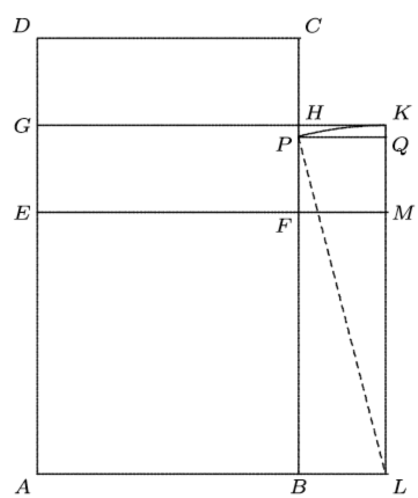
Индијска математика

Археолошка испитивања су показала постојање веома развијене културе у долини Инда око 2650. године п. н. е, дакле у време египатских градитеља пирамида. Но, немамо математичких докумената из тог периода. Значајна кретања народа, велики број различитих језика, од којих су многи још неразјашњени, отежавају покушај процене математичког нивоа из тих ранијих периода.

Сутре

Веде, религиозни документи, писани на санскриту, садрже позивање на велике бројеве и децимални систем. Ту се могу наћи и димензије, облици, пропорције везане за градњу олтара. То је садржано у „шулба (или шулва) сутрама" – „правилима за конопце". Овде се „шулба" односи на конопце за мерење, док „сутра" означава књигу правила. Постоји више преосталих ових 'сутри', писане су у стиху и вероватно потичу из прве половине првог миленијума п. н. е. мада то не знамо са сигурношћу. Ту се могу наћи Питагорине тројке $3, 4, 5$; $5, 12, 13$; $8, 15, 17$; $12, 35, 37$. Није искључен месопотамски утицај на ове сутре, али није ни потврђен.

Погледајмо метод квадратуре правоугаоника из једне сутре, а који веома подсећа на грчку 'геометријску алгебру'.



Задат је правоугаоник $ABCD$. На дужим страницама AD и BC поставимо тачке E и F тако да добијемо квадрат $ABFE$. Нека су G и H средишта дужи ED и FC. Продужимо GH до GK, тако да је $ALKG$ квадрат. Продужимо и EF до пресека са KL. Јасно је да су правоугаоници $GHCD$ и $FBLM$ подударни, те је површина правоугаоника $ABCD$ једнака површини квадрата $ALKG$ из кога је избачен мањи квадрат $FMKH$. Но, круг са центром у L, полупречника LK, сече BH у тачки P. Тада је $LQ^2 = LP^2 - PQ^2 = LK^2 - KH^2$, те тражени квадрат има страницу LQ.

У другој сутри налазимо опис конструкције квадрата који је тражени умножак датог квадрата. На пример, ако се тражи квадрат који је седмоструки дати квадрат, чија је страница a, онда се каже да се конструише једнакокраки троугао са основицом $6a$ и крацима $4a$. Висина тог једнакокраког троугла је $\sqrt{(4a)^2 - (3a)^2} = a\sqrt{7}$. Дакле, површина квадрата чија је страница једнака висини тог једнакокраког троугла је $7a^2$.

У три сутре налази се апроксимација за $\sqrt{2}$:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Ово нам, на 8 децимала, даје број $1{,}41421569$, док је $\sqrt{2}$ на истом броју децимала $1{,}41421356$. Апроксимација заиста јесте добра, али нам није познато како је добијена. Иначе, за разлику од Грка, Индијци нису имали никакав проблем да и ирационалне корене сматрају бројевима. То је свакако и у вези са тим да се у индијским математичким текстовима често не разликује тачан од приближног резултата, као што ћемо видети у даљем.

Сиданте

Сиданте су скоријег датума од шулба сутри. Процена је да су оне настале крајем IV, односно почетком V века. Сиданта означава систем или доктрину и овде се односи на астрономске системе. Велико је питање у којој су мери ова дела била независна од грчких извора, пошто се примећује велика сличност са делима аутора из Египта у то, или раније време. Али постоји нешто што их издваја. Док се код Грка разматрала тетива круга и централни угао који јој одговара, у сидантама се разматра половина тетиве и половина централног угла. То јесте мала разлика, али ту видимо наше тригонометријске функције. Занимљиво је како је настао назив са функцију синус. Наиме, тетива се на санскриту звала 'ђива' или 'џиба'. У преводу Арапа, који није користио самогласнике, појављује се само 'џб'. Што може да одговара и речи 'џаиб' која значи и 'залив' на арапском. Познати преводилац из XII века Ђерардо из Кремоне је стога то превео на латински као sinus, што значи 'залив' на латинском. И тако је дошло до назива те нама добро познате функције.

