само око 600 кипуа. До скора се сматрало да они потичу од 650 г. п. н. е. али је 2005. године у обалском граду Каралу у Перуу откривен кипу, можда је боље рећи прото-кипу, стар 5000 година и то у добром стању. У почаст старих кипуа, неки компјутерски системи за чување података називају се Quipu.

# Египат

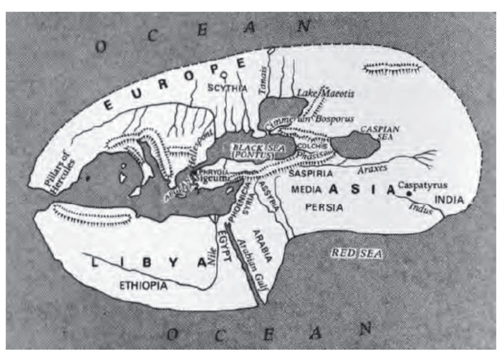
Груписањем мањих пољопривредних заједница у периоду од 3500. до 3100. г. п. н. е. формирана су два краљевства – Горњи и Доњи Египат. Око 3100. г. п. н. е. освајањем са југа дошло је до уједињења.

Класичан извор сазнања о Египту је Херодотова „Историја”.



Слика 5: Херодот

Херодот (485-430. г. п. н. е.) је рођен у Халикарнасу у југозападном делу Мале Азије. То је био грчки град у саставу Персије. Данас је то Бодрум у Турској. Због политичких разлога, био је присиљен да напусти родно место и сместио се у Атини. Одатле је путовао, можда као трговац, у разне крајеве тада познатог света, од јужних делова садашње Русије, преко Сирије и Ирака до Египта. Он је записивао приче које су му људи причали, тако да је његова „Историја” више путопис са социолошким и антрополошким подацима него историја у садашњем смислу. Али, он је покушавао да садашњост тумачи прошлим догађајима и то је један од разлога што је прозван „Оцем историје”.




Слика 6: Познати свет у време Херодота

Модерно интересовање за Египат почиње неуспешном Наполеоновом војном авантуром у Египту. Наиме, Наполеон је 1798. године са нешто више од 300 бродова и 38000 војника кренуо у Египат у покушају да га освоји и на тај начин угрози британски пут за Индију. Но, већи део флоте је убрзо уништен код Александрије, мада је војна кампања трајала још годину дана. Наполеон је, желећи да ублажи војну акцију и да промовише француску културу, у ту експедицију уврстио и многе научнике, између осталих и француске математичаре Гаспара Монжа и Жан Баптист Фуријеа. Научници су имали задатак да прикупе што више информација о свим аспектима територије земље у коју су дошли. Они су у току војних сукоба заробљени, али су пуштени са свим својим записима и цртежима. Захваљујући тим материјалима, у току наредних 25 година, објављено је монументално дело „Опис Египта”.

Никада до тада није нека страна земља била приказана са толико много података, који су сакупљени брзо и квалитетно, а при веома тешким условима. До тада је у Европи стари Египат био непознат, но овим делом је почело велико интересовање у европским интелектуалним круговима за Египат као древну цивилизацију.

Као што знамо, писмо које се користило за значајне натписе било је хијероглифско („свети знаци”) које је у самом свом почетку било сликовно, но касније су додавани и појединачни симболи. У следећој таблици можемо видети приказ бројева, заједно са описом симбола

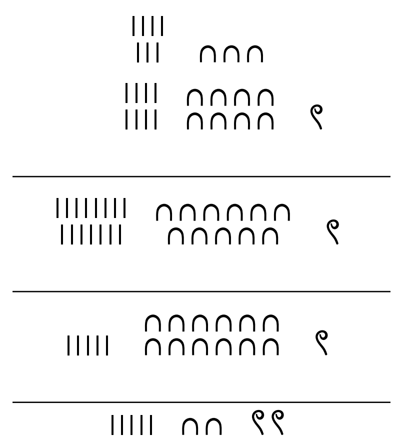
| број | хијероглиф | опис |
|---:|:---:|:---:|
| 1 | 𓏺 | палица |
| 10 | 𓎆 | кост пете |
| 100 | 𓍢 | уже |
| 1000 | 𓆼 | цвет локвања |
| 10000 | 𓂭 | савијени прст |
| 100000 | 𓆐 | пуноглавац |
| 1000000 | 𓁨 | Хех, бог вечности |

У неким текстовима је уже умотано у другом смеру, прст је савијен на другу страну, а уместо пуноглавца, појављује се жаба.

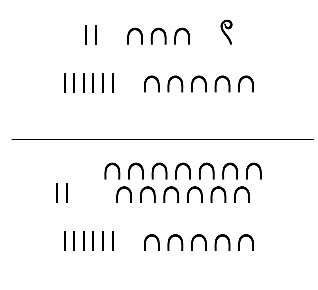
Као што можемо видети, систем јесте базиран на основи десет, али није позициони пошто су се различити симболи користили да означе разне декадне јединице (немамо цифре). Бројеви су приказивани тако што би се низали симболи за поједине декадне јединице и то би, обично, здесна долазиле ознаке за веће јединице, но, с обзиром да систем није позициони, то није било обавезно. На пример, 2019 би се могло записати овако:

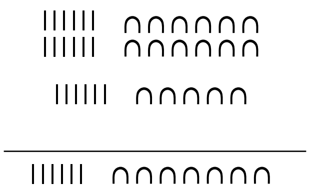
Но, због уштеде простора, некад би се низали и један изнад другог.

Сабирање се вршило груписањем и потоњим сређивањем. На пример, ако бисмо желели да нађемо збир $37+188$, то бисмо радили овако:



Одузимање се изводи уз „позајмљивање”. На пример, одузимање $132-56$ би се изводило као што следи.





Као што знамо, многи записи су пронађени на папирусима на којима се писало пером и мастилом. У сврху лакшег писања на папирусу, египатски свештеници су развили *хијератско* (*свето*) писмо. Могло би се рећи да се оно према хијероглифском односи као писани текст према штампаном. Касније, када се употреба папируса проширила, развијено је и *демотско* (народно) писмо.

Француски војници су, приликом једног укопавања у близини Розете, открили значајан камен на којима се налазио натпис на три писма — хијероглифском, демотском, грчком.

Било је јасно да се ради о изванредно важном открићу пошто нико до тада није био у стању да прочита хијероглифске натписе. Стога су начињене копије помоћу папира и мастила, које су разаслане по Европи. Не само то, него су при преговорима о капитулацији француских снага у Египту, Британци у уговор ставили и захтев за предају *камена из Розете*. Он је тада пребачен у Британски музеј, а гипсане копије су дате водећим британским универзитетима – Оксфорд, Кебриџ, Даблин и Единбург.

Хијероглифе је на крају ипак дешифровао један Француз – Шамполион (1790-1832) који је цео свој, не баш дуги живот, посветио томе још од детињства.

Главни извори нашег знања о египатској математици потичу од два папируса – Рајндовог (или Ахмесовог, по имену писара који га је исписао) и Московског (или Голенишевљевог). Осим ових, од мањег значаја су и Берлински папирус, као и *египатска математичка кожна ролна*.

Ахмесов папирус је открио Шкот Рајнд 1858. године. Заправо, тај папирус тада није био цео. Он је имао два дела и недостајао му је средњи део. Касније је откупљен један папирус за кога се сматрало да садржи податке о медицини. Испоставило се да је он вештачки састављен од више других и ту је заправо нађен и централни део Рајндовог папируса. Рајндов папирус је дужине нешто мање од 5,5 метара и ширине 32 cm. Ахмес је био писар који га је исписао најкасније 1550. године п.н.е. Он наводи да пише о резултатима познатим од стране старијих аутора из XII династије (1849-1801. године п.н.е).

Занимљиво је навести да постоји и документ врло сличног садржаја, а који је написан 2000 година после овог.

Слика 7: Део Рајндовог (Ахмесовог) папируса

Ахмес почиње амбициозно: „Ово је детаљна студија свих ствари, увид у све што постоји, знање свих опскурних тајни". Но, то је заправо математички приручник састављен од 85 проблема, а те „опскурне тајне" су множење и дељење.

Множење је заправо била у суштини адитивна операција код старих Египћана. Основна идеја код множења састојала се у удвостручавању (или преполовљавању) и каснијем сабирању.

$19 \cdot 37$

| | | |
|---|---|---|
| / | 1 | 37 |
| / | 2 | 74 |
| | 4 | 148 |
| | 8 | 296 |
| / | 16 | 592 |
| | 19 | 703 |

$37 \cdot 19$

| | | |
|---|---|---|
| / | 1 | 19 |
| | 2 | 38 |
| / | 4 | 76 |
| | 8 | 152 |
| | 16 | 304 |
| / | 32 | 608 |
| | 37 | 703 |

Дељење је супротно множењу – тражи се број који множењем са делиоцем даје дељеник. За дељење $91:7$ прави се иста таблица као за множење, али се резултат другачије очитава.

$91:7$

| | | |
|---|---|---|
| / | 1 | 7 |
| | 2 | 14 |
| / | 4 | 28 |
| / | 8 | 56 |
| | 13 | 91 |

Наравно, при дељењу се појављују и разломци. Египћани су имали велику преференцу ка јединичним разломцима, тј. ка разломцима облика $\frac{1}{n}$. Они су означавани тако што је изнад хијероглифских симбола за именилац исписиван издужени овал (који значи „део”). На пример: . Ми можемо да користимо скраћене ознаке, на пример, $\overline{134}$, за разломак $\frac{1}{134}$. Осим ових, имали су посебну ознаку и за 2/3:

Занимљиво је навести да, ако би желели да нађу 1/3 од неког броја, најпре би налазили 2/3, а потом 1/2 од добијеног резултата! Осим тога, за рачунање би се понекад множило (делило) са 10. Дакле, комбинацијом удвостручавања, множења са 10, преполовљавања, дељења са 10 и множења са $2/3$ трудило се да се дође до резултата. Но, Египћани су изражавали резултате користећи те јединичне разломке. Јасно је да је онда потребно видети како се бројеви облика $2 \cdot \overline{n} (= \frac{2}{n})$ изражавају преко јединичних разломака.

Прва трећина Ахмесовог папируса заправо се састоји од таблице у којој се разломци $2/n$ изражавају у облику збира јединичних разломака за непарне бројеве од 5 до 101. Сем што је коришћен идентитет

$$\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k},$$

није јасно због чега су коришћени баш такви записи, а не неки други. Наведимо неке развоје из таблице.

$$
\begin{array}{ll}
2 \cdot \overline{5} = \overline{3} + \overline{5} & 2 \cdot \overline{7} = \overline{4} + \overline{28} \\
2 \cdot \overline{11} = \overline{6} + \overline{66} & 2 \cdot \overline{17} = \overline{12} + \overline{51} + \overline{68} \\
2 \cdot \overline{19} = \overline{12} + \overline{76} + \overline{114} & 2 \cdot \overline{31} = \overline{20} + \overline{124} + \overline{155} \\
2 \cdot \overline{37} = \overline{24} + \overline{111} + \overline{296} & 2 \cdot \overline{41} = \overline{24} + \overline{246} + \overline{328} \\
2 \cdot \overline{47} = \overline{30} + \overline{141} + \overline{470} & 2 \cdot \overline{49} = \overline{28} + \overline{196} \\
2 \cdot \overline{71} = \overline{40} + \overline{568} + \overline{710} & 2 \cdot \overline{73} = \overline{60} + \overline{219} + \overline{292} + \overline{365} \\
2 \cdot \overline{91} = \overline{70} + \overline{130} & 2 \cdot \overline{97} = \overline{56} + \overline{679} + \overline{776}.
\end{array}
$$

На пример, у таблици имамо

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114},$$

а не

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{57} + \frac{1}{228}.$$

Нека правила су уочена.

**1.** Преферирају се мањи имениоци, ниједан није већи од 1000.

**2.** Што мање јединичних разломака, никад их нема више од 4.

**3.** Пожељнији су парни имениоци од непарних, посебно за почетне чланове у представљању.

**4.** Прво иду мањи имениоци и нема једнаких.

**5.** Најмањи се може повећати ако то може довести до смањивања осталих разломака. На пример, имамо $\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$, а не $\frac{2}{31} = \frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}$.

Множење разломака се изводи једноставно.

$$(2+\overline{4})\cdot(1+\overline{2}+\overline{7})$$

| | | |
|---|---|---|
| | $1$ | $1+\overline{2}+\overline{7}$ |
| / | $2$ | $3+\overline{4}+\overline{28}$ |
| | $\overline{2}$ | $\overline{2}+\overline{4}+\overline{14}$ |
| / | $\overline{4}$ | $\overline{4}+\overline{8}+\overline{28}$ |
| | $2+\overline{4}$ | $3+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}$ |

Наравно, овде је коришћен развој из таблице $2\cdot\overline{7}=\overline{4}+\overline{28}$, као и то да је $2\cdot\overline{2n}=\overline{n}$.

У проблему 33 из Ахмесовог папируса појављује се проблем налажења броја који помножен са $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ даје 37. То је сложеније. Најпре почиње стандардно (користићемо стандардне садашње ознаке ради лакшег праћења):

| | | |
|---|---|---|
| | $1$ | $1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}$ |
| | $2$ | $4+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ |
| | $4$ | $9+\frac{1}{6}+\frac{1}{14}$ |
| | $8$ | $18+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ |
| / | $16$ | $36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ |

Сада се израчуна шта се добија када се збир ових последњих разломака, који је мањи од 1, помножи са 42.

| | | |
|---|---|---|
| | $1$ | $42$ |
| / | $\frac{2}{3}$ | $28$ |
| | $\frac{1}{2}$ | $21$ |
| / | $\frac{1}{4}$ | $10+\frac{1}{2}$ |
| / | $\frac{1}{28}$ | $1+\frac{1}{2}$ |
| | | $40$ |

Зашто је ту множено са 42? Очигледно зато што је то заједнички именилац за почетне разломке $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{7}$, а сврха је била да се установи колико недостаје до 1. Недостаје дакле $2/42$. Но, с обзиром да је $(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}) \cdot 42 = 97$, а што је показано у проблему 31, број који треба да се дода броју 16 је број $\frac{2}{97}$, а из таблице је то $\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$. Дакле, коначно решење је $16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$.

Проблем 24 је лакши, али је занимљив метод његовог решавања. Он спада у 'аха' проблеме, или проблеме 'гомиле':

Гомила и њена седмина дају 19. Колика је та гомила.

Решење је базирано на методу 'погрешне претпоставке' – за решење се најпре узме нешто погодно, што није решење, а затим се пропорционално коригује. Дакле, овде се ради о линеарној једначини:

$$x+\frac{1}{7}x=19.$$

Примећујемо да је погодно узети да је $x=7$. Тада се добија да је $x+\frac{1}{7}x=8$, што није оно што желимо и зато то коригујемо – оним чиме треба помножити 8 да се добије 19 множимо 7 да добијемо резултат.

Најпре се израчуна шта се добија када се претпостави да је резултат 7.

| | | |
|---|---|---|
| / | $1$ | $7$ |
| / | $\frac{1}{7}$ | $1$ |
| | | $8$ |

Потом се тражи број којим треба помножити 8 да се добије 19.

| | | |
|---|---|---|
| | $1$ | $8$ |
| / | $2$ | $16$ |
| | $\frac{1}{2}$ | $4$ |
| / | $\frac{1}{4}$ | $2$ |
| / | $\frac{1}{8}$ | $1$ |
| | $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ | $19$ |

И на крају се тај број множи са 7.

| | | |
|---|---|---|
| / | $1$ | $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ |
| / | $2$ | $4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ |
| / | $4$ | $9+\frac{1}{2}$ |
| | $7$ | $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ |

Проблем 28 је сличног облика, али се из решења може разумети да он спада и у ону групу проблема са којима смо се сретали када смо били деца – старији вам кажу да замислите неки број и да онда изведете неке операције са њим, те онда 'погоде' који сте број замислили.

Одреди који је то број коме када додаш његове 2/3 и од добијеног одузмеш 1/3 суме добијеш 10.

А процедура за решење је кратка.

Нађи 1/10 од 10. То је 1. Од 10 одузми 1. Добијеш 9. И то је решење.

У овом решењу се заправо крије следећи идентитет ($n$ је природан број):

$$n+\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2}{3}n\right)-\frac{1}{10}\left(n+\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}\left(n+\frac{2}{3}n\right)\right)=n.$$

У проблему 79 налазимо сумирање геометријског низа.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | куће | 7 |
| / | 1 | 2801 | | мачке | 49 |
| / | 2 | 5602 | | мишеви | 343 |
| / | 4 | 11204 | | снопови | 2401 |
| | | 19607 | | хекати | 16807 |
| | | | | | 19607 |

О чему се овде ради? Најпре, каква је ово рачуница у првој колони? Једна од интерпретација је да се овде користи идентитет (наравно у врло једноставном облику):

$$q + q^2 + \cdots + q^n = q(q + \cdots + q^{n-1} + 1).$$

Наиме, 2801 је сума прва четири члана низа са десне стране, увећана за 1. А спомињање кућа, мачки, мишева и осталог као да сугерише неки забаван проблем у коме се види колико би се уштедело хеката пшенице (хекат је египатска мера) уколико би свака од 7 мачака у свакој од 7 кућа појела по 7 мишева ...

Рецимо на крају нешто и о египатској геометрији. Херодот Египћанима приписује стварање геометрије:

Кажу да овај краљ подели земљу међу свим Египћанима тако да сваки добије четвороугао исте величине и да онда он повлачи своје приходе од пореза на ту земљу. Али свако коме би река одузела део земље је имао обавезу да дође код краља и да га обавести шта се десило. Краљ би онда послао надзорнике који би премерили за колико се земља смањила, да би власник могао да плати порез на остатак земље. На тај начин, чини се мени, настала је геометрија.

Премеравање земље су вршили експерти које су Грци називали „затезачи конопца”. Наиме, по свему судећи, њихово главно оруђе су били конопци са означеним чворовима на њима. Демокрит је 420. године п. н. е. у једном спису показао да су они били и тада врло цењени. Наиме он се похвалио:

Нико ме не може надмашити у конструкцији равних фигура уз доказ, чак ни такозвани затезачи конопца у Египту.

Наравно, нама нису остали никакви подаци о доказима из Египта. Има више примера правила рачунања неких површина, која су емпиријског карактера. Укључујући и нека погрешна. На пример, у доста каснијем периоду, око 100. године п. н. е. у храму Хоруса у Едфу, налазе се подаци о многим четвоространим пољима која су била поклони храму и за свако од њих се површина рачунала по формули

$$P=\frac{1}{4}(a+c)(b+d),$$

где су $a$ и $c$, односно $b$ и $d$ наспрамне странице тог четвороугла. Јасно нам је да то није тачна формула; она јесте приближно тачна ако је четвороугао приближно правоугаоник.

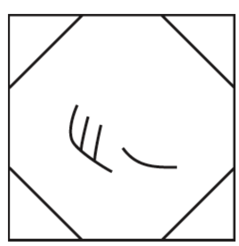
Геометријски проблеми у Ахмесовом папирусу су проблеми 41–60. У проблему 51, Ахмес описује да се површина једнакокраког троугла налази када се половина основице помножи његовом висином. То образлаже тиме да се једнакокраки троугао може поделити на два правоугла троугла из којих се може саставити правоугаоник. На сличан начин, у проблему 52, одређује се формула за површину трапеза чије су основие 4 и 6, а висина 20. Узимајући половину збира две основице, да би се направио правоугаоник, множи са висином и налази површину.

Значајно египатско остварење је налажење површине круга. У проблему 50, објашњава Ахмес да се површина круга пречника 9 добија тако што се од пречника одузме његова деветина, то јест 1, и онда се то што се добије, то јест 8, помножи са самим собом. Добија се 64, што је, како каже Ахмес, тражена површина.

Дакле, ако са $R$ означимо пречник круга, формула за површину круга је

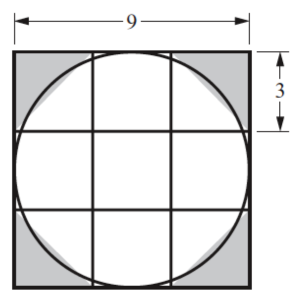
$$P=\left(R-\frac{R}{9}\right)^2=\left(\frac{8R}{9}\right)^2.$$

Ово нам даје вредност за $\pi$, $\pi=3\frac{1}{6}$. Што и није тако лоше. Још је важније, од ове приближне вредности, египатско правило да је однос површине круга према обиму једнака односу површине описаног квадрата према његовом обиму, а то је потпуно тачно. Не знамо са сигурношћу како су Египћани дошли до ове формуле, али проблем 48 код Ахмеса можда даје наговештај.



Слика 8: Проблем 48 код Ахмеса

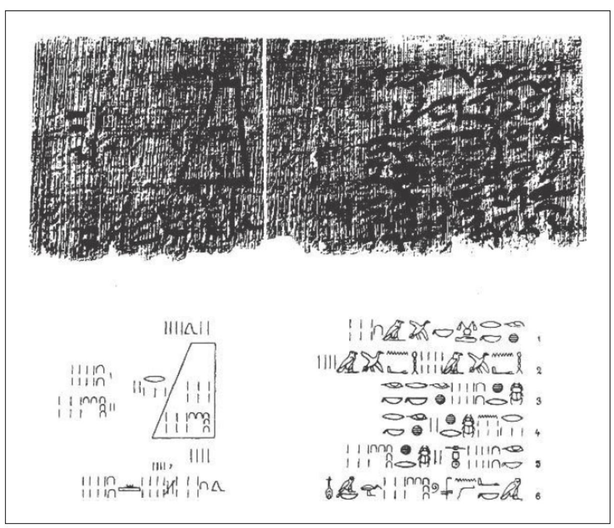
Ту се као поставка проблема појављује ова слика која представља квадрат од кога је формиран осмоугао. Пошто се ту налази и демотски знак за број 9, чини се да се ради о квадрату странице 9 из кога су исечени једнакокраки правоугли троуглови од којих сваки има површину $\frac{9}{2}$.



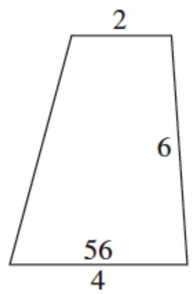

Слика 9: Круг уписан у квадрат

Могуће је да је Ахмес закључио да је површина тог осмоугла блиска површини круга уписаног у квадрат.

У вези рачунања запремина, наводимо проблем 14 са Московског папируса (који има само 25 проблема). Ту се може видети следећа сличица.



Заправо, ако поставимо само оно што је ту најважније имамо ово.




Наравно да немамо ознаке арапским бројевима, исписано је хијератским симболима. Чини се да је овде опет у питању неки трапез, али се из поступка види да се заправо ради о схематском приказу зарубљење пирамиде. Основе чине два квадрата странице 4 и 2, док је висина 6. Описује се поступак налажења запремине ове зарубљене пирамиде који заправо одговара формули

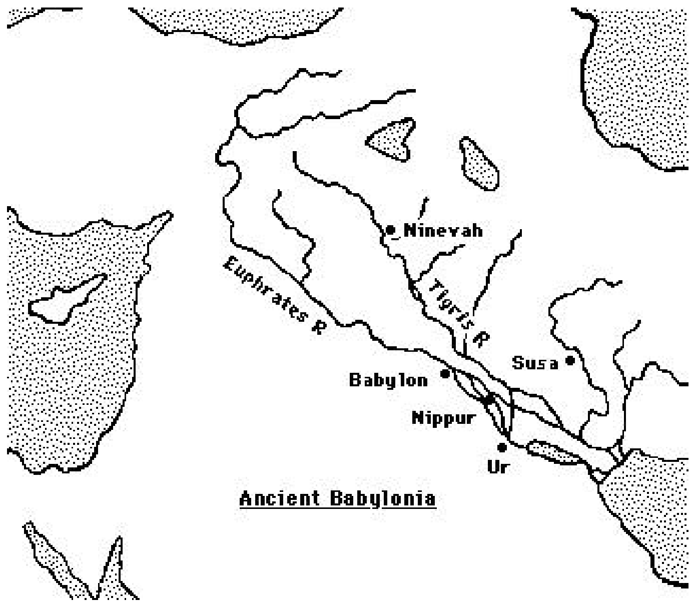
$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Наиме,

$$\frac{6}{3}(4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2) = 2(16 + 8 + 4) = 2 \cdot 28 = 56.$$

За крај наведимо да су Египћани користили и концепт који *de facto* одговара котангенсу угла. Није се наравно спомињао угао, али се рачунало колико закошена дуж одступа од вертикалне рачунањем односа одступања једног темена од вертикалне пројекције другог и висине на којој се налази друго теме – однос две катете у правоуглом троуглу чија је хипотенуза та дуж. Занимљиво је да је за вертикално одстојање коришћена једна јединица мере, а за хоризонтално друга, но наравно да то није суштински важно.

## М ка Месопотамије




Слика 10: Месопотамија

Та цивилизација Месопотамије (Међуречја) развијала се према најширим временским оквирима од 2900. године п. н. е. до Александрових освајања 330. године п. н. е. Господари су се мењали, али су битне карактеристике за нашу причу остајале довољно конзистентне да можемо говорити о математици Месопотамије (у англосаксонској литератури доминира термин 'вавилонска математика').

О цивилизацији Месопотамије имамо знатно више извора, јер, као што знамо, глинене плочице (таблице) на којима су писани разни документи знатно су трајније од папируса, или пергамента. Око 400 хиљада плочица, од којих је неких 2000 са математичким садржајем су омогућили многа сазнања чак и о обичном животу људи. Као што неки француски научници наводе, више се зна о породичном животу људи у Месопотамији пре више од 3000 година, него што се зна о животу француских сељака из XIII века.

Глинене плочице јесу трајније, али тако немамо записе већих докумената, јер су те плочице често величине разгледница. Но, има их довољно да можемо да дамо одређену слику. Што се математичких резултата тиче, сигурно је за њихову обраду најзаслужнији аустријско-амерички математичар и историчар наука Ото Нојгебауер. На пример, његов први рад, из 1927. године, о математици Месопотамије, био је посвећен пореклу сексагезималног система.

Као што знамо, користило се клинасто писмо. Ознака јединице је био вертикални знак у облику клина, који ћемо ми означавати са $\curlyvee$, док је за ознаку броја 10 коришћен положени знак у облику нешто 'дебљег' клина, који ћемо означавати са $\prec$. На пример, број 46 се записивао овако:

$$\begin{array}{c}\prec\prec\curlyvee\curlyvee\curlyvee\\ \prec\prec\curlyvee\curlyvee\curlyvee\end{array}$$

Сада долазимо до важне чињенице. У математици Месопотамије користио се позициони систем са основом 60 (сексагезимални систем), али са два недостатка. Први недостатак је био у томе што није постојао симбол за празно место. У запису се остављао мало већи размак, али то није баш било увек јасно. Овај недостатак је при самом крају ове цивилизације исправљен – додата је ознака за празно место у облику два искошена клина, али се овај симбол никада није користио на самом крају броја и то говори о другом недостатку: нема ознаке за децимални (заправо сексагезимални) зарез, мада се види да се у примерима радило и са бројевима који нису били цели. Из контекста се видело о чему се ради.

Дакле, запис

$$\prec\curlyvee\curlyvee\curlyvee\quad\prec\prec\prec\curlyvee\quad\curlyvee\curlyvee$$

могао је да означава број $13\cdot 60^2+31\cdot 60+2$, али и број $13\cdot 60^4+31\cdot 60^2+2$, као и број $13+31\cdot 60^{-1}+2\cdot 60^{-2}$. Заправо, на бесконачно много бројева се односио тај запис. Из контекста се морало схватити о ком се броју заиста ради.

У даљем тексту ћемо користити скраћени запис за сексагезималне бројеве. На пример,

$$12,6;38,23,14$$

означава број

$$12\cdot 60+6+38\cdot 60^{-1}+23\cdot 60^{-2}+14\cdot 60^{-3}.$$

На једној од таблица можемо наћи апроксимацију за $\sqrt{2}$: $1;24,51,10$. То је прилично добра апроксимација за $\sqrt{2}$:

$$1+24/60+51/3600+10/216000\approx 1,41421296296.$$

Како су дошли до овако доброг резултата? Користили су заправо сада нама добро познати алгоритам за налажење приближне вредности $\sqrt{a}$. Наиме, ако је $a_1$ нека апроксимација за тај корен и ако је тај број, на пример, мањи од корена, онда је број $\frac{a}{a_1}$ друга апроксимација, која је већа од тог корена. И онда се узме аритметичка средина ова два броја као нова апроксимација:

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{a}{a_1}\right).$$

Број који се наводи као апроксимација за корен из 2 је заправо следећа апроксимација, тј. $a_3$, ако је $a_1 = 1;30$ (тј. 1,5 у децималном запису).

Велики број глинених плочица са математичким садржајем састоји се од разних таблица: реципрочних вредности, квадрата, кубова, квадратних коренова. На пример, имамо овакву таблицу реципрочних вредности:

| | |
|---|---|
| 2 | 30 |
| 3 | 20 |
| 4 | 15 |
| 5 | 12 |
| 6 | 10 |
| 8 | 7,30 |
| 9 | 6,40 |
| 10 | 6 |
| 12 | 5 |
| 15 | 4 |
| 16 | 3,45 |
| 18 | 3,20 |
| 20 | 3 |
| 24 | 2,30 |
| 25 | 2,24 |
| 27 | 2,13,20 |

Постоје таблице квадрата бројева од 1 до 59, као и кубова бројева до

31. За множење су користили формуле

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}.$$

Дељење се изводило множењем реципрочном вредношћу:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Рецимо, да бисмо нашли 34/5, помножимо 34 са 12 и померимо за једно сексагезимално место. Но, неке вредности овде недостају. Наведене су само реципрочне вредности 'правилних' бројева, тј. оних код којих имамо коначан запис (облика су $2^m 3^n 5^p$). Рецимо, овде немамо 1/7. Но, и 1/7 се може наћи, бар приближно, на неким другим местима. Може се наћи процена:

$$0;8,34,16,59 < \frac{1}{7} < 0;8,34,18.$$

Имамо и апроксимације:

$$\frac{1}{59} = ;1,1,1 \qquad \frac{1}{61} = ;0,59,0,59.$$

Наравно да би овде требало да буде бесконачни развој, но појављује се само коначна апроксимација.

Осим ових, постоје и таблице степена са разним основама, а које се користе у налажењу de facto логаритама са различитим основама. Но, наравно да немамо баш појам логаритма ни приближно, ради се о извесном броју таблица, са циљем решавања неких конкретних проблема.

Линеарне једначине су сматране за једноставне и њима није поклањана превелика пажња. Много су занимљивије биле квадратне, па чак и кубне једначине. Једначине су знали да трансформишу додавањем на обе стране једначине једнаких вредности и множењем обе стране истим бројем

С обзиром да нису разматрани негативни бројеви, постојала су de facto три типа квадратних једначина (а овако ће бити и више од хиљаду година по нестанку ове цивилизације):

1. $x^2 + px = q$,
2. $x^2 = px + q$,
3. $x^2 + q = px$.

Наравно да није постојао никакав симболички запис, ово је само наш запис за разматране једначине. За непознате су се користили термини 'дужина', 'ширина', 'површина', 'запремина'. Но, јасно је да су ти термини ипак коришћени у апстрактном смислу, јер није представљао проблем да се од површине одузима дужина.

У једном од проблема се тражило да се одреди дужина странице квадрата ако се добија $14,30$ када се од површине одузме дужина те странице. У нашем садашњем и то децималном запису ради се о једначини $x^2 - x = 870$. Опис решења није ништа друго до опис метода комплетирања квадрата, односно формуле

$$x = \sqrt{(p/2)^2 + q} + p/2,$$

за једначину облика 2 (записану као $x^2 - px = q$). Мада овде имамо одузимање, ипак немамо негативна решења. Слично се решавао и први тип једначине. Али, ту имамо још један занимљив пример/метод.

Једначина $11x^2 + 7x = 6;15$ трансформисана је тако што су обе стране помножене са 11 и онда се тако добије једначина $(11x)^2 + 7 \cdot (11x) = 1,8;45$. Ова има нормалну форму по непознатој $y = 11x$ и решење се налазило као у претходном случају.

Но, трећи тип једначине сводио се на решавање система

$$x + y = p, \quad xy = q.$$

Има више примера за решавање система једначина у којима једна једначина задаје збир (или разлику) две непознате величине, а друга њихов производ. То је, тада, евидентно био неки канонски начин представљања једначина типа 3.

На пример, за решавање система једначина $x + y = 6;30$, $xy = 7;30$ дат је поступак у коме се најпре израчуна

$$\frac{x+y}{2} = 3;15,$$

затим се ово квадрира:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 10;33,45$$

и израчуна

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = 3;3,45.$$

Тако се добија да је

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 3;3,45$$

и одатле имамо

$$\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1;45.$$

Наравно, посматра се само позитиван корен. Одавде се добијају $x, y$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 3;15 + 1;45 = 5, \\ y &= \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 3;15 - 1;45 = 1;30. \end{aligned}$$

Посебно је занимљиво решавање кубних једначина за шта нема пандана у египатској математици. С обзиром да је постојала таблица кубова онда су се једноставне једначине попут $x^3 = 0;7,30$ решавале директно из таблице када је то било могуће, односно користећи линеарну интерполацију за добијање решења. Но, постојале су и таблице за $n^3 + n^2$. Те таблице су коришћене за решавање једначина попут једначине

$$144x^3 + 12x^2 = 21.$$

Наиме, множењем обе стране са 12, добија се једначина по непознатој $y = 12x$:

$$y^3 + y^2 = 4,12$$

и добија се решење $y = 6$, односно $x = 0;30$. Све кубне једначине облика

$$ax^3 + bx^2 = c.$$

могу се свести на једначину

$$y^3 + y^2 = d$$

множењем са $a^2/b^3$. Немамо податке да ли су они успевали да реше и општију једначину облика $ax^3 + bx^2 + cx = d$, мада су, на основу постојећих примера, могли да нађу одговарајућу смену. Но, нема ниједног таквог примера.

Једна таблица је посебно занимљива, те се и ових година појављују научни радови у којима се разматра њен значај. Она је позната као таблица Плимптон 322, јер је она под тим бројем заведена у Плимптоновој колекцији на Универзитету Колумбија.

Слика 11: Плимптон 322

Таблица је величине $9 \times 13$ cm, мало оштећена и по свему судећи је била део веће таблице.

Но, оно што имамо су четири колоне од по 15 бројева. Наводимо део те таблице.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1,59,0,15$ | $1,59$ | $2,49$ | 1 |
| $1,56,56,58,14,50,6,15$ | $56,7$ | $1,20,25$ | 2 |
| $1,55,7,41,15,33,45$ | $1,16,41$ | $1,50,49$ | 3 |
| $1,53,10,29,32,52,16$ | $3,31,49$ | $5,9,1$ | 4 |
| $1,48,54,1,40$ | $1,5$ | $1,37$ | 5 |
| $1,47,6,41,40$ | $5,19$ | $8,1$ | 6 |

Наравно, нећемо да памтимо ту таблицу, али можемо мало да проанализирамо шта овде имамо.

Јасно је да последња колона нумерише врсте. Испишимо другу и трећу колону у декадном систему

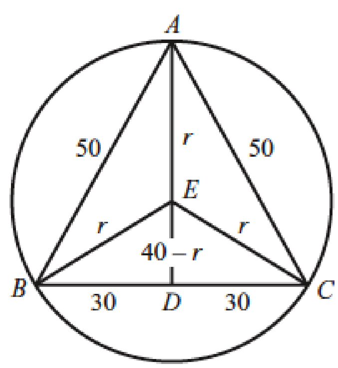
| | |
|---|---|
| 119 | 169 |
| 3367 | 4825 |
| 4601 | 6649 |
| 12709 | 18541 |
| 65 | 97 |
| 319 | 481 |

Тада је:

$$
\begin{aligned}
169^2 - 119^2 &= 120^2 \\
4825^2 - 3367^2 &= 3456^2 \\
6649^2 - 4601^2 &= 4800^2 \\
18541^2 - 12709^2 &= 13500^2 \\
97^2 - 65^2 &= 72^2 \\
481^2 - 319^2 &= 360^2
\end{aligned}
$$

Дакле, овде имамо Питагорине тројке бројева. Заправо, ако се посматра правоугли троугао у коме је мања катета $a$, већа катета $b$ и хипотенуза $c$, онда је прва колона заправо једнака $(c/b)^2 = \sec^2 \alpha$. Наравно, нема смисла сматрати на основу овога да су у старој Месопотамији имали појам секанса угла, ни у Египту ни у Месопотамији немамо увођење мере угла, но ово је ипак занимљив резултат. Нисмо написали целу таблицу, али се правилност и даље одржава – бројеви у првој колони су опадајући. Осим тога, увек је $b$ ‘правилан’ број, тј. у његовој факторизацији се појављују само прости бројеви 2, 3 и 5, што омогућава коначан запис у основи 60. Нећемо се даље бавити тиме како је таблица формирана.

На крају наведимо и пар речи о геометрији у Месопотамији. Пре свега, јасно је да је Питагорина теорема била позната. На једној таблици имамо квадрат на коме је број 30 написан дуж странице, док су бројеви $42;25,35$ и $1;24,51,10$ записани дуж дијагонале. Приметимо да је овде други број апроксимација за $\sqrt{2}$, коју смо већ наводили, и да се види да се знало да се дужина дијагонале квадрата добија када се дужина странице помножи са $\sqrt{2}$. Имамо и пример, на једној другој плочици, рачунања полупречника круга описаног око једнакокраког троугла.




Слика 12: Примена Питагорине теореме

Друга примена Питагорине теореме је у задатку где греда дужине 0;30 стоји уз зид и питање је колико ће се доњи део померити од зида ако се горњи део спусти за 0;6.

Занимљива је и таблица у којој су поређене површине и квадрати страница правилних многоуглова са три, четири, пет, шест и седам страница. Неки су резултати приближни, али са добром апроксимацијом. Ту се такође налази и пример поређења обима кружице описане око правилног шестоугла и његовог обима. Из тог резултата се може закључити да је апроксимација за $\pi$ заправо $3;7,30$, односно $3\frac{1}{8}$ што није лоша апроксимација (мада се за рачунање површине круга ипак најчешће користила вредност 3).

Мане су сличне као и у Египту. Није се правила разлика између тачних и приближних вредности. Па се тако површина четвороугла налазила као производ аритметичких средина парова наспрамних страница, док се за запремину зарубљене пирамиде могла наћи и тачна вредност, али и слабије апроксимације.

За крај можемо рећи да, мада ни у Египту ни у Месопотамији немамо експлицитних доказа, ипак се може наслутити да су постојали методи којима су се решавали општи задаци и да је било и случајева доказа помоћу провере рачуна. Прави математички докази долазе тек са Грцима. Можемо рећи и да математика старијих цивилизација није била сасвим утилитарна. Види се да је ту било и задатака чисто забавног и непрактичног карактера.

# Грчка и хеленистичка математика

## Почеци грчке математике

Прве Олимпијске игре одржане су 776. године п. н. е. и у то време је већ постојала значајна грчка литература, но о грчкој математици из тог доба не знамо ништа. Јасно је да је литература могла да се у великој мери преноси усменим предањем и то је сигурно један од разлога што је ситуација била таква. Заправо све до VI века п. н. е. немамо никаквих података о грчкој математици. Тек од тада имамо неке податке, али нема докумената све до IV века п. н. е. Чак и у том веку има мало преосталих оригиналних докумената. Информације које имамо о почецима грчке математике су базиране на каснијим изворима.