Аријабата

Аријабата (476–550) је значајан индијски математичар и астроном чије је најпознатије дело *Аријабатија* написано у стиху и завршено 499. године. То дело представља преглед дотадашњих знања, но оно је неуједначено по квалитету. Ту има и тривијалних резултата, као и погрешних, али и резултата велике вредности. Почиње навођењем назива степена броја 10 све до десетог степена и правилима за рачунање квадратних и кубних корена. Потом следе правила за мерење и ту имамо и тачне резултате и погрешне. На пример, наводи се да је површина троугла половина производа дужине једне странице и њој одговарајуће висине, али се тврди да је запремина пирамиде половина производа површине базе и висине. Такође, исправно се наводи да је површина круга једнака производу обима круга и половине полупречника, али и да је запремина сфере (кугле) једнака производу површине великог круга и квадратног корена те површине. Дата је и исправна формула за површину трапеза, али и потпуно произвољно тврђење о површини ма које равне фигуре. Но, резултат на који су индијски аутори посебно поносни је следећи:

Сабери 4 и 100, помножи са 8 и додај 62000. Тако добијаш приближно обим круга пречника 20000.

То нам даје апроксимацију за π:

$$\pi \approx \frac{(4+100)\cdot 8+62000}{20000} = 3,1416.$$

Но, то је заправо вредност за π коју је користио и Птолемеј у Египту. Постоје велике шансе да је Аријабата био под утицајем грчких претходника. Иначе, у Индији се за π често користила и апроксимација $\pi \approx \sqrt{10}$.

У *Аријабатији* налазимо и нека правила за аритметичке низове. На пример, описано је како се налази број чланова аритметичког низа ако је позната његова сума s_n, први члан a_1 и разлика d. Формула коју добијамо из тог описа је следећа:

$$n = \frac{\frac{\sqrt{s_n\cdot 8d+(2a_1-d)^2}-2a_1}{d}+1}{2}.$$

У делу нема ни мотивације ни провере овог резултата. Наравно, ми можемо данас да ово изведемо:

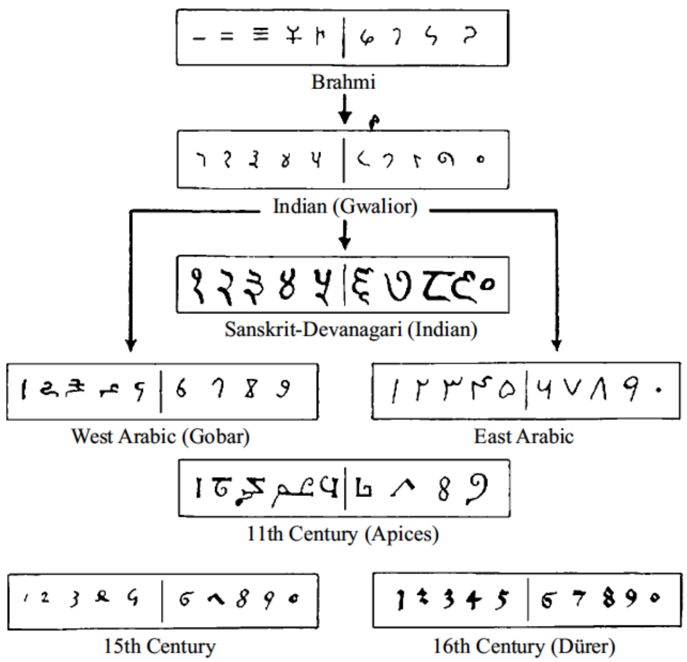
$$\begin{aligned} s_n &= a_1+(a_1+d)+\cdots+(a_1+(n-1)d) \\ &= na_1+d(1+2+\cdots+(n-1)) \\ &= na_1+d\frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Добијамо квадратну једначину по непознатој n:

$$dn^2 + (2a_1 - d)n - 2s_n = 0.$$

Из ове једначине се добија горња формула (додуше мало у другом облику, проверите то).

У *Аријабатији* имамо и децимални систем. Описује се и рачунање у коме се каже и да „од места до места увек је десет пута веће од претходног”. Да су се цифре за основу 10 појавиле и пре, видимо и из једне таблице из 595. године, када је један датум записан у декадном облику. Дуг је био пут од првих цифара до наших. Таблица на следећој страници нам даје кратак приказ.



Слика 1: Развој цифара

Видимо еволуцију цифара и јасно препознајемо наше цифре у Гобар записима, карактеристичним за западни приказ код Арапа. Но, симбол за нулу није брзо настао. Постојале су свуда разне варијанте решења тог проблема, но по свему судећи прво појављивање нуле у Индији је на једном запису из 876. године. Делује невероватно да је требало више од 250 година, али многе ствари се не развијају у потпуности логично нити равномерно. Занимљиво је навести да се Деванагари запис за цифре и сада користи у Индији.

И у сидантама и у Аријабатији имамо прве таблице синуса. Ево како је то урађено. Ми знамо да је $\sin x \approx x$ када је x мало. Но, овде радимо са радијанима. Ако желимо да радимо са степенима, морамо мало да модификујемо ствари. Заправо, због прецизности је боље радити са минутима. Дакле, идеја је била да имамо исту меру и за синус и за угао. Ако гледамо у минутима, онда је пун круг: $360 \cdot 60' = 21600'$. Сада треба наћи полупречник r тако да је $2\pi r = 