Зна се да је Аристотелов студент Еудем, који је пореклом био са Родоса, око 320. године п. н. е. написао Историју математике (он је писао и друге књиге на пример Историју астрономије), но она није сачувана. Касније је неко саставио скраћени запис ове Историје, но ни оригинал тог записа није сачуван. Информација коју имамо о тој Историји садржана је у Прокловим (Прокло је био значајан неоплатонистички филозоф из V века н. е.) *Коментарима о првој књизи Еуклидових Елемената.*

Дакле, информације које имамо о почецима грчке математике нису базиране на оригиналним изворима, него на каснијим документима, односно на историјској традицији. Прва два математичара који се експлицитно спомињу по имену били су Талес из Милета (оквирне године живота: 624–548 п. н. е.) и Питагора са Самоса (око 570–490 п. н. е.).

## Талес

Мало се тога са сигурношћу зна о Талесу. Но, традиција га описује као изузетно паметног и сналажљивог човека и сматран је за првог филозофа – он је први од Седам мудраца. Краљ Крез, владар суседне Лидије, унајмио га је да пронађе начин да његова војска пређе реку Халис, али да не гради мост. Талес је решио проблем тако што је на обали реке улогорио војску, а затим је опкопан ров око логора те је тако скренут део речног тога. Река је текла са обе стране табора, али је била плитка и могла је да се прегази.

Он је доста путовао и по Египту и по Месопотамији и тамо је имао прилику да се упозна са математиком тих цивилизација. Сматра се да је Талес у Месопотамији могао да види тамошње астрономске таблице. Постоји легенда о томе да је Талес 585. године п. н. е. предвидео помрачење Сунца, али то заиста није потврђена чињеница. Математички резултати који се приписују Талесу су следећи:

- Угао над пречником круга је прав.
- Пречник дели круг на два једнака дела.
- Углови на основи једнакокраког троугла су једнаки.
- Унакрсни углови су једнаки.
- Став УСУ за подударност троуглова.

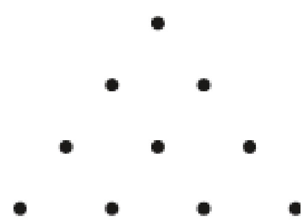
Сада је универзално прихваћена чињеница да су Грци били ти који су дали елементе логичке структуре геометрији, но ипак се не зна да ли је Талес био тај који је то урадио, или је до тога дошло знатно касније, можда чак два века касније.

## Питагора и Питагорејци

За име Питагоре везују се разне легенде. Његово место рођења је било близу места рођења Талеса, но животни путеви су им били значајно различити. Док је Талес био познат по својим практичним активностима, Питагора је био пророк и мистик. И он је доста путовао, сигурно и по Египту и Месопотамији, али можда је ишао чак и до Индије. Није небитно навести да је он био савременик и Буде, Конфучија, као и Лао Цеа. По повратку са тих путовања населио се у јужном делу Италије у Кротону, што се у то време сматрало делом Велике Грчке. Основао је тајно друштво, које називамо Питагорејци или Питагоровци. Резултате који се приписују Питагори, исправније је приписати Питагорејцима. Тако ћемо и овде радити, сем у случају када је позната особа којој се приписује конкретан резултат.

Питагорејци су веровали у прочишћење кроз бављење филозофијом и математиком. Сматра се да је сам Питагора смислио речи „филозофија" („љубав ка мудрости") и „математика" („оно што се учи"). Веровали су у сеобу душе после смрти у друго тело, људско или животињско. Били су вегетаријанци, али су имали и друге специфичне забране.

Основни мото Питагорејаца је, поједностављено говорећи, био: „Све је број". Наравно, овде је број био позитиван цео број, оно што ми данас зовемо природни број. Та фасцинираност бројевима нам сада изгледа наивно, али она ипак лежи у основи покушаја да се свет објасни помоћу бројева, математички. Појединим бројевима су придавана посебна својства, нећемо се наравно тиме бавити, али наведимо да је за њих био посебно важан симбол тетрактис:



Слика 13: Тетрактис

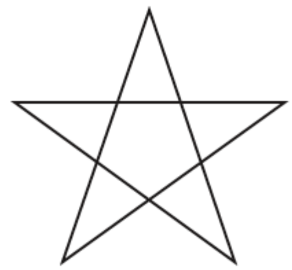
Он представља најсветији, за Питагорејце, број 10. Он је најсветији јер представља збир свих димензија, при чему димензију нула представља једна тачка, димензију један представљају две тачке итд. Занимљиво је да број 10 није Питагорејцима био значајан због чињенице да имамо десет прстију на рукама.

Други значајан симбол био је пентаграм:

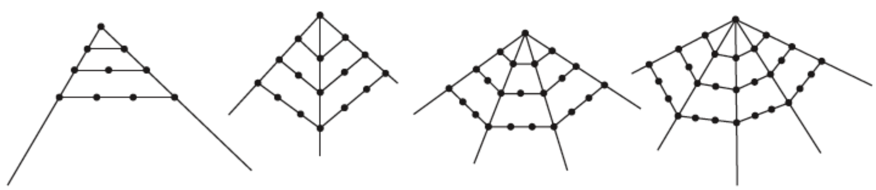
Њега формирају дијагонале правилног петоугла и о њему ће бити речи касније.

Придруживање бројева објектима, посебно је било видљиво у третирању фигурних, прецизније многоугаоних бројева. Дакле, питање је који бројеви могу бити придружени којим фигурама.

Праве и дужи које се појављују нису део приказа, само су ту ради прегледности, многоугаони бројеви су представљани каменчићима. На претходној слици видимо троугаоне, квадратне, петоугаоне и шестоугаоне бројеве.

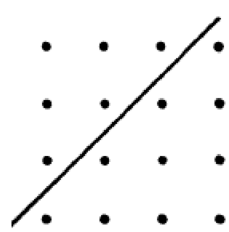


Слика 14: Пентаграм



Слика 15: Многоугаони бројеви

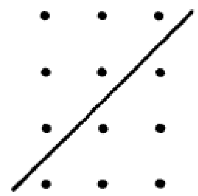
Питагорејцима је била занимљива подела многоугаоних бројева на троугаоне, а с тим у вези, јасно, и подела многоуглова на троуглове.



Слика 16: Подела квадратног броја

Ова слика нам приказује поделу квадратног броја на два троугаона чије се странице, разликују за 1, а следећа слика нам приказује поделу 'издуженог' броја (заправо броја облика $n(n+1)$, где је $n$ природан број) на два једнака троугаона:

Питагорејци откривају и везу између односа малих природних бројева и музике. Најпре су открили да ако имамо две жице од којих је једна двоструке дужине, онда оне при трзању емитују исте ноте, које



Слика 17: Подела правоугаоног броја

се разликују за октаву – пошто је таласна дужина код дуже жица већа, фреквенција је нижа и стога је тон дубљи, за једну октаву. До хармоније у звуку долази када се односи дужина две жице налазе у једноставним размерама попут 2:3 или 3:4. Разлика у тоновима се види у једноставним односима дужина жица. Ту имамо прве законе акустике, а познато је да нису експериментисали само са жицама, него и са другим објектима. На пример, Хипас из Метапонта је имао четири метална диска исте основе, али различитих дебљина – односи дебљина су били $1:1\frac{1}{3}:1\frac{1}{2}:2$ и показао је да они производе исту хармонију као и жице са одговарајућим односима дужина. Неки му приписују и експерименте са различито напуњеним чашама са сличним ефектом.

Наравно, Питагорејци су, последично, имали и веома смеле разраде ове идеје – да се небеска тела крећу по сферама са таквим односима да производе хармонијске тонове: „хармонија сфера”. Наравно, то нам сада делује врло наивно, али идеја да је свемир правилно уређен јесте једна значајна тековина Питагорејаца.

Прокло, на основу Еудема, говори о развоју теорије пропорција код Питагорејаца. Свакако се Питагора у Месопотамији упознао са аритметичком, геометријском и хармонијском средином и односом између њих:

$$a : A(a,b) = H(a,b) : b.$$

где смо са $A(a,b)$ означили аритметичку, а са $H(a,b)$ хармонијску средину бројева $a$ и $b$. Но, они су касније додали још седам 'средина' и тиме комплетирали до укупно 10 (знамо да им је тај број био посебно значајан). Наведимо их. 'Средина' $b$ од $a$ и $c$, задата је једном од следећих пропорција (које ћемо писати као разломке).

$$\begin{array}{llll}
(1) & \dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{a} & (6) & \dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{c}{b} \\
(2) & \dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{b} & (7) & \dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{c}{a} \\
(3) & \dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{a}{c} & (8) & \dfrac{c-a}{c-b}=\dfrac{c}{a} \\
(4) & \dfrac{b-a}{c-b}=\dfrac{c}{a} & (9) & \dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{b}{a}
\end{array}$$

$$(5)\quad \frac{b-a}{c-b}=\frac{b}{a} \qquad (8)\quad \frac{c-a}{c-b}=\frac{b}{a}$$

Заправо, може се проверити да су то једине могућности у којима поредимо односе разлика тих величина и односе самих величина, при чему су све различите и $b$ је између $a$ и $c$. Није тешко проверити да прве три једнакости дају за $b$ редом аритметичку, геометријску и хармонијску средину. Остале ... Забаве ради, можемо да приметимо да, на пример, четврта даје $b=\frac{a^2+c^2}{a+c}$.

## Записивање бројева

Направимо сада кратку паузу у разматрањима о теоријским аспектима грчке математике и позабавимо се питањем како су Грци записивали бројеве. Постојала су два начина записивања бројева – атички и јонски.

Атички систем бројева је био сличан каснијем римском систему, мада је имао и неке своје предности. Ево кратке табеле:

| број | ознака |
|---|---|
| 1 | I |
| 2 | II |
| 3 | III |
| 4 | IIII |
| 5 | Π или Γ |
| 10 | Δ |
| 100 | H |
| 1000 | X |
| 10000 | M |

Називи: пента за 5, дека за 10, хекатон за 100, хилиој за 1000 и мириој за 10000. Предност у односу на каснији римски систем записивања састојао се у томе што се за бројеве 50 и 500 нису користили посебни симболи, него комбинације већ постојећих:

50 = 𐅄, 500 = 𐅅, 5000 = 𐅆, 50000 = 𐅇,

Тако бисмо, на пример, број 45628 записивали овако

$$\mathrm{MMMM}\;\Gamma^{\mathrm{X}}\;\Gamma^{\mathrm{H}}\;\mathrm{H}\;\Delta\;\Delta\;\Gamma^{\mathrm{III}}.$$

Јонски систем је био базиран на алфабету. Грчки алфабет потиче од феничанског писма (у коме није било ознака за самогласнике, који су додати) и имао је 24 знака. А Грцима је било потребно 27 знакова. Наиме, систем јесте био формиран тако да се број 10 истицао, али то није био позициони систем. За ознаку јединица користило се 9 слова, за ознаку десетица других девет слова и за ознаку стотица других 9 слова. Дакле, на грчки алфабет додата су још три стара симбола Ϙ,ϙ („копа”, које је и претеча латиничног q), Ϛ,ϛ („стигма”, или „дигама”) и Ϡ,ϡ („сампи”). Најпре су се користила велика слова, мала су уведена тек знатно касније. Ево табеле:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | B | Γ | Δ | E | Ϛ | Z | H | Θ |
| $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\epsilon$ | ϛ | $\zeta$ | $\eta$ | $\theta$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | K | Λ | M | N | Ξ | O | Π | Ϙ |
| $\iota$ | $\kappa$ | $\lambda$ | $\mu$ | $\nu$ | $\xi$ | $o$ | $\pi$ | ϙ |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| P | Σ | T | Υ | Φ | X | Ψ | Ω | Ϡ |
| $\rho$ | $\sigma$ | $\tau$ | $\upsilon$ | $\phi$ | $\chi$ | $\psi$ | $\omega$ | ϡ |
| 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |

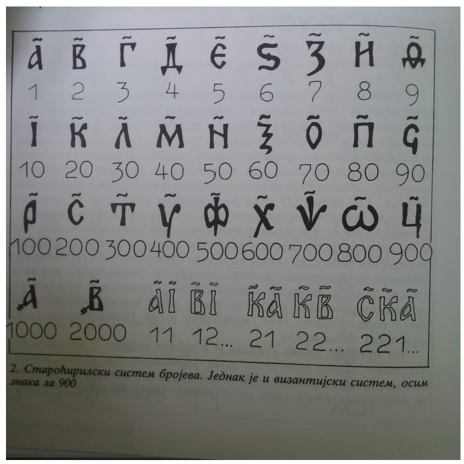
На пример, број 967 би се записао овако: ϡ$\xi\zeta$. За хиљаде су коришћени знаци за јединице испред којих би се писала доња цртица: ͵$\alpha = 1000$. На пример ͵$\beta\kappa = 2020$. Тако се без проблема могу записивати природни бројеви мањи од 10000. За веће бројеве користио се симбол M, који је означавао 10000 и онда би се, на пример, број 1345879 записивао овако: M$\rho\lambda\delta \cdot$ ͵$\varepsilon\omega o\theta$. Дакле, то би заправо било $134 \times 10000 + 5879$, а $\cdot$ је био симбол за раздвајање.

Код писања разломака поново наилазимо на египатску склоност ка јединичним разломцима, тј. разломцима облика $\frac{1}{n}$. Они би се писали тако што би се после имениоца стављао апостроф („прим”): разломак $\frac{1}{27}$ би се записивао као $\kappa\zeta'$. Наравно да би ту могло доћи до конфузије:

да није то можда $20\frac{1}{7}$? Но, из контекста би се закључивало о ком броју се ради.

Како се рачунало са сигурношћу не можемо да кажемо. Јасно је да су биле коришћене неке рачунаљке, неке табле за рачунање помоћу каменчића, али ниједан такав предмет није сачуван. Постоји слика на једној вази где се види табла за рачунање, а Херодот је записао да је у рачунању са каменчићима Грк радио слева на десно, а Египћанин здесна на лево.

На крају овог дела о записивању бројева наведимо да се и код нас, током средњег века користила оваква варијанта записивања бројева, наравно базирана на ћирилици:




Слика 18: Староћирилски систем бројева

## Три конструктивна проблема антике

V век п. н. е. био је период значајног напретка Атине. Започео је успешном одбраном од Персијанаца, а завршен поразом Спарте од Атине. Велики напредак Атине у ово Перикловo доба утицао је на прилив значајног броја учених људи у Атину. Један од њих је био и Анаксагора, који је рођен у Јонији у Малој Азији у време док је она била под влашћу Персије. Он је био први значајнији филозоф који је направио каријеру у Атини. У Атину је дошао 480. године п. н. е. у години поморске битке код Саламине, у којој су грчки савезници под командом Темистокла задали пресудан ударац Персијанцима под Ксерксом те на тај начин одбранили грчки свет од њихове инвазије. Био је учитељ и пријатељ Перикла и човек слободног мишљења. Вероватно су оба ова разлога (Перикле је имао и јаке политичке противнике у Атини) утицала на то да буде оптужен за безбожност – тврдио је да ни Сунце ни Месец нису божанства. Сунце је само ужарени камен величине Пелопонеза, док је Месец био истог састава као и Земља, а светлост је добијао од Сунца и рефлектовао га на Земљу. Неко време је и провео у затвору из кога га је избавио Перикле, али је ипак морао да оде у изгнанство у коме је и умро 428. године п. н. е. – годину дана пре рођења Платона и годину дана после смрти Перикла.

Како је Плутарх писао, Анаксагора се у затвору у Атини бавио и проблемом квадратуре круга – како наћи квадрат који има исту површину као и дати круг. Ту први пут наилазимо на спомињање овог проблема. Није било јасно шта је дозвољено користити у ту сврху, али је касније (највероватније и доста касније, под утицајем Платона) било искристалисано да је за ту сврху дозвољено користити само лењир и шестар. То је у вези са тим да су савршене линије права и круг.

Перикле је умро од куге која је харала Атином. Сматра се да је тада од куге умрла скоро четвртина становника Атине. За епидемију куге се везује и прича о другом конструктивном проблему антике. Наводно су Атињани послали делегацију у храм Аполона у Делфима да питају шта би требало да ураде да зауставе епидемију куге. Добили су одговор од пророчишта да морају да удвоструче олтар у облику коцке који је био посвећен Аполону. Атињани су удвостричили дужину странице, но куга није престала. Јасно је да тиме нису решили проблем, јер су тако добили осам пута већу запремину олтара. Ово је прво спомињање проблема удвостручавања коцке.

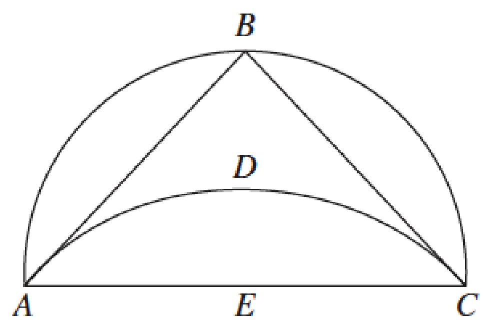
Такође је у ово време у Атини ‘циркулисао’ проблем трисекције угла: како дати угао поделити на три једнака дела. Ови проблеми, посебно каснији захтеви за њихово решавање, где се конструкција морала извршити искључиво помоћу лењира и шестара, утицали су значајно на развој математике и дуго векова нису били разрешени. Но, већ је у античко доба било неких решења која, додуше, нису била при тим рестриктивним условима, али и поред тога су била занимљива.

## Хипократова квадратура „месеца”

Хипократ са Хиоса (то није лекар Хипократ који је био са Коса) је био нешто млађи од Анаксагоре и у Атину је дошао око 430. године п. н. е. да се бави трговином. Но, сву имовину је изгубио, да ли због неке преваре или због напада гусара, не знамо, али знамо да га то није обесхрабрило. Окренуо се студијама геометрије. Написао је и прве „Елементе геометрије”, неких сто година пре Еуклидових *Елемената*, али то дело, нажалост, није сачувано, али да је постојало знамо преко Аристотела. Податке о Хипократовој математици имамо од Симпликија који је око 520. године наше ере, ископирао, по својим речима, делове Еудемове „Историје математике”.

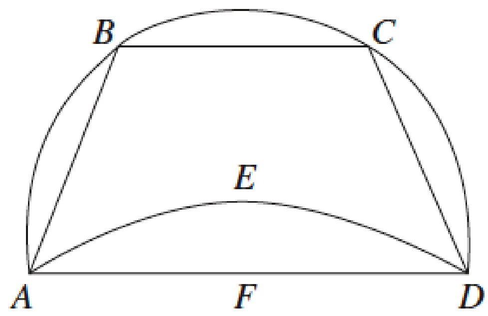
По тим подацима, Хипократ је извршио квадратуру „месеца”. Под „месецом” се подразумевала криволинијска фигура коју ограничавају два лука кругова различитог полупречника. Најпре се код Еудема наводи да је Хипократ доказао следећу теорему: Површине два слична одсечка два круга се односе као квадрати њихових тетива (одсечци су слични ако одговарају истом централном углу). Заправо Еудем тврди да је Хипократ до овог резултата дошао тако што је показао да се површине кругова односе као квадрати њихових полупречника. Тешко је поверовати да је Хипократ имао доказ овог резултата. Вероватно је имао неки аргумент којим је оправдавао валидност те теореме, али доказ скоро сигурно није имао. Ми ћемо касније приказати значајно каснији доказ те чињенице. Тај доказ је базиран на знатно суптилнијим методама него оним које су биле доступне Хипократу.

Ево како је, базирано на претходним резултатима, Хипократ извео квадратуре неких „месеца". Као први пример посматрајмо једнакокраки правоугли троугао и одговарајући полукруг.




Конструишимо и лук над $AC$ тако да је новодобијени одсечак $AECD$ сличан одсечцима над тетивама $AB$ и $BC$. Како је $AB^2 + BC^2 = AC^2$ (због једноставности записа, нисмо писали $|AB|$ као дужину странице $AB$, тако ћемо радити и даље), а према наведеном резултату површине сличних одсечака се односе као квадрати одговарајућих тетива, добијамо да је површина одсечка $AECD$ једнака збиру површина одсечака над $AB$ и $BC$. „Месец" $ADCB$ који образују полукружница и лук $\widehat{AC}$ састоји се од та два одсечка и 'криволинијског' троугла у коме је основа лук $\widehat{AC}$. Но, збир површина та два одсечка, једнак је површини одсечка $AECD$, који заједно са тим 'криволинијским' троуглом чини троугао $ACB$. Стога је површина тог „месеца" једнака површини троугла $ACB$. А лако је наћи квадрат чија је површина једнака површини троугла $ACB$: то је квадрат над половином странице $AC$. Тако је извршена и квадратура „месеца" $ADCB$.

Други пример квадратуре „месеца" добија се помоћу једнакокраког трапеза $ABCD$ у коме је $AB = BC = CD$ и $AD^2 = DC^2 + CB^2 + BA^2$.
Као и у претходном примеру, на основу ове везе међу квадратима над одговарaћим дужима и резултата о површини одсечака, добијамо да је површина месеца $AEDCB$ једнака површини трапеза $ABCD$. Наравно да



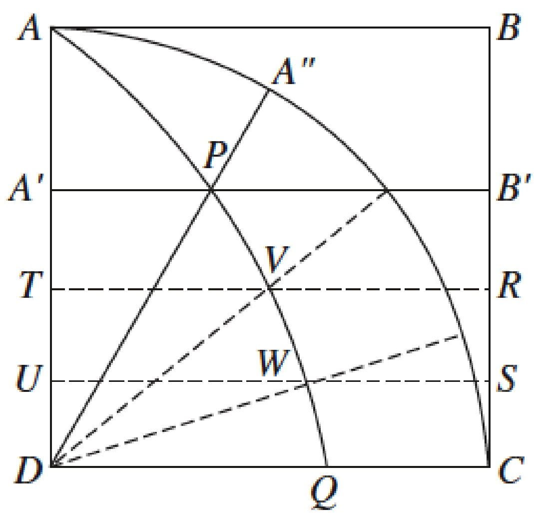

се без већих проблема може наћи и квадрат који има исту површину као и овај трапез те је тиме извршена квадратура још једног „месеца". Један од коментатора Аристотела наводи још неке примере квадратура „месеца", но ова два примера су нам довољна.

Видимо да су математичари у Атини крајем V века п. н. е. са успехом баратали трансформацијама површина разних фигура. Посебно, они су знали како да изврше квадратуру правоугаоника, што се своди на налажење $x$ из пропорције $a : x = x : b$. Стога је природно да су се они занимали и проблемом продужене пропорције, тј. налажењем $x$ и $y$ за које је $a : x = x : y = y : b$. Заправо, наводи се да је Хипократ препознао да се овај проблем у случају када је $b = 2a$ своди на проблем удвостручавања коцке – из $a : x = x : y = y : 2a$, добија се да је $x^3 = 2a^3$. Дакле, Хипократ је разматрао и проблем удвостручавања коцке. Нема никаквих записа о томе да ли се он бавио и трећим великим проблемом – проблемом трисекције угла. Но, познато је који се математичар бавио овим проблемом.

## Хипијина трисектриса

У V веку п. н. е. са развојем грчког друштва, појавила се и потреба за другачијим и ширим образовањем слободних људи. Ту су софисти били посебно значајни. Софисти су били свестрано образовани људи, са великим и разноврсним искуством и фокус њиховог интересовања није било утврђивање великих истина о природи него подучавање вештини живљења и управљања животом. Можда и главни фокус њиховог образовања је било образовање у реторици, али баш ту се и крије један од разлога што су многи софисти изашли на лош глас. Јер, да ли је циљ говорништва да непристрасно изнесе ставове, или да, у ко зна које сврхе, убеди саговорника у нешто? Ми се наравно нећемо детаљно бавити софистима, разлог због којих су они споменути овде је што је један од истакнутих софиста био и Хипија из Елиде.

Хипија је био свестрано образован, али је важио и за хвалисавог човека. Приписује му се изјава да је зарађивао више од ма која друга два софиста заједно. Много тога је писао, али ниједно дело није остало до наших дана. Но, оно што је нама занимљиво је да је он био први који је у математику увео криву која није ни права ни круг. Крива коју је он увео спада у, такозване, механичке криве: она је формирана као скуп тачака при неком кретању. Погледајмо следећу слику.




Замислите да истовремено равномерно 'спуштате' ивицу $AB$ квадрата $ABCD$ паралелно надоле и ротирате ивицу $DA$ око тачке $D$ ка ивици $DC$. Дакле, оба кретања су равномерна и врше се тако да се у истом тренутку транслирана ивица $AB$ поклопи са ивицом $DC$, када и ротирана ивица $DA$ са истом ивицом. Ако је $A'B'$ тренутни положај ивице $AB$, а $DA"$ тренутни положај ивице $DA$, у пресеку добијамо тачку $P$. Геометријско место тачака које се тако добијају и формира ту криву. Обратимо пажњу на чињеницу да тачка $Q$ није добијена у пресеку ових ивица јер су се оне преклопиле у том тренутку. Она је ту додата као гранична тачка.

Ова крива је позната и под именом Хипијина трисектриса. Зашто трисектриса? Једноставан је разлог — ако имамо ову криву, онда можемо да извршимо трисекцију (поделу на три једнака дела) сваког оштрог угла (а то је и довољно, јер се онда сигурно може извести трисекција и ма ког угла). Рецимо да је угао који желимо да поделимо $\measuredangle CDA"$. Тачка $P$ је пресек дужи $DA"$ и трисектрисе. Позиција дужи $AB$ коју спуштамо надоле, а која одговара тачки $P$ је $A'B'$. С обзиром да исто времена треба дужи $A'B'$ да се спусти до дужи $DC$, колико и дужи $DA"$ да се спусти до исте дужи, онда се за трећину тог времена дуж $DA"$

ротирала за трећину угла $\measuredangle CDA$". Дакле, само је потребно поделити дуж $DA'$ на три једнака дела тачкама $T$ и $U$ и исцртати две паралелне дужи $TR$ и $US$. У пресеку се добијају тачке $V$ и $W$ и пошто је $A'T = TU = UD$, онда је и $\measuredangle PDV = \measuredangle VDW = \measuredangle WDQ$. Тако смо дакле почетни угао поделили на три једнака дела. Трисектриса нам је проблем трисекције угла свела на проблем трисекције дужи, а то је лак проблем. Наравно, ова крива се не може конструисати помоћу лењира и шестара, те није решење проблема у каснијој, рестриктивној, његовој варијанти.

## Несамерљивост

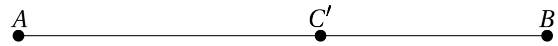
Као што смо видели, идеја Питагорејаца је била да се сваком објекту придружи неки природан број. Дакле, однос ма која два објекта, ма које две величине мора бити описан као однос два природна броја. Проблем је у томе што то ипак није тако и до тог открића је дошло половином V века п. н. е. Традиција ово откриће приписује већ раније споменутом Хипасу из Метапонта.

Прво спомињање проблема несамерљивости појављује се у Платоновом дијалогу *Теетет*, који је Платон написао 368. или 367. године п. н. е, а догађаји описани у том дијалогу се фиктивно приписују години 399. У том дијалогу наводи се да је стари математичар Теодор из Кирене (грчка колонија у данашњој Либији) доказивао групи младића, међу којима је и Теетет, који је описан као седамнаестогодишњак, да су квадратни корени бројева $3, 5, \ldots, 17$ (сем наравно $9$) ирационални бројеви. Занимљиво је да се овде не наводи доказ да је $\sqrt{2}$ ирационалан број. Очигледно је да се сматрало да је у то време ово била добро позната чињеница, коју није требало образлагати.

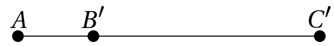
Доказ ирационалности броја $\sqrt{2}$ који смо учили у средњој школи је мало поједностављен доказ који наводи још Аристотел. Он се везује за чињеницу да су дијагонала и страница квадрата несамерљиви. Шта то значи? Ако са $d$ обележимо дијагоналу квадрата, а са $a$ страницу квадрата, то значи да не постоји дуж $l$ таква да је $d = ml$, а $a = nl$ за неке природне бројеве $m$ и $n$.

Како се уопште испитује да ли таква дуж постоји? Другим речима, пошто су Питагорејци свакако веровали да су ма које две величине, па ето и дужи, самерљиве, како се налази та дуж којом се обе могу премерити — њихова заједничка мера. Користи се прастари занатски трик. Замислимо да имамо две траке и желимо да нађемо њихову заједничку меру. Њих ћемо наравно приказати помоћу дужи. Дакле, имамо дужи $AB$ и $BC$:

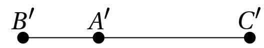

Сада краћу траку преклопимо преко дуже (мањом покушавамо да премеримо дужу)



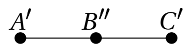

Поступак поновимо:



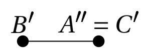

Нисмо успели, но сада оним што је остало покушавамо да премеримо мању ($B'C' = BC$):




Понављамо:




И још једном:



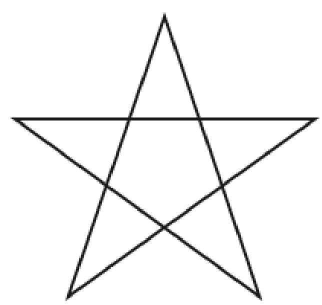

Успели смо да добијемо заједничку меру — то је дуж $B'A' = AB'$. Ако се овај поступак никада не би завршио почетне дужи (траке) би биле несамерљиве.

Погледајмо како 'иде' тај стари доказ несамерљивости дијагонале и странице квадрата (овај доказ се може наћи у неким издањима Еуклидових *Елемената* при крају X књиге, но опште је мишљење да он није ту био у оригиналу и да је то касније додато).

Нека је $ABCD$ квадрат и $AC$ његова дијагонала. Показујемо да су дијагонала $AC$ и страница $AB$ несамерљиве по дужини. Претпоставимо да оне јесу самерљиве. Показаћемо да је тада један број истовремено и паран и непаран. Јасно је да је квадрат над $AC$ једнак двоструком квадрату над $AB$. Како су по претпоставци дијагонала и страница самерљиве, оне су у пропорцији као два цела броја. Нека је то пропорција $DE : F$, где су $DE$ и $F$ најмањи бројеви који остварују ту пропорцију. $DE$ не може бити јединица пошто би у том случају, како је $AC > AB$ добили да је $F$ цео број који је мањи од 1, што није могуће. Дакле, $DE$ није јединица, него неки цео број (већи од 1). Како је $AC : AB = DE : F$, следи да је такође $AC^2 : AB^2 = DE^2 : F^2$. Но, $AC^2 = 2AB^2$ и стога је $DE^2 = 2F^2$. Дакле, $DE^2$ је паран број, па стога и $DE$ мора бити паран број. Јер, ако би био непаран број, његов квадрат би такође био непаран број. Наиме, ако се неки број непарних бројева сабере и ако у том збиру има непарно много бројева, онда је и тај збир непаран. Стога је $DE$ такође паран број. Нека је онда $DE$ подељено на два једнака броја у тачки $G$. Како су $DE$ и $F$ најмањи бројеви који су у наведеној пропорцији, они су узајамно прости. Стога, како је $DE$ паран број, $F$ мора бити непаран. Јер, ако би он био паран број, онда би број 2 мерио и $DE$ и $F$, а то је немогуће јер су они узајамно прости. Стога $F$ није паран него је непаран. Како је $ED = 2EG$ следи да је $ED^2 = 4EG^2$. Но, $ED^2 = 2F^2$ и стога је $F^2 = 2EG^2$. Стога $F^2$ мора бити паран број те је $F$ такође паран број. Но, такође је показано да $F$ мора бити непаран број, што је немогуће. Стога следи да $AC$ не може бити самерљиво са $AB$ што је и требало показати.

Ако се занемаре неке специфичности, које продужавају доказ, попут тога да се инсистира да се посебно докаже да $DE$ не може бити 1, као и мало развученог доказа чињенице да је квадрат непарног броја непаран број, а и асиметрије у ознакама, где се користи, с једне стране $DE$, а с друге само $F$ (а види се и зашто је то тако – $DE$ се дели на два половине, а $F$ не), то је доказ који смо имали у средњој школи. Јасно је да је овај доказ прилично софистициран, користи се ту свођење на апсурд у више корака и, као што се каже, ради се о 'слегнутом' доказу, који сигурно као такав није могао да се појави у петом веку пре нове ере. Дакле, није то доказ у коме се први пут показала несамерљивост дужи.

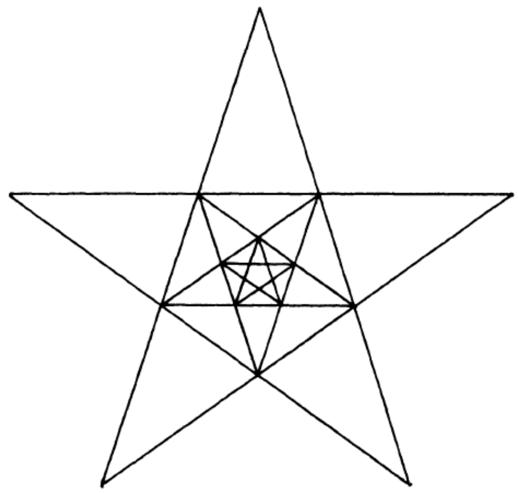
Први доказ несамерљивости се везује, као што смо већ навели, за Хипаса из Метапонта и сматра се да је он пронађен средином V века п. н. е. Присетимо се пентаграма.

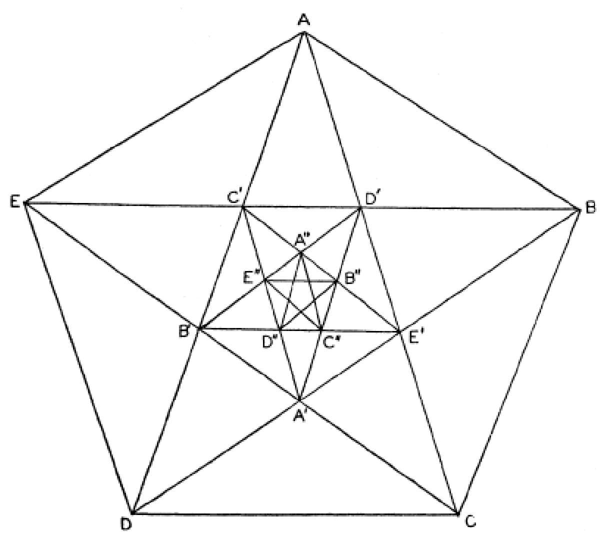


Већ смо рекли да је то био важан симбол за Питагорејце. Њега формирају дијагонале правилног петоугла, но јасно је да се у центру ове звезде налази још један правилни петоугао (и не само један. . . ):

Видимо опадајући низ правилних петоуглова. Доцртајмо почетни правилни петоугао и означимо темена ових петоуглова.

Већ смо навели да је Талесу била позната чињеница о једнакости углова на основици једнакокраког троугла, наравно да је и Питагорејцима то било познато. Као и обратно тврђење – да наспрам једнаких углова имамо и једнаке странице. Вероватно им није био познат доказ који би 'прошао' садашњу логичку проверу, но било им је јасно да то важи. Еудем у својој историји наводи да су знали да је збир углова у троуглу био једнак двоструком правом углу. Одавде, поделом петоугла на троуглове, а знамо да су их такве поделе занимале, лако се добија колики је збир унутрашњих углова у петоуглу, па и чи-






њеница да је збир спољашњих углова једнак четвороструком правом углу. Наравно, као што је већ наведено раније, била је позната и једнакост унакрсних углова.

Све ово је било довољно да Хипас може да закључи да је $AE = AB'$ и $B'D = B'E'$ те је $AD - AE = B'E'$. Дакле, разлика дужина дијагонале и странице великог петоугла једнака је дужини дијагонале мањег. Док је слично $AE = ED' = EA'$ и $B'E' = B'D = B'E$ те стога и $AE - B'E' = B'A'$, те је разлика дужине странице већег и дијагонале мањег једнака дужини странице мањег петоугла. Наравно да се овај поступак наставља. Ако са $d_n$ означимо дужину дијагонале $n$-тог правилног петоугла, а са $a_n$ дужину његове странице, онда имамо да је

$$d_{n+1} = d_n - a_n, \quad a_{n+1} = a_n - d_{n+1}, \quad \text{за све } n.$$

Но, поступак налажења заједничке мере $d_1$ и $a_1$, који смо раније описали се управо у томе и састоји: налазимо $d_1 - a_1$ и пошто је то мање од $a_1$, онда од $a_1$ одузимамо тај резултат и тако настављамо. Дакле, добијамо низ $d_1, a_1, d_2, a_2, \ldots$. Према томе, овај процес се никада не завршава те дијагонала и страница правилног петоугла нису самерљиве. Уосталом, ако би $l$ била заједничка мера за $d_1$ и $a_1$, онда би она мерила све ове странице и дијагонале, а то није могуће јер је јасно да се оне све више и више смањују и за довољно мали петоугао сви ови елементи ће бити краћи од $l$.

Дакле, видимо да је прилично очигледно да дијагонала и страница правилног петоугла нису самерљиве и да се, што би се рекло, „све види са слике". Слике која је била изузетно значајна Питагорејцима. Наравно да се нешто слично може извести и за дијагоналу и страницу квадрата, али ту немамо тако природно формирану слику, нити је доказ који смо навели за ирационалност $\sqrt{2}$ таквог карактера. Стога се са великом сигурношћу може закључити да се несамерљивост, која је била велики шок за Питагорејце, а имала и врло озбиљне последице по каснији развој грчке математике, први пут установила у случају дијагонале и странице правилног петоугла.

## Зенонови парадокси

За оснивача Елејске школе сматра се Парменид. Основна идеја његовог учења била је: јединственост и непроменљивост. Свако кретање је илузија – разликујемо оно што је суштинско, стварно, од онога што је чулно. Ово гледиште су критиковали, па и исмевали Питагорејци. Стога је Зенон (око 450. године п. н. е.), Парменидов ученик, смислио више логичких парадокса који су имали за циљ да покажу да је и питагорејско учење о променама и вишеструкостима такође проблематично:

Моји списи су помоћ Парменидовој тези против оних који су се усудили да је изложе подсмеху, тврдећи да ако Једно постоји, из те тезе произлази много смешног и њој самој противречног. Мој спис побија оне који тврде да множина постоји, враћа им удар за ударом, и још више, настојећи да учини јасним да би, још смешнија него претпоставка да Једно постоји, изгледала њихова претпоставка о множини која постоји.

Зенон је смислио око четрдесет парадокса, од којих је познато десет. Аристотелова *Физика* је главни извор за Зенонове доказе против кретања. Ми ћемо навести четири парадокса. Прва два парадокса тичу се дискретности/континуираности простора.

**1. Дихотомија** Да би било ко прешао неко растојање, он најпре мора да пређе половину тог растојања, а да би прешао ту половину, мора најпре четвртину итд. Стога би он морао да пређе бесконачно много делова у коначно време.

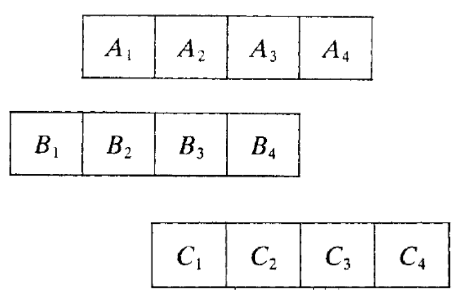
**2. Ахил и корњача** Ахил је наравно бржи од корњаче. Стога јој он у трци да неку предност. Но, док Ахил стигне до места где је била корњача, она је отишла мало даље. Док стигне до тог следећег места, она је опет мало одмакла. Стога Ахил никада не може да стигне корњачу.

Одговоре на ове парадоксе је понудио сам Аристотел. Зенонови докази претпостављају да је немогуће прећи бесконачан број тачака за коначно време. Али то значи не увидети разлику између **бесконачне дељивости** и **бесконачне протежности**. Свакако је немогуће прећи бесконачну удаљеност за ограничено време, али **јесте** могуће прећи **бесконачно дељив простор**, јер је и само време **бесконачно дељиво** тако да је заправо посреди прелажење бесконачно дељивог простора за неко бесконачно дељиво време.

Друга два посвећена су времену.

**3. Стрела** Стрела која путује у сваком тренутку заузима одређену позицију у простору. То значи да се у било ком тренутку она не креће. Ако се не креће у било ком тренутку, она се уопште и не креће.

**4. Стадион** Нека постоји најкраћи временски интервал. И нека је то интервал у коме одређени објекат који се креће прође једно место (видети слику):



Посматрамо три објекта – један је непокретан ($A$ – трибине на стадиону), а други се крећу, али у супротним смеровима – $B$ слева удесно, а $C$ здесна улево. Проблем је у томе што када $B$ прође непокретни $A$ за једно место, а $C$ исто $A$ за једно место, добијамо:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |

Видимо да је $B$ у односу на $C$ прошло за два места. Тако да тај тренутак не може бити најкраћи.

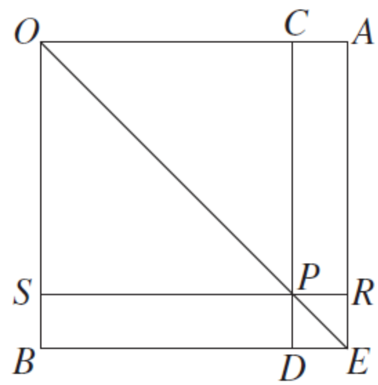
## Последице парадокса и несамерљивости по даљи развој грчке математике

По свему судећи, Зенонови аргументи, као и откриће несамерљивих величина су имали веома дубок утицај на развој грчке математике. У раније време су се величине код Питагорејаца представљале каменчићима, но код Еуклида ћемо већ видети да се све величине, па чак и природни бројеви представљају дужима. Геометрија је преузела примат у односу на бројеве.

Утицај је био толико велики да се код једначина почела захтевати хомогеност – код система једначина које су у Месопотамији без проблема, а и без брига, решавали:

$$xy = A, \quad x + y = b,$$

код Грка се захтевало да $A$ буде површина, а $b$ дуж. Ово је остало, под утицајем Грка, веома дуго у математици. Чак се пропорција избегавала и код решавања линеарних једначина: $ax = bc$ се посматрало као једнакост површина, а не као једнакост $a : b = c : x$. За решавање се, дакле, није користила сличност, већ једнакост површина.




Конструисао би се правоугаоник $OCDB$ чије су странице $b = OB$ и $c = OC$ и онда би се дуж $OC$ поставила дуж $OA = a$. Затим би се комплетирао правоугаоник $OAEB$ у коме дијагонала $OE$ сече $CD$ у тачки $P$. Како је $P(\triangle AOE) = P(\triangle BOE)$, $P(\triangle RPE) = P(\triangle DPE)$ и $P(\triangle OSP) = P(\triangle COP)$ (одговарајући троуглови су наравно подударни, стога и имају исте површине), то је $P(SBDP) = P(ACPR)$ и, коначно, $P(COBD) = P(OSRA)$, тј. $bc = aCP$, те тако добијамо да је $x = CP$.

Питагорејци су имали још утицаја. Архита из Тарента (југ данашње Италије) је увео КВАДРИВИЈУМ: аритметика, геометрија, музика, астрономија (знамо да је музика била значајна Питагорејцима). Уз касније додавање ТРИВИЈУМА: граматика, реторика и логика, имамо основу за образовање на Западу у току наредних скоро 2000 година.

Осим овога, Платон је учио из књиге Питагорејца Филолаја и та књига је на њега извршила велики утицај. Без обзира на то што се за Питагорејце не би могло рећи да су били идеалисти у филозофији, испоставило се да су они имали велики утицај на идеалисту Платона. Не би се могло рећи да је сам Платон имао неких математичких резултата, али је математика имала врло важно место у његовој Академији. Што је сигурно под утицајем Филолаја, јер оно мало што се о математици може наћи у изрекама Сократа је више негативно него позитивно. У сваком случају, на вратима Платонове Академије у Атини стајале су речи: „Нека овде не улази нико ко не зна геометрију.” Значајни математичари су похађали Платонову Академију.

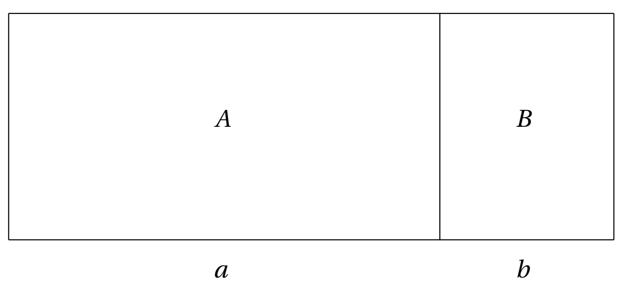
# Еудокс и метод исцрпљивања

Како упоређивати несамерљиве величине? Рано решење овог проблема је изузетно занимљиво. Наиме сматрало се да су величине $a, b, c, d$ у пропорцији

$$a : b = c : d,$$

ако се у поступку у коме се за $a$ и $b$ тражи заједничка мера добијају исти бројеви као у поступку за $c$ и $d$. Ово 'ради' и у случају када су $a$ и $b$ (односно $c$ и $d$) самерљиви, а и када нису. Само се мора десити да алгоритам даје исте бројеве.

Добра је илустрација то да су правоугаоници истих висина у истој пропорцији као и њихове основе. Наиме,




јасно је да се у покушају налажења заједничке мере за $a$ и $b$ исти број пута врши одузимање у сваком кораку, као и у налажењу зеједничке мере за $A$ и $B$, без обзира на то да ли ће се поступак завршити после коначно много корака или не. На овај начин се, дакле, могу поредити и односи несамерљивих величина.

Но, била је потребна боља формулација. Она потиче од Еудокса, који је био студент у Платоновој Академији. Налазимо је у V књизи Еуклидових *Елемената* (дефиниција 5). Наравно, тамо је наведена речима, ми је можемо краће и јасније овако исказати.

Величине $a, b, c, d$ су у пропорцији $a : b = c : d$ ако и само ако је за све позитивне целе бројеве $m$ и $n$ тачно: уколико је $ma < nb$, онда је и $mc < nd$, а ако је $ma = nb$, онда је и $mc = nd$, а ако је $ma > nb$, онда је $mc > nd$.

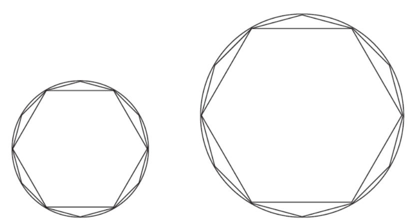
Како налазити површину криволинијских фигура? Чини се да је и раније постојала идеја да се у и око неке криволинијске фигуре уписују, односно описују праволинијске фигуре и да се тако повећавањем броја страница приближимо површини криволинијске фигуре. Но, наравно да је појам лимеса био непознат, а тиме и решење проблема није било лако доступно. На основу онога што је писао Архимед, Еудокс је био тај који је дао аксиому, коју данас знамо под именом Архимеда, аксиому непрекидности. Она каже да ако неке две величине имају однос (што значи да ниједна није једнака нули и да су оне упоредиве), онда се увек може наћи умножак једне који је већи од оне друге. То решава и проблем који је занимао математичаре – који је то угао који тангента на криву заклапа са самом кривом. Чини се да то није нула, а опет ... Тај криволинијски угао просто не задовољава Еудоксову аксиому у односу на праволинијске углове.

Изведена из овог метода је и грчка МЕТОДА ИСЦРПЉИВАЊА (израз који Грци уопште нису користили, али се одомаћио у савременој математици):

Ако се од неке величине одузме бар њена половина, па се од остатка одузме бар његова половина и ако се тај поступак настави, онда се може доћи до величине која је мања од ма које унапред задате величине.

Сада ћемо показати како је, сматра се, баш Еудокс, доказао да се површине кругова односе као квадрати њихових полупречника.

Нека су то кругови $k$ и $K$, њихове површине $p$ и $P$, њихови полупречници $r$ и $R$.



$k$ $K$

Желимо да докажемо да је

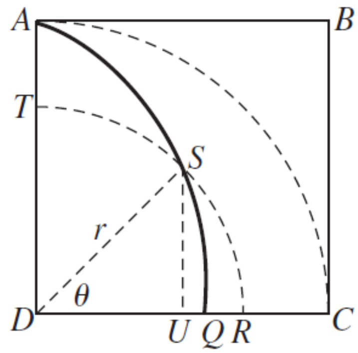
$$p/P = r^2/R^2.$$

Претпоставимо да је $p/P > r^2/R^2$. Тада постоји величина $p'$ мања од $p$ таква да је $p'/P = r^2/R^2$. Нека је $\varepsilon = p - p'$. Унутар кругова $k$ и $K$ можемо уписивати правилне многоуглове који имају исти број страница $n$ и површине $p_n$ и $P_n$.

Није тешко уверити се да се разлика између површина круга и површине уписаног многоугла смањује бар за пола њене вредности ако удвостручавамо број страница. То значи да ћемо после извесног времена добити многоугао са $m$ страница за који је $p - p_m$ мање од $\varepsilon$. Тако добијамо да је $p_m > p'$. Познато је да је $p_m/P_m = r^2/R^2$. Стога је $p_m/P_m = p'/P$. Како је $p_m > p'$ добија се да је и $P_m > P$, што је бесмислено јер је $P_m$ површина многоугла који је уписан у круг $K$. На исти начин се долази до контрадикције ако се претпостави да је $p/P < r^2/R^2$. Закључујемо да мора бити $p/P = r^2/R^2$.

# Динострат и квадратура круга

Ученик Еудокса Менем и његов брат Динострат такође су имали значајне резултате. Менем се бавио конусним пресецима, док је Динострат искористио Хипијину трисектрису да изврши квадратуру круга (те се, стога, та крива назива и квадратрисом). Погледајмо како је то урадио.




Диностратов резултат је да важи следеће:

$$\widehat{AC} : AB = AB : DQ. \tag{1}$$

Претпоставимо да ово није тачно и нека је $\widehat{AC} : AB < AB : DQ$. Тада је $\widehat{AC} : AB = AB : DR$, где је $DR > DQ$. Нека круг са центром у $D$ и полупречником $DR$ сече трисектрису у тачки $S$ и страницу $AD$ у тачки $T$. Нека је подножје нормале из $S$ на $DC$ означено са $U$. Познато је било да се лукови који одговарају истим угловима односе као што се односе полупречници тих кругова, те је $\widehat{AC} : \widehat{TR} = DC : DR$ и, како је $DC = AB$, следи $\widehat{AC} : AB = \widehat{TR} : DR$. Како је, по хипотези, $\widehat{AC} : AB = AB : DR$, добијамо да је $\widehat{TR} = AB$. На основу особина трисектрисе $\widehat{TR} : \widehat{SR} = AD : SU = AB : SU$ и стога следи да је $\widehat{SR} = SU$, што није могуће јер је дужина нормале из $S$ на $DC$ мања од дужине ма које друге криве од $S$ до тачке на $DC$.

На сличан начин се разрешава и случај $\widehat{AC} : AB > AB : DQ$, те закључујемо да мора бити $\widehat{AC} : AB = AB : DQ$. На основу овога, можемо да конструишемо дуж чија је дужина једнака $\widehat{AC}$. Но, то је четвртина кружнице и онда није тешко конструисати и квадрат чија је површина једнака површини круга са центром у $D$ и полупречником $DC$.

Нама данас није тешко да одредимо једначину трисектрисе у поларним координатама. Добијамо

$$\pi r \sin\theta = 2a\theta,$$

ако је $a = AB = DC$. Наиме, у поларним координатама је $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$. Но, из својстава трисектрисе, која смо већ користили горе, имамо да је

$$\frac{\theta}{\pi/2} = \frac{y}{a}.$$

Дакле, $\pi y = 2a\theta$ и, како је $y = r\sin\theta$, добијамо горенаведену једначину. Одавде лако добијамо координате тачке $Q$ (имамо ту, додуше лимес, али већ смо рекли да се та тачка и не појављује на кривој као пресек те две дужи): $\pi r/2a = \theta/\sin\theta \to 1$, кад $\theta \to 0$, те је $x = r\cos\theta \to r = \frac{2a}{\pi}$, кад $\theta \to 0$. Дакле, $Q$ има координате $(2a/\pi, 0)$. Није тешко видети да се добија исто што и у једначини (1).

# Еуклид

После смрти Александра Великог, дошло је до борбе за власт међу његовим генералима, територија је подељена на три дела, а власт у Египту је била у рукама династије Птолемеја. Започиње епоха хеленизма. У Александрији су основане две значајне институције – Музеј (који је заправо био институт у савременом смислу) и Библиотека. Многи значајни мислиоци су дошли у Александрију и ту је сада био центар науке.

Један од тих учених људи био је и Еуклид (око 300 године п. н. е.). Занимљиво је да се о њему зна врло мало, чак се не зна ни место у коме је рођен, ни где се школовао, али се сматра да је учио са Платоновим студентима, ако и није био у самој Академији.

Нису сва Еуклидова дела сачувана. Између осталих, изгубљене су и његове књиге о конусним пресецима, које Архимед наводи и које користи. Но то дело, као и једно раније о конусним пресецима, касније је било превазиђено захваљујући Аполонијевим радовима о конусним пресецима. Аполонијевим радовима се нећемо бавити због недостатка времена.

Пет Еуклидових дела је сачувано: *Елементи, Подаци, Дељење фигура, Феномени* и *Оптика.* Пре озбиљније дискусије о *Елементима* кратко ћемо се позабавити овим осталим делима.

*Оптика* је заправо посвећена раној математичкој теорији перспективе. У њој Еуклид излаже своју теорију директног виђења (дакле без преламања и рефлексије зрака светлости) по којој око шаље зраке који путују до објекта. У делу користи резултат, који се на више места појављује у старим делима, да је $\mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta$ ако је $0 < \alpha < \beta$.

Дело *Дељење фигура* је сачувано само у арапским преводима у којима су изостављени неки докази као лаки. Наравно, оно је касније преведено на латински, а потом и на друге европске језике. Састоји се од 36 ставова у којима се разматрају разне поделе равних фигура.

На пример, у ставу 1 се тражи да се нађе права паралелна једној страници троугла која тај троугао дели на два дела исте површине, док се у ставу 4 тражи права која је паралелна основицама трапеза, а полови га. Последњи став тражи поделу четвороугла у датом односу правом која пролази кроз дату тачку на једној од страница тог четвороугла.

Еуклидово дело *Подаци* по свему судећи је настало као додатак *Елементима.* Садржи 95 тврђења која се тичу налажења разних величина, геометријских правила о паралелним правим и пропорционалним величинама. Нека од тврђења су еквивалентна решавању квадратних једначина. На пример, тврђења 84 и 85 су геометријска верзија месопотамских метода за решавање система једначина $xy = a^2, x \pm y = b$.

Дело *Феномени* бави се астрономијом, заправо делом који је посвећен кретањем Сунца и звезда, али се све то третира геометријски. Дакле, ради се о сферној геометрији. Занимљивости ради, Став 1 каже да је Земља у средишту космоса и то се и доказује ...

Позабавимо се сада главним Еуклидовим делом, његовим *Елементима.*

Еуклидови *Елементи* нису прво дело са тим насловом. Зна се за још три ранија таква дела, једно од њих и од Хипократа са Хиоса. Но, она нису сачувана. *Елементи* су уџбеник елементарне математике. Састоји се од тринаест књига (данас би се то пригодније могло назвати главама, али користимо традиционалну терминологију). Првих шест књига посвећено је геометрији у равни, следеће три теорији бројева, десета несамерљивим величинама и последње три скоро у целости геометрији простора.

На почетку књиге дате су 23 дефиниције. Проблем са овим дефиницијама је у томе што оне не дефинишу појмове на основу већ познатих, једноставнијих појмова. Рецимо, дефиниција тачке је 'оно што нема делова', дефиниција праве: 'дужина без ширине'. То свакако нису дефиниције у правом смислу те речи, могло би се рећи да је то покушај неког појашњења, можда под утицајем Платона.

После ових дефиниција следи пет постулата и пет аксиома (или општих истина). Разлика би требало да буде у томе што су аксиоме опште, односе се на све области, док су постулати специфично геометријски.

Постулати

1. Могуће је нацртати праву линију од било које тачке до било које тачке.

2. Коначна права линија може се продужити у праву линију.

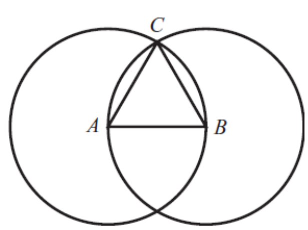
3. Може се описати круг са било којим центром и било којим полупречником.
4. Сви прави углови су међусобно једнаки.
5. Уколико права линија сече друге две праве линије и ако је збир унутрашњих углова са једне стране мање од збира два права угла, онда се, ако се те праве линије продуже неограничено, оне секу са те стране са које је збир тих углова мањи од два права угла.

Аксиоме

1. Ствари које су једнаке истој ствари једнаке су и међу собом.
2. Ако једнаким додате једнаке, целине су једнаке.
3. Ако се једнаке одузму од једнаких, остаци су једнаки.
4. Ствари које се поклапају једна са другом, једнаке су међу собом.
5. Целина је већа од дела.

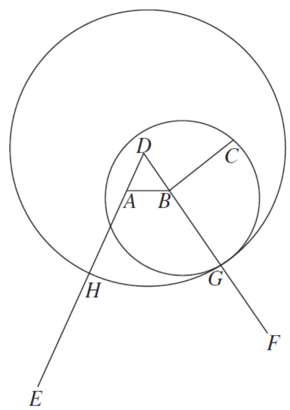
Као што се може видети, Еуклид се трудио да да минималан број постулата. На пример, постулат 3 говори само да се може конструисати круг са датим центром и датим отвором шестара. Нема речи о томе да се нека дужина може ‘пренети’ помоћу шестара са једне дужи на другу. Дакле, овде имамо колапсибилан шестар – када се подигне са папира, он се затвара. На самом почетку, Еуклид се потрудио да покаже како се ова рестрикција може превазићи. То је урађено у прва три става прве књиге у којој има укупно 48 ставова.

Први став говори о конструкцији једнакостраничног троугла са задатом страницом.




Дакле, задата је дуж $AB$. Нацртају се две кружнице – једна са центром у $A$ и полупречником $AB$ и друга са центром у $B$ и истим полупречником. У пресеку ове две кружице добија се теме $C$ траженог једнакостраничног троугла. Нема никаквих коментара који објашњавају зашто се ове две кружнице уопште секу. Евидентно је да би нам требао неки постулат о непрекидности да бисмо то обезбедили. Но, тога нема.

У следећем ставу говори се о томе како се од дате тачке $A$ може нанети дуж једнаке дужине као и задата дуж $BC$, заправо како се може наћи дуж чија је дужина једнака збиру дужина две задате дужи.

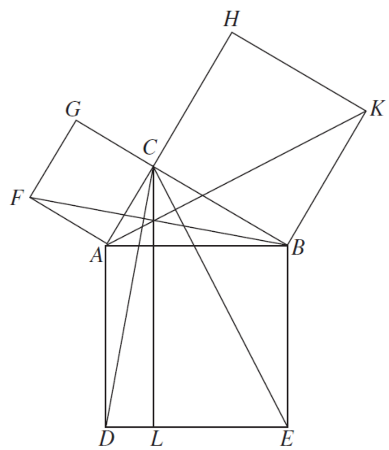



Најпре се конструише једнакостранични троугао $\triangle ABD$, потом се налази пресек круга са центром у $B$ и полупречником $BC$ и продужењем дужи $DB$. Коначно се налази пресек круга са центром у $D$ полупречника $DG$ и продужетка дужи $DA$. Јасно је да је $AH$ дуж исте дужине као и $BC$. Тако смо добили да је дужина дужи $DH$ заправо збир дужина дужи $AB$ и $BC$.

Потом се показује и како се од задате дужи веће дужине може одузети задата дуж мање дужине.

У првој књизи се налазе теореме о подударности троуглова, о својствима паралелних правих, а и конструкције паралелограма. Последња два става – 47 и 48 посвећена су доказу Питагорине теореме и њеног обрата. Верује се да доказ Питагорине теореме који је овде приказан потиче од самог Еуклида.

Доказ је неоспорно елегантан. Наиме, примећује се да је квадрат над $AC$ једнак двоструком троуглу $\triangle AFB$ (када се овако каже мисли се да су одговарајуће површине једнаке), јер је основица тог троугла $FA = AC$, а висина је $AC$. Овај троугао је пак једнак троуглу $\triangle ACD$ (подударни су), а тај двоструки троугао је једнак правоугаонику $AL$ (да, понекад се код Еуклида правоугаоник тако означава, а и зашто да не, јасно је о ком се објекту ради, зашто уводити додатне тачке?) – основица троугла је $AD$, а висина је друга страница правоугаоника $DL$ (наравно, није то буквално висина, $DL$ је једнако висини). Закључује се да је квадрат над $AC$ једнак правоугаонику $AL$. На сличан начин




се добија да је квадрат над $BD$ једнак правоугаонику $BL$, те се тако и добија да је збир квадрата над $AC$ и $BC$ једнак квадрату над $AB$.

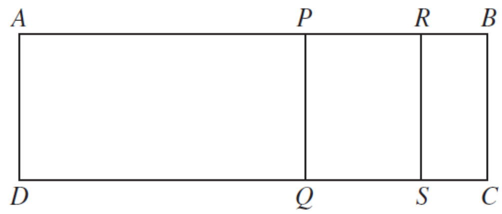
Вредна је спомена чињеница да Еуклид одмах после доказа Питагорине теореме даје и доказ обратног тврђења – уколико збир квадрата над две странице у троуглу јесте једнак квадрату над трећом те две прве странице образују прав угао.

Друга књига *Елемената* је краћа (садржи само 14 ставова) и већи део ње је помало необичан за наше поимање наставе геометрије. Ту се највише ради о грчкој *геометријској алгебри*. Наиме, криза у грчкој математици настала због проблема несамерљивости је, као што смо већ рекли, утицала на то Грци почињу да све бројеве и везе међу њима изражавају помоћу дужи, површина и слично. На пример, први став гласи:

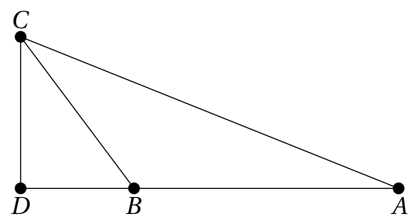
Ако су дате две праве линије и једна од њих се подели на било који број одсечака, онда је правоугаоник одређен са те две праве линије једнак правоугаоницима који су одређени том неисеченом правом линијом и сваким од одсечака.

Наравно, овде су те праве линије заправо дужи и ово није ништа друго до закон дистрибутивности за множење:
$AD \cdot AB = AD \cdot AP + AD \cdot PR + AD \cdot RB$ (наравно, може и било који број делова, слика се односи на поделу на три дела). У каснијим књигама се налазе и докази закона асоцијативности и комутативности за множење.

Став 5, на компликован начин формулише формулу за разлику квадрата, прецизније ту је показано да је $(a+b)(a-b)+b^2=a^2$. Све је ово везано и за решавање квадратне једначине, сличан дијаграм, који се користи за доказ ове чињенице, користи се и за решавање једначине $ax-x^2=b^2$. Нећемо се детаљније тиме бавити.




Последња три става су занимљива. Став 12 даје формулацију косинусне теореме за тупоугли троугао (наравно формулација укључује тај тупи угао), док став 13 даје формулацију те теореме за оштроугли троугао. Илустрација за став 12:



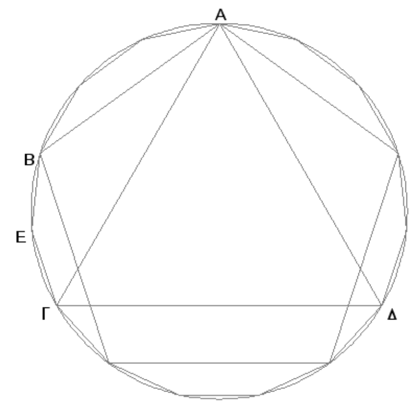

Речима се описује формула: $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BD$. Наравно, ово се лако показује двоструким коришћењем Питагорине теореме.

Став 14 гласи: Конструисати квадрат једнак правоугаоној слици.

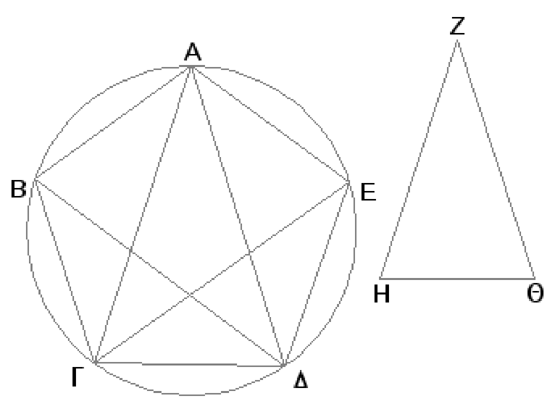
Дакле, овде експлицитна формулација није да се докаже нешто, него да се покаже како се може извести квадратура произвољног многоугла. У одговарајућој слици која илуструје став налази се опис квадратуре неког трапезоида, али је јасно да се то може урадити за било који многоугао. Најпре се заправо, на основу више ставова из прве књиге констатује да постоји правоугаоник чија је површина једнака површини датог многоугла, а суштина става је да правоугаоник сведе на квадрат. Интересантан је тај низ ставова у којима се постепено налази тај тражени правоугаоник, читаоцима препуштамо да их потраже ако им је то занимљиво, но ми то нећемо овде даље показивати.

Генерално се сматра да је материјал који је представљен у прве две књиге углавном резултат рада Питагорејаца. Трећа и четврта књига баве се геометријом круга и сматра се да тај материјал углавном потиче од Хипократа са Хиоса. Први став у трећој књизи говори о конструкцији центра круга, док последњи, став 37 садржи тврђење добро нам познато: $PA^2 = PB \cdot PC$, где је $P$ тачка ван круга, $A$ додирна тачка тангенте на круг која пролази кроз $P$, док су $B$ и $C$ пресечне тачке сечице круга која пролази кроз $P$. У четвртој књизи има 16 ставова и они се углавном баве правилним многоугловима уписаним и описаним око круга.

На пример, 16. став говори описује конструкцију правилног петнаестоугла. Наиме, конструишу се једнакостранични троугао и правил-




ни петоугао који имају једно заједничко теме. И потом се констатује да је само потребно преполовити лук $\widehat{B\Gamma}$. Та добијена тачка нам тада даје и страницу траженог правилног петнаестоугла BE. Став 11, пак, описује конструкцију правилног петоугла уписаног у круг




и та је конструкција базирана на конструкцији једнакокраког троугла чији су углови на основици једнаки двоструком углу код врха. Потом се лук $\widehat{A\Gamma}$ полови и тако се нађе страница правилног петоугла. А конструкција траженог једнакокраког троугла описана је у ставу 10.

Пета књига садржи дубље појмове. Ту се разматра теорија пропорција. Књига је у великој мери базирана на Еудоксовим резултатима.

О дефиницији 5, смо већ писали раније, док је дефиниција 4 оно што нам је сада познато као Архимедова аксиома (а и сам Архимед то приписује Еудоксу):

Каже се да су две величине у односу једна према другој ако неки умножак ма које од њих може бити већи од друге.

И ову дефиницију смо спомињали када смо говорили о Еудоксу. Поента је да се овде говори о упоредивости две величине. На пример, дуж и квадрат нису упоредиви.

Број ставова у књизи је 25 и у њој има више ставова који говоре о својствима пропорција, али и ставова који говоре о својствима бројева попут асоцијативности множења или дистрибутивности множења према сабирању.

У шестој књизи, у којој има 33 става, теорија пропорција се примењује на сличности разних фигура. Но, наведимо и једну важну дефиницију која се овде појављује.

Дефиниција 3. Каже се да је дуж подељена у крајњој и средњој размери (непрекидно) ако цела дуж стоји према већем делу као већи део према мањем.

Ово је чувени 'златни пресек'. Нисмо споменули раније, али ако се страница правилног петоугла постави дуж његове дијагонале, онда имамо ову поделу дужи. У ставу 30 показује се како се дуж дели на овај начин. Термин „непрекидно" у нашој литератури је везан за чињеницу да се овај процес никада не завршава (као што смо видели раније).

Занимљив је став 31 (генерализација Питагорине теореме, сетите се и квадратуре 'месеца'):

Код правоуглих троуглова фигура конструисана на страни наспрам правог угла једнака је збиру сличних и слично конструисаних фигура над странама које образују прав угао.

Седма, осма и девета књига посвећене су теорији бројева, наравно у геометријском руху. Почиње се дефиницијама парних и непарних бројева, простих и сложених бројева, парно-непарних, непарно-непарних, квадратних и кубних бројева. Takође ту налазимо и дефиницију савршеног броја – то је онај број који је једнак збиру својих правих делилаца. Прва два става су посвећена Еуклидовом алгоритму преко узастопних одузимања као што смо већ писали. У првом ставу се заправо говори о томе да ако се добије 1 на крају тог алгоритма, онда су бројеви узајамно прости, а други став тражи да се опише налажење заједничке мере (не заједничког делиоца, терминологија је прилагођена геометрији) за бројеве који нису узајамно прости. У овој књизи има и других познатих својстава бројева. На пример, став 24 каже да ако су $a$ и $c$ узајамно прости и ако су и $b$ и $c$ узајамно прости, онда су то и $ab$ и $c$.

Осма књига није превише занимљива за модерног читаоца, док девета садржи неколико занимљивих резултата. На пример, став 20:

Простих бројева је више од сваке задате множине простих бројева.

Наравно да Еуклид не каже да простих бројева има бесконачно много. Појам бесконачности је још далеко у будућности. Он каже да простих бројева има ВИШЕ ОД МА КОЈЕ КОЛИЧИНЕ простих бројева. Доказ је онај који добро знамо: ако је дата нека количина простих бројева, све их помножимо и додамо јединицу. Анализирајући тај број добија се да мора да постоји још неки прост број сем тих задатих.

Став 35 речима на занимљив начин описује метод за налажење суме геометријске прогресије. Исписано формулом то је следеће:

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+\cdots+a_n}=\frac{a_2-a_1}{a_1}.$$

Одавде није тешко извести формулу:

$$a_1+\cdots+a_n=\frac{aq^n-a}{q-1}.$$

Последњи, 36. став говори о формули за налажење савршених бројева. У модерним терминима то је следеће: ако је збир $1+2+\cdots+2^{n-1}$ прост број, онда је број $(1+2+\cdots+2^{n-1})2^{n-1}$ савршен број. Наравно није тешко приметити да, ако је број $1+2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$ прост, онда и број $n$ мора бити прост. Наиме, уколико је $n=ab$, где су $a,b>1$, онда је

$$2^n-1=2^{ab}-1=\left(2^a\right)^b-1=(2^a-1)\left(\left(2^a\right)^{b-1}+\cdots+2^a+1\right).$$

Грци су знали прва четири савршена броја: 6, 28, 496 и 8128. Ојлер је показао да је сваки паран савршен број управо горенаведеног облика. Оно што се и даље не зна је да ли има бесконачно много парних савршених бројева, као и да ли уопште постоји непаран савршени број.

Десета књига је најобимнија и најкомпликованија. Она садржи чак 115 ставова и посвећена је проблему (не)самерљивости. На самом почетку налазимо неколико ставова који говоре о алгоритму за испитивање самерљивости величина који смо раније спомињали. Ту се истиче да су величине несамерљиве уколико се поступак никада не завршава, а да се тако налази заједничка мера уколико се поступак завршава. Потом следи низ ставова о међусобним односима самерљивих и несамерљивих величина. Разматрају се дужи самерљиве у степену, мислећи притом на други степен, тј. две величине чији су квадрати несамерљиви. И сложеније формиране величине. Заправо ту се разматрају, у савременим ознакама, величине облика $a\pm\sqrt{b}$, $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$, $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$. Ту су и поступци рационализације разломака облика $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$, $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$. Јасно је да разматрање овако формираних величина без модерне нотације није лако за праћење и стога се ова књига *Елемената* сматрала најнедоступнијом.

Последње три књиге су у највећој мери посвећене стереометрији. Једанаеста књига почиње низом дефиниција, од којих су неке проблематичне са логичког аспекта, попут „Тело је оно што има дужину, ширину и дубину”, „Граница тела је површина”. Последње дефиниције су дефиниције правилних полиедара: коцке, октаедра, икосаедра и додекаедра (пирамида је раније дефинисана, па овде нема дефиниције тетраедра). Ставови који следе се тичу односа правих и равни, на пример:

Став 3. Ако две равни секу једна другу, њихов пресек је права.

Став 14. Равни управне на истој правој паралелне су.

Каснији ставови се односе на рогљеве, запремине паралелепипеда и слично.

Дванаеста књига је кратка и почиње нама добро познатим ставовима:

Став 1. Слични многоуглови, уписани у кругове, односе се један према другом као квадрати над пречницима.

Став 2. Кругови се односе један према другом као квадрати над пречницима.

Потом следе ставови који се тичу запремина тела. На пример,

Став 7. Свака призма са троуглом у основи може се поделити на три међу собом једнаке пирамиде са троугловима у основама.

Став 10. Свака купа је трећина ваљка, ако имају исту основу и једнаке висине.

Последња, тринаеста књига посвећена је правилним полиедрима. Она почиње следећим ставом.

Став 1. Ако је дуж подељена непрекидно, биће квадрат над збиром већег дела и половине целе дужи једнак петоструком квадрату над том половином.

Нама није тешко да се у то уверимо. Наиме, ако је цела дуж $a$, а $x$ је већи део, онда је $a : x = x : (a - x)$. Добија се квадратна једначина

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Одавде следи да је

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 5\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Наравно, одавде није тешко наћи колико је $x$. И следећих пет ставова даје резултате за златни пресек, а и став 9 је у вези са њим. Став 10 је занимљив.

Став 10. Ако је у круг уписан правилни петоугао, биће квадрат стране тог петоугла једнак збиру квадрата стране правилног шестоугла и стране правилног десетоугла уписаних у исти круг.

Пред сам крај *Елемената*, у ставовима 13–17 одређени су односи квадрата ивице и квадрата пречника описане сфере за правилне полиедре:

| тело | однос |
|---|---|
| тетраедар | $\frac{2}{3}$ |
| октаедар | $\frac{1}{2}$ |
| хексаедар | $\frac{1}{3}$ |
| икосаедар | $\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ |
| додекаедар | $\frac{3-\sqrt{5}}{6}$ |

У последњем ставу *Елемената* најпре се пореде ивице правилних полиедара, а у другом делу тог става се показује да нема других правилних полиедара сем ових пет.

Значај Еуклидових *Елемената* је огроман. Састављени су око 300. године п. н. е. и копирани су велики број пута. У тим копирањима, додавани су коменари, неке додатне информације, додатни ставови, па чак и додатне две књиге за које се ипак зна да нису део оригиналних *Елемената*. Сматра се да је било око хиљаду издања овог дела.

## Архимед

Архимед је свакако био најзначајнији математичар антике и један од најзначајних математичара икада. Живео у је граду Сиракузи на Сицилији, а школовао се, скоро извесно, у Александрији. Знамо да је погинуо при освајању Сиракузе од стране Римљана 212. г. п. н. е. током Другог пунског рата. Како је, по неким историчарима, у тренутку смрти имао 75 година, процена је да је био рођен 287. године п. н. е.

Плутарх, у својој биографији римског генерала Марцела, који је освојио Сиракузу, пише да је Архимед био централна личност у одбрани Сиракузе због многих својих механичких направа које су задале велике невоље римским освајачима. Ипак, Плутарх каже, Архимеду су били дражи његови чисто математички резултати од тих машина.

Архимедови радови дуго времена нису били толико познати као Еуклидови *Елементи* добрим делом и зато што су *Елементи*, као што је већ речено, заправо уџбеник елементарне математике, док Архимедови радови то свакако нису. Има међу њима и једноставнијих списа, но многи су веома напредни и другачији.

Он је имао значајну преписку са александријским математичарима — Доситејем, који је био студент Архимедовог блиског пријатеља Конона, и Ератостеном који је дуги низ година био управник александријске Библиотеке. У тим препискама налазимо многе Архимедове радове. Ево списка Архимедових радова који су сачувани.

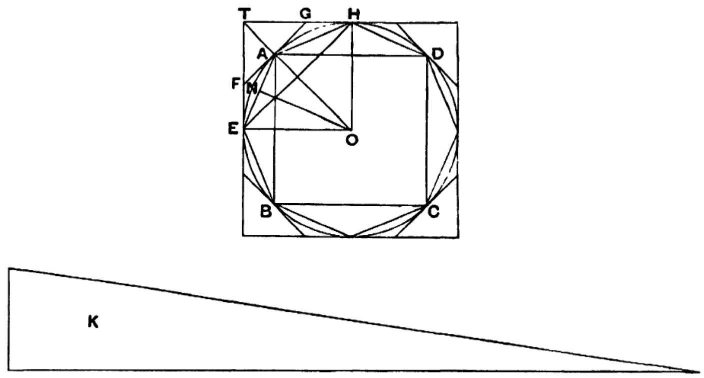
1. О равнотежи равни, Први и Други део
2. Квадратура параболе
3. О сфери и цилиндру, Први и Други део
4. О спиралама
5. О коноидима и сфероидима
6. О плутајућим телима
7. Мерење круга
8. Пребројавање песка
9. Метод
10. Књига лема
11. Проблем о стоци

Преписи ових дела потичу из X века и касније, чак и значајно касније.

Наравно да нема говора о томе да се можемо позабавити свим овим радовима, посебно не детаљно, но направићемо неки избор.

## Мерење круга

То је веома кратак рад и састоји се само од три става. У првом ставу се тврди да је површина круга једнака површини правоуглог троугла чија је једна катета полупречник круга, а друга је једнака обиму круга. Наравно да је то сада нама јасно, но, присетимо се да је питање квадратуре круга било и даље отворено. Присетимо се и Диностратове квадратуре круга помоћу трисектрисе, у којој се заправо налази дуж једнака четвртини обима круга. Те нам трисектриса омогућава да нађемо и овакав троугао, а лако је наћи квадрат исте




Слика 19: Мерење круга

површине као и дати троугао. Но, Архимедов резултат није у вези са причом о трисектриси.

Архимед користи исти метод који смо већ приказали при доказу да се површине кругова односе као квадрати (полу)пречника. Но, ипак га наводимо. Дакле, површина круга може бити једнака, може бити већа, а може бити и мања од површине троугла K. Означимо са $P(k)$ површину круга, а са $P(\mathrm{K})$ површину троугла.

Претпоставимо, најпре да је $P(k) > P(\mathrm{K})$. У круг најпре упишемо квадрат $ABCD$, а потом делимо лукове $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ на пола, те тако добијемо правилни осмоугао. Аналогно настављамо поступак све док не добијемо правилни многоугао чије су странице такве да збир површина одговарајућих одсечака круга не постане мањи од разлике површина круга и троугла, тј. мањи од $P(k) - P(\mathrm{K})$. Стога је површина тог многоугла већа од површине троугла K. Но, ако је $ON$ нормала која полази из $O$ до једне од страница тог многоугла (дакле, то је висина троугла $\triangle AEO$, онда је јасно да је $ON < r$, где је $r$ полупречник круга, а и обим тог многоугла је мањи од обима круга $k$. Према томе, површина тог многоугла, који је растављен на једнакокраке троуглове, и која је заправо једнака површини правоуглог троугла који за катете има $ON$ и дуж једнаке дужине као и обим тог многоугла (просто се саберу површине ових троуглова и то буде јасно), мора бити мања од површине троугла K, што је контрадикција.

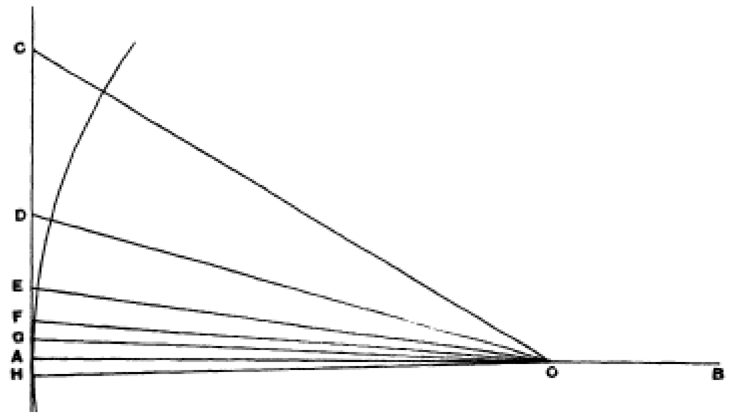
На аналогни начин се, посматрањем овај пут описаних правилних многоуглова долази до контрадикције и уз претпоставку да је $P(k) < P(\mathrm{K})$. Закључује се да мора бити $P(k) = P(\mathrm{K})$.

У ставу 3 се, de facto, доказује процена за $\pi$:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Наравно, ово је формулисано у терминима процене размере обима круга и његовог пречника. Тај количник, који ми данас означавамо са $\pi$, Архимед никако није означавао.

Поступак који је Архимед користио је једноставан.




Он полази од угла који је једнак трећини правог угла, то је на слици угао $\measuredangle AOC$. Зашто од баш тог угла? Разлог је једноставан, када се погледа слика, дуж $AC$ је заправо половина странице правилног шестоугла описаног око датог круга. Архимед потом дели овај угао на пола, (тачка $D$), поново на пола (тачка $E$), поново на пола (тачка $F$) и још једном на пола када добија тачку $G$. Тада је дуж $GH$ заправо једнака страници правилног 96оугла и Архимед користи обим тог 96оугла да апроксимира обим круга одозго. При рачунању користи процене квадратних корена који се појављују у рачуници. Прва процена коју користи је $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$ (касније користи процену $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$). Он не даје никакво објашњење како је дошао до те, а и других, доста сложенијих апроксимација. Заправо, много тога он овде не објашњава, но Еутокије (око 480 – око 540. године), математичар из Палестине, допуњавао је његове рачунице да би могле лакше да се прате (коментарисао је и друга његова дела). Постоје разне хипотезе како је дошао до тих апроксимација, једна од њих сугерише да му је било познато следеће:

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}, \text{ ако је } 2a \pm 1 > b.$$

Занимљивости ради, наведимо још неке процене које је Архимед користио у овом делу:

$$\begin{aligned} 3013\frac{3}{4} &> \sqrt{9082321} \\ 591\frac{1}{8} &< \sqrt{349450} \end{aligned}$$

$$2339\frac{1}{4} \quad < \quad \sqrt{5472132\frac{1}{16}}$$

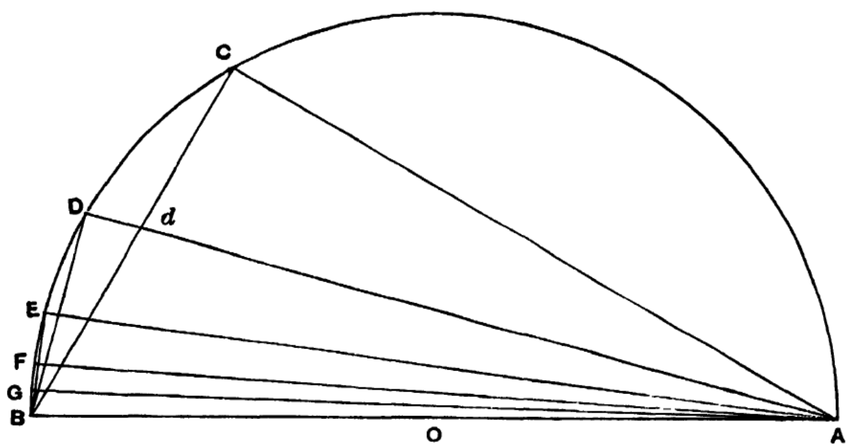
Наравно да не треба памтити ове резултате, али да се ту рачунало, рачунало се. Коначно добија процену за $\pi$:

$$\pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}.$$

Мали трик даје коначну процену:

$$\pi < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{7}.$$

За доњу процену користи наравно уписане правилне многоуглове:

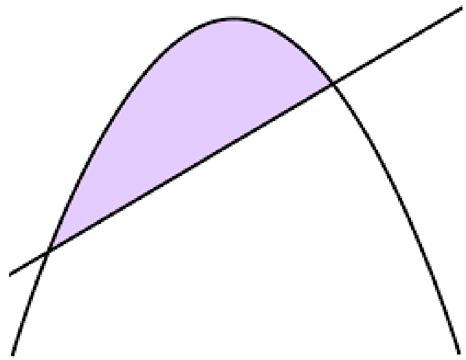



и добија:

$$\pi > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

## Квадратура параболе

Проблем је једноставан: за дати одсечак параболе (област у равни ограничена параболом и једном правом која је сече) наћи квадрат једнаке површине.

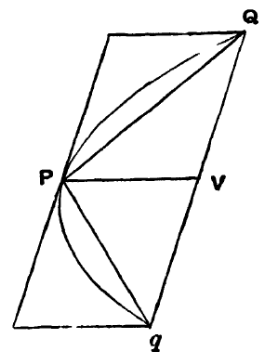


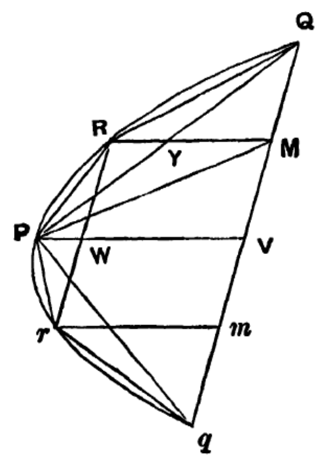
Архимед свој резултат објављује у писму Доситеју и изражава жаљење због смрти Конона, кога је веома поштовао као геометра и који би сигурно могао лепо да процени Архимедов резултат. Занимљиво је овде навести да је Доситеј скоро сигурно био јеврејин. Наиме, име Доситеј је грчка верзија имена Матеј, а не зна се да је ико у Александрији имао то име а да није био јеврејин. Ово је занимљиво зато што је то једина сачувана преписка између Грка и јевреја из тог доба. Архимед наводи да је до резултата прво дошао помоћу механике, а затим га је доказао помоћу геометрије. Он ту презентује оба приступа. Ми ћемо кратко говорити о геометријском приступу.

Основна идеја састоји се у следећем. У дати одсечак параболе уписати троугао максималне површине коме је основица дата тетива. Јасно је да се ради о троуглу чије је теме на параболи, а највише је удаљено од те тетиве. Ми знамо (бар би требало да знамо на основу разматрања из Анализе 1) да је то теме у коме је тангента на параболу паралелна тој тетиви. Наравно, и Архимед је то знао.

Следећа слика је важна.
Овде је $QV = qV$, површине троуглова $\triangle PQV$ и $\triangle qPV$ су једнаке и из паралелограма који се појављују на слици видимо да је површина троугла већа од половине површине тог одсечка (површина нацртаног паралелограма је јасно већа од површине одсечка, а површина троугла је половина површине тог паралелограма). То нам је важно за метод исцрпљивања. У следећем кораку поступак се понавља за два мања одсечка над тетивама $Pq$ и $PQ$.

Архимед је, позивајући се на Еуклидово дело о конусним пресецима (које немамо сачувано, али, као што смо већ спомињали, знамо




за његово постојање), користећи својства параболе на, релативно једноставан начин показао да су површине троуглова $\triangle PRQ$ и $\triangle Prq$ једнаке и да износе једну осмину површине троугла $\triangle QPq$. Дакле, ако са $T$ означимо површину троугла $\triangle QPq$, онда је површина многоугла $QRPrq$ једнака $T+\frac{1}{4}T$. А, као и на почетку, површина додатих троуглова премашује половину површине остатка. Тако да знамо да ће после коначно много корака преостати површина која је мала колико год желимо. Ми бисмо данас просто констатовали да све то значи да је површина одсечка једнака суми реда

$$T+\frac{1}{4}T+\frac{1}{16}T+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}T=\frac{4}{3}T,$$

но Архимед није сабирао бесконачне редове. Уместо тога, он је доказао следећи став.

Став 23. Ако је дат низ површина $A,B,C,D,\ldots,Z$, од којих је $A$ највећа и свака је једнака четворострукој следећој, онда је

$$A + B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A.$$

Ово му је било довољно да покаже да је површина одсечка једнака $\frac{4}{3}T$.

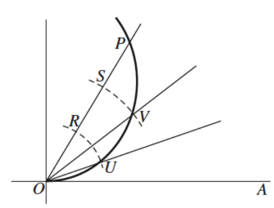
Означимо површину одсечка са Par. Уколико је $\mathrm{Par} > \frac{4}{3}T$, онда би после коначно много корака наведеног поступка добили да нам је остатак површине мањи од $\mathrm{Par} - \frac{4}{3}T$. Како је збир површине добијеног многоугла и тог остатка једнак Par, добили бисмо да је површина тог многоугла већа од $\frac{4}{3}T$. Но, то није могуће јер је површина многоугла једнака $A + B + C + D + \cdots + Z$ (овде наравно узимамо $A = T$), а на основу става 23, $A + B + C + D + \cdots + Z < \frac{4}{3}A$.

Претпоставимо да је $\mathrm{Par} < \frac{4}{3}T$. Полазећи од површине $A = T$ и понављајући поступак долазимо да површине $X$ која је мања од $\frac{4}{3}T - \mathrm{Par}$, а $A + B + C + \cdots + X + \frac{1}{3}X = \frac{4}{3}T$. Дакле, $\frac{4}{3}T$ је веће од $A + B + C + \cdots + X$ за површину која је мања од $X$, а од Par за површину која је већа од $X$. То би значило да је $\mathrm{Par} < A + B + C + \cdots + X$, а то наравно није могуће.

Дакле, на овај начин Архимед искључује две могућности и закључује да мора да важи трећа, тј. $\mathrm{Par} = \frac{4}{3}T$. Видимо да су се овакви резултати доказивали у антици без коришћења граничних процеса.

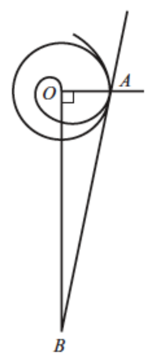
## О спиралама

У раду *О спиралама*, Архимед се бави кривом коју је увео преко кретања – полази се од полуправе и њеног темена. Тачка почиње равномерно да се креће по полуправој, од њеног темена, док се сама полуправа равномерно ротира око свог темена. Крива коју описује ова тачка је спирала, коју данас знамо под именом *Архимедова спирала* и чија је поларна једначина $r = a\theta$. Бављењем овом кривом, Архимед одступа од главног тока грчке геометрије. Можда је један од мотива био и разматрање трисекције угла, као и квадратуре круга које се могу остварити помоћу ове криве.




Да бисмо поделили дати угао на три једнака дела, довољно је поставити угао тако да се један крак поклапа са почетном позицијом полуправе, а потом наћи пресек угла и спирале. То је тачка $P$

на слици. За поделу угла $\measuredangle AOP$ на три једнака дела, довољно је поделити дуж $OP$ на три једнака дела и потом само нацртати одговарајуће лукове круга који у пресеку са спиралом дају тачке $V$ и $U$ и тако и трисекцију угла (уверите се да је ово тако). Није заправо изненађујуће да се помоћу ове спирале добија трисекција угла – и она је крива настала комбинацијом кретања по правој и ротације, као и Хипијина трисектриса. И, као и у том случају, ова крива омогућава и квадратуру круга. Архимед је показао да, ако је $AB$ тангента на




спиралу у тачки $A$, која се добија на крају прве пуне ротације и ако је $\triangle AOB$ правоугли са правим углом у тачки $O$, онда је катета $OB$ заправо једнака кружници (једнаке је дужине) са центром у $O$, полупречника $OA$. Дакле, као што знамо из његовог рада о мерењу круга, површина $\triangle AOB$ једнака површини круга полупречника $OA$. Наравно, тада лако налазимо и квадрат исте површине као и тај круг.

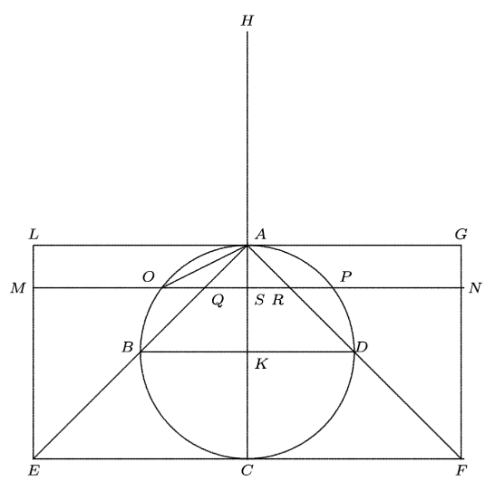
Овде се први пут појављује питање налажења тангенте на криву која није конусни пресек. Архимеду је било јасно да је такав проблем, као што уосталом и видимо, еквивалентан квадратури круга.

## Метод

Од посебног је значаја кратко Архимедово дело *Метод*. То дело је било изгубљено дуго времена, мада се знало да је постојало на основу напомена у другим изворима. Нађено је тек 1906. године. Наиме, дански научник Хајберг је сазнао да се у Константинопољу (званичан назив Истанбула је био Константинопољ све до 1923. године, када је формирана Република Турска, а главни град постала Анкара) налази један палимпсест са математичким садржајем. Радило се о пергаменту на коме је избрисан, али не у потпуности, првобитан текст, да би се записао молитвеник који је коришћен у Православној цркви. Хајберг је успео да фотографише листове и открио је да су ту дела Архимеда:

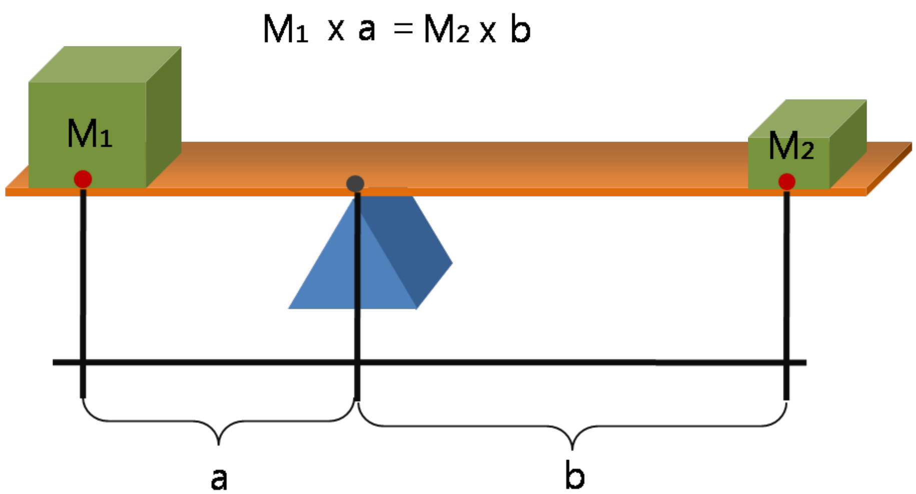
*О сфери и цилиндру*, већи део рада *О спиралама*, део рада *Мерење круга* и *О равнотежи равни*, затим *О плутајућим телима* и, најважније од свега, ту је био једини примерак *Метода.* Овај палимпсест је поново изгубљен после Првог светског рата и поново се појавио када је предат на аукцију деведесетих година. Купљен је од стране анонимног randodavca за два милиона долара и касније је модерна технологија искоришћена да се открије оригинални текст у њему.

Шта је заправо *Метод*? Реч је о математичком тексту који је Архимед послао као писмо Ератостену, који је тада био управник александријске библиотеке. Архимед ту објашњава како је он долазио до својих резултата користећи не сасвим математички коректно, 'механичко' расуђивање. Како он ту пише, лакше је наћи доказ теореме када се зна о чему се ту заправо ради. Навео је као мотивацију како је Еудокс дошао до својих резултата о купи и пирамиди користећи нека претходна размишљања Демокрита у којима није било доказа. Први резултат до кога је Архимед дошао на овај начин је резултат о квадратури параболе. Но, Архимедов омиљени резултат који повезује запремину и површину сфере (пажљив читалац је можда незадовољан разматрањем запремине сфере, сфера је површ, гледа се њена површина, док кугла има запремину, али то је детаљ који нам овде није битан, причамо и о обиму круга, а не кружнице. . . ) и цилиндра чија је висина једнака пречнику сфере, а основа великом кругу те сфере.

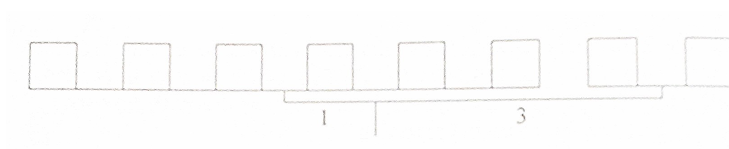



Ротирањем око осе $HC$ добијамо цилиндар, сферу и купу, дакле ова слика нам даје попречни пресек ових тела. Обратите пажњу на чињеницу да је $AGFC$ квадрат, те да је $\triangle ACF$ (а такође и $\triangle ASR$) једнакокраки правоугли троугао.

Архимед жели да нађе везу између запремина ових тела користећи закон полуге.

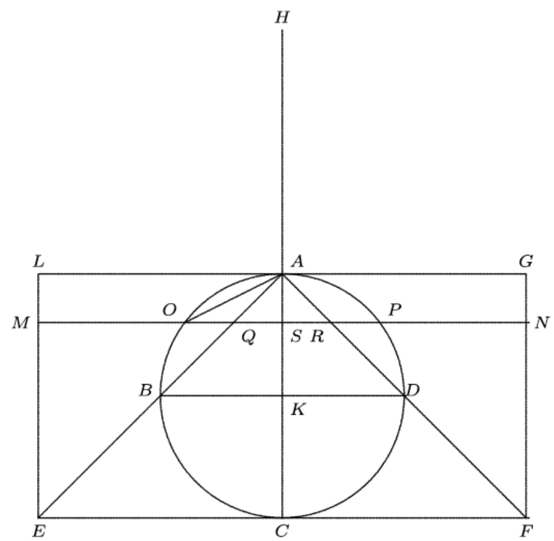



Архимед је извео овај закон пажљивим разматрањем, полазећи најпре од случаја да је $M_1 = M_2$ и да је тада очигледно да се равнотежа постиже када је ослонац на средини, тј. када је $a = b$. Затим је разматрао шта се дешава када су $M_1$ и $M_2$ различити, али ипак самерљиви. На пример, ако је $M_1 = 2r\mathrm{m}$, а $M_2 = 2s\mathrm{m}$. Тада се распореди укупно оптерећење дуж целе даске подељене на $2r + 2s$ једнаких делова и у сваком од тих делова постави се оптерећење $\mathrm{m}$. Првих $2r$ тегова представља $M_1$ и ако посматрамо само тај део, јасно је да је центар масе у средини. Слично и за преосталих $2s$ тегова. А центар масе система је наравно на средини. Доња слика представља случај када је $r = 3$ и $s = 1$.




Распоредили смо 8 малих тегова на подједнаком растојању и онда посматрали центар масе првих 6 и последња 2. Види се да је однос растојања до ослонца $1:3$, те је $a = 1$ и $b = 3$ овде. Архимед је потом разматрао случај да су $M_1$ и $M_2$ несамерљиви и претпоставио да не важи наведени однос. У том случају, ако би се тела поставила тако да растојања буду одговарајућа, једно би претегло и он би га заменио лакшим. Рецимо да је заменио $M_1$ са $M_1'$. Тада би потражио ново тело

$M_1''$ тако да је $M_1' < M_1'' < M_1$, а које је САМЕРЉИВО са $M_2$! Сада је случај свео на самерљиве и даљом анализом добија контрадикцију. У модерној терминологији, овде је Архимед користио чињеницу да се између свака два реална броја налази рационалан број и помоћу рационалних апроксимација добио резултат. Но, ово је он урадио у другим радовима, да се ми посветимо сфери, цилиндру и купи.




Поставимо произвољну раван која је нормална на осу $HC$ и нека је она сече у тачки $S$. Она сече купу, сферу и цилиндар по круговима полупречника $SR$, $SP$ и $SN$ редом. Означимо их са $k_1$, $k_2$ и $k_3$. Архимед је приметио да ако кругове $k_1$ и $k_2$ поставимо у тачку $H$, они ће бити у равнотежи са кругом $k_3$ који остављамо на својој позицији, а тачка ослонца је $A$. То значи да треба проверити да је

$$(P(k_1) + P(k_2)) \cdot AH = P(k_3) \cdot AS.$$

Ако је $x = AS$, а $AK = r$, онда је $SR = AS = x$,

$$SP^2 = KP^2 - SK^2 = r^2 - (r-x)^2 = 2rx - x^2,$$

а $SN = 2r$, док је $AH = AC = 2r$. Тада је

$$(P(k_1) + P(k_2)) \cdot AH = \pi(x^2 + 2rx - x^2) \cdot 2r = 4r^2\pi x, \text{ а } P(k_3) \cdot AS = \pi(2r)^2 \cdot x = 4r^2\pi x.$$

Архимед онда закључује да ако купу и сферу поставимо у тачку $H$, тј. ако је у тој тачки концентрисана сва њихова запремина, то ће тачно бити у равнотежи ако цео цилиндар концентришемо у његово тежиште, које је у тачки $K$. Ако са $V_1$ означимо запремину купе, са $V_2$ сфере, а са $V_3$ цилиндра, добија се $(V_1+V_2)\cdot AH = V_3\cdot AK$. С обзиром да је $AH = 2AK$, добијамо

$$V_1+V_2=\frac{1}{2}V_3.$$

Но, познато је да је $V_1=\frac{1}{3}V_3$, те мора бити $V_2=\frac{1}{6}V_3$. Запремина цилиндра је од раније позната: $V_3=(2r)^2\pi\cdot 2r=8r^3\pi$, те се тако добија запремина сфере $V_2=\frac{1}{6}8r^3\pi=\frac{4}{3}r^3\pi$.

На аналогни начин, разматрајући друга тела, Архимед је добио запремине одсечака елипсоида, хиперболоида, параболоида, а и друге сличне резултате.

Архимед је у делу *О сфери и цилиндру* строго извео доказ формуле за запремину сфере (кугле), али видимо да је први пут до ње дошао оваквим разматрањима. У истом делу је извео и формулу за површину сфере: површина сфере је четворострука површина великог круга те сфере ($4r^2\pi$). Због немогућности квадратуре круга, Грци су имали, да тако кажемо, две основне површине – квадрата и круга, помоћу којих су изражавали остале. Тако је и Архимед површину сфере изразио помоћу површине круга.

Како је имао формуле за запремину и површину сфере, а такође те формуле за цилиндар, могао је да дође до резултата који му је био посебно драг. Наиме, ако посматрамо цилиндар описан око сфере, његова висина једнака је пречнику сфере, а база великом кругу сфере. Ако са $r$ означимо полупречник сфере, тада је њена површина $4r^2\pi$, а запремина $\frac{4}{3}r^3\pi$. Но, површина цилиндра описаног око сфере је $2r^2\pi+2r\pi\cdot 2r=6r^2\pi$. Запремина цилиндра је $r^2\pi\cdot 2r=2r^3\pi$. Имамо да је

$$V(S):V(C)=\frac{4}{3}r^3\pi:2r^3\pi=2:3,\qquad P(S):P(C)=4r^2\pi:6r^2\pi=2:3.$$

Према легенди, Архимед је изразио жељу да му ови односи стоје на надгробној плочи.

На крају наводимо конкретну илустрацију чињенице колико је Архимед цењен као математичар.

Као што је добро познато, не постоји Нобелова награда за математику, но постоји престижна Филдсова медаља која се додељује сваке четири године математичарима млађим од 40 година за изузетан допринос у математици на Свецком математичком конгресу. На предњој страни саме медаље је Архимед и цитат на латинском једног песника из I века: „Надмашити разумевање и овладати светом”. На задњој страни је натпис на латинском: „Математичари сакупљени из целог света додељују за изузетне списе”. У позадини је приказ Архимедове гробнице са резбаријом која илуструје његову теорему о сфери и цилиндру иза маслинове гранчице.

Завршавамо преглед грчке математике кратком дискусијом о Диофанту и његовом делу.

## Диофант

О Диофантовом животу практично ништа није познато. Претпоставља се да је живео и радио у Александрији око 250. године н. е. Сачуван је задатак, који нам открива колико дуго је живео:

Детињство Диофанта је потрајало шестину његовог живота, после још дванаестине му је порасла брада, оженио се после још једне седмине. Пет година после тога му се родио син, који је проживео половину животног века оца, а отац је, скрхан, умро после четири године.

Дакле, једначина која се ту појављује је:

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x.$$

Лако налазимо да је $x=84$, тј. Диофант је проживео 84 године.

Од његових дела остао је део његове *Аритметике* и фрагмент дела *О многоугаоним бројевима*. Ми ћемо се овде позабавити *Аритметиком*. Од тринаест књига сматрало се да је сачувано само првих шест, но седамдесетих година XX века откривено је да су сачуване још четири књиге у арапском преводу и анализом је установљено да су то књиге од четврте до седме.

*Аритметика* се бави решавањем одређених и неодређених једначина са ЦЕЛОБРОЈНИМ коефицијентима у којима се траже ПОЗИТИВНА РАЦИОНАЛНА РЕШЕЊА. Оно што је важно да одмах напоменемо је да једначине нису ни формулисане ни решаване у геометријском руху, као што је била дуга традиција код Грка после открића несамерљивости, но се њима баратало алгебарски. Но, видећемо да се ту могу открити нека дубока геометријска значења (о којима Диофант експлицитно ништа није писао).

Развој алгебре се, у врло грубим цртама, дели на три периода. Најпре имамо период *реторичке* алгебре. Ту се и проблеми и решења формулишу речима, без икакве симболике. Други период је период *синкопатске* (или *скраћеничке*, ако нам се допусти такав термин) алгебре у којој се користе одређене скраћенице. Диофантово дело припада том периоду. Ту још није права *симболичка* алгебра која представља трећи период, који настаје знатно касније са Вијетом.

Диофант, пре свега, има ознаку за непознату (али само за једну!) и за њене степене до шестог, а користи и негативне степене исто до шестог. Постоји и ознака за јединице, за одузимање и за једнакост. Непознату ћемо означавати са $s$, пошто је и Диофант користио исту ознаку. Ево листе главних ознака.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\mathring{M}$ | $M\acute{o}\nu\alpha\varsigma$ | јединица |
| $s$ | $\varsigma$ | $`A\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ | број |
| $s^2$ | $\Delta^Y$ | $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ | квадрат (степен) |
| $s^3$ | $K^Y$ | $K\acute{\upsilon}\beta o\varsigma$ | куб |
| $s^4$ | $\Delta^Y\Delta$ | $\Delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu o\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\mu\iota\varsigma$ | квадрат $\times$ квадрат |
| $s^5$ | $\Delta K^Y$ | $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$ | квадрат $\times$ куб |
| $s^6$ | $K^Y K$ | $K\acute{\upsilon}\beta\acute{o}\kappa\upsilon\beta o\varsigma$ | куб $\times$ куб |

Као што видимо, за ознаку непознате, Диофант је користио последње слово речи 'аритмос', што значи број (иначе $\varsigma$ је сигма, али се овако пише на крају речи, тзв. 'завршна сигма'). Као што смо раније навели, разломак $\frac{1}{n}$ би се писао као $n'$, па је и Диофант користио ту ознаку: $\frac{1}{s} = \varsigma'$, али се може наћи и ознака $\varsigma^\chi$, у зависности од издања *Аритметике*. Ознака за једнакост је била $\iota$ (што је почетак речи '$\iota\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\alpha$' која значи 'једнако'), док је за одузимање коришћен симбол ⋔. За сабирање није постојао посебан симбол, просто су се низали симболи. Део тога је био да је на свакој страни једнакости био израз облика $A-B$, где су у $A$ и $B$ били нанизани симболи, дакле то су биле суме позитивних израза. На пример, једнакост

$$3s^2 + 12 = 4s,$$

би била записана овако:

$$\Delta^Y\gamma\mathring{M}\iota\beta\iota\varsigma\delta.$$

Подсетите се како су писани бројеви (словима, као што је наведено раније). Да ли је Диофант 'признавао' негативне бројеве? Већи део аутора сматра да није. Наиме, он јесте описивао како се врше операције, али то је више био опис како баратати изразима облика $A-B$, како их сабирати, која су правила за множење. Дакле, знао је да је $(A-B)(C-F) = (AC+BF)-(AF+BC)$, али није експлицитно радио са негативним бројевима. Чини се да је то необично, али математика се не развија онако како је представљена у уџбеницима.

Диофант је објашњавао и сређивање израза на супротним странама једнакости, како су се на обе стране додавали једнаки изрази да би нестали негативни делови и како су се после скраћивали 'вишкови'. То тачно одговара правилима *ал-џабр* и *ал-мукабала* које је касније користио ел Хорезми. На пример, ако имамо једначину

$$3s^3 + 4s - 15 = 15s + 3 - 5s^2,$$

онда најпре додајемо $5s^2+15$ на обе стране и добијамо

$$3s^3+5s^2+4s=15s+18,$$

(ал-џабр), а потом скраћујемо (ал-мукабала):

$$3s^3+5s^2=11s+18.$$

Занимљиво је рећи да се симбол за непознату који је Диофант користио, може наћи и у грчком папирусу, који је познат као Мичиген 620, а који највероватније потиче из II века н. е. Заправо, методе које Диофант примењује за решавање одређених једначина (које имају јединствено позитивно рационално решење) нису суштински нове, познате су из месопотамске математике. Но, Диофант даје образложења онога што ради.

Формулација проблема и поступак решавања код Диофанта типично изгледају овако. Он формулише проблем, који укључује више бројева који се траже (дакле, проблем у старту има више непознатих). Потом, уколико је неопходно, наводи потребне услове који морају да важе да би постојала позитивна рационална решења. За само решавање проблема, Диофант бира конкретне бројеве, а потом тражи решења у облику у коме се сва могу изразити преко једне непознате и то у облику да су неки услови обавезно задовољени, док се други користе да се нађе решење.

Почнимо од једноставнијих (из прве књиге).

27. Наћи два броја за које су њихова сума и њихов производ задати бројеви.

Потребан услов: квадрат половине суме мора бити већи од производа за број који је квадрат.

Дакле, проблем је да се реши систем једначина

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ xy &= b, \end{aligned}$$

где су $a$ и $b$ задати бројеви при чему се тражи да је $\left(\frac{a}{2}\right)^2-b=c^2$, где је $c$ неки (рационалан) број.

Видимо да се проблем своди на решавање квадратне једначине $z^2-az+b=0$. Дискриманта је $a^2-4b=4c^2=(2c)^2$ и видимо да се добијају рационална решења.

28. Наћи два броја за које су њихова сума и збир њихових квадрата задати бројеви.

Потребан услов: Двострука сума њихових квадрата мора премашити квадрат њихове суме за квадрат.

Било би добро да се читаоци увере да потребан услов обезбеђује постојање рационалног решења.

Чести су задаци код Диофанта где је дата сума или разлика два тражена броја. Он поступа као у Месопотамији: ако је задато да је $x+y=a$, он поставља $x=\frac{1}{2}a-s, y=\frac{1}{2}a+s$ и даље то убацује у преостали услов. У случају да је дато $x-y=a$, онда је $x=s+\frac{1}{2}a, y=s-\frac{1}{2}a$ и то се поставља у преостали услов.

На пример, у проблему 28, Диофант конкретно тражи да се реши систем

$$\begin{aligned} x+y &= 20 \\ x^2+y^2 &= 208. \end{aligned}$$

Ево како он то решава.

Нека је разлика тих бројева $2s$. Дакле, већи број је $10+s$, а мањи $10-s$. Остаје да се учини сума њихових квадрата једнаком 208. Но, сума њихових квадрата је $2s^2+200$. Како то мора бити једнако 208, добијамо да $s$ мора бити једнако 2. То значи да је већи број 12, а мањих број 8.

Позабавимо се сада сложенијим типом проблема и методом његовог решавања.

20. (из друге књиге) Наћи два броја тако да квадрат сваког од њих када се дода другом даје квадрат.

Ево решења:

Нека је први број $s$, други $2s+1$. Тада квадрат првог сабран са другим даје квадрат. Квадрат другог сабран са првим даје $4s^2+5s+1$. Ово мора бити једнако квадрату. Формирам квадрат од $2s-2$, који је $4s^2+4-8s$ и $s$ је 3/13. Први број је 3/13, други 19/13.

Овде на делу видимо оно о чему смо причали. Диофант има две непознате и обе изражава преко једне тако да је један од услова задовољен за све вредности непознате. Потом задовољава други услов на одређени начин. Проблем који му се појављује је следећи: наћи рационалне бројеве $s$ и $t$ тако да је

$$as^2+bs+c=t^2, \tag{2}$$

где су $a$, $b$ и $c$ задати, наравно рационални, бројеви. Једначином (2) задата је једна крива другог реда. Проблем који Диофант разматра састоји се заправо у налажењу РАЦИОНАЛНИХ ТАЧАКА на овој кривој.

Наводимо четири метода које Диофант користи при разматрању једначине (2).

ПРВИ МЕТОД. Ако је $a$ квадрат (рационалног броја), $a=e^2$, Диофант поставља $t=es+m$, где се $m$ бира да даје позитивно решење. Видимо да се једначина (2) своди на ($e^2=a$):

$$\cancel{as^2}+bs+c=\cancel{e^2s^2}+2esm+m^2,$$

тј. добија се линеарна једначина по $s$. Ово је случај који се појављује у горенаведеном проблему.

Други метод. Ако је $c$ квадрат, $c = f^2$, онда Диофант поставља $t = ms + f$ и добија једначину

$$as^2 + bs + \cancel{c} = m^2 s^2 + 2msf + \cancel{f^2},$$

што после сређивања даје рационално решење за $s$.

Трећи метод. Он се примењује у случају да немамо линеарни члан у (2), тј. да је у питању једначина облика $as^2+c = t^2$ и да је $a+c$ квадрат. Диофант овај метод објашњава у леми која претходи проблему 12 у десетој књизи.

За дата два броја чија је сума квадрат, бесконачан број квадрата се може наћи тако да када се квадрат помножи једним од тих бројева и производ дода другом, резултат је квадрат.

Другим речима, Диофант тврди да ако су $a$ и $c$ такви да је $a + c$ квадрат (рационалног броја, да се подсетимо), онда постоји бесконачно много (рационалних бројева) $x$ таквих да је $ax^2+c$ квадрат (рационалног броја). Заправо, он ради следеће: поставља $x = s+1$ и добија једначину

$$as^2 + 2as + (a + c) = y^2,$$

која се сада може решити другом методом, јер је слободни коефицијент $a+c$ квадрат. Он овај метод оправдава доказом за конкретан случај $a = 3$, $c = 6$, али није тешко видети да идеја 'пролази' и у општем случају.

Четврти метод. Овај метод Диофант објашњава у леми која је везана за проблем 15 у десетој књизи. Он разматра једначину

$$ax^2 - c = y^2 \tag{3}$$

и тврди да, ако имамо једно решење ове једначине, на пример, $x = d$, $y = e$, онда се увек може наћи још неко решење. Он то показује тако што постави

$$x = d + s, \quad y = e + ms. \tag{4}$$

Заменом у (3) добија се

$$ad^2 + 2ads + as^2 - c = e^2 + 2ems + m^2 s^2,$$

и кад се искористи да је $ad^2 - c = e^2$ добија се

$$2ads + s^2 = 2ems + m^2 s^2,$$

што после скраћивања са $s$ даје

$$2ad + s = 2em + m^2 s,$$

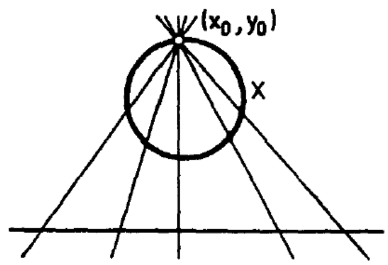
одакле се лако добија $s$.

Једначина (3) је једначина хиперболе. Једначине (4) заправо задају параметарску једначину праве која пролази кроз једну тачку $(d, e)$ ове хиперболе и потом је сече у још једној тачки.

Пажљив читалац, који је, уз то, био врло вредан када је спремао Анализу 1, приметио је везу претходно наведених метода и Ојлерових смена које се примењују за рачунање интеграла облика

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

где је $R(x, y)$ рационална функција (погледајте неку од збирки или уџбеника за Анализу 1). Ово није необично, заправо суштина је у дискусији о четвртом методу. Наиме, права и недегенерисана крива другог реда су бирационално еквивалентне – могуће је наћи 'скоро' бијекцију између њих, бијекцију која се остварује рационалним функцијама када се избаци коначно много тачака. На пример, баш постављањем праве кроз задату тачку на криву и налажењем, за различите коефицијенте правца, друге пресечне тачке праве и криве.




На цртежу можемо видети како пројектујемо криву другог реда на праву (са криве смо избацили једну тачку). Ова еквиваленција између праве и криве другог реда је 'одговорна' и за чињеницу да је смена променљиве $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$ корисна код рачунања интеграла облика

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

где је $R(x, y)$ рационална функција, но то је друга прича.

У петој књизи, Диофант разматра једначине вишег степена. И ту се могу наћи сличне и занимљиве идеје. Но, како за криве трећег реда не важи претходно наведено својство, заправо је структура рационалних тачака само у неким ситуацијама правилна, не могу се резултати добијати на исти начин. Ипак, неки аутори у Диофантовим методама препознају имплицитно налажење тангенти на такве криве, а и налажење треће пресечне тачке кроз две дате. Но, ми се нећемо овде тиме дубље бавити.

Десета књига је у потпуности посвећена Питагориним тројкама рационалних бројева, тј. рационалним решењима једначине $x^2 + y^2 = z^2$. Заправо се ту говори о правоуглим троугловима са рационалним странама, а задаци укључују везе између површина, дужина катета и слично. Ова књига је занимљива, јер је у својој копији издања из 1621. године Пјер де Ферма исписивао коментаре о резултатима Диофанта и ту налазимо његову напомену (после задатка о разлагању на два начина датог квадрата у облику суме два квадрата):

Напротив, немогуће је разложити куб на два куба, биквадрат на два биквадрата и, уопште, ма који степен већи од два на збир два таква степена. Нашао сам чудесан доказ овога, али су маргине сувише уске за њега.

Ретко ко заправо верује да је Ферма уистину имао овакав доказ. Ово тврђење је познато као Велика Фермаова теорема (или Фермаова последња теорема) и доказ је тек деведесетих година прошлог века дао енглески математичар Ендрју Вајлс.

Диофант има још неке занимљиве методе за решавање једначина, но ми немамо времена да се и њима бавимо у овом прегледу. У случају одређених једначина (дакле оних које имају највише коначно много рационалних решења) Диофант се углавном ослања на старију традицију. Но, у случају неодређених једначина, тј. оних које имају бесконачно много рационалних решења, његов допринос је изузетан. Његово дело је извршило значајан утицај на математичаре каснијих епоха и довело до појављивања изузетних проблема, као и нових математичких области (попут диофантовске анализе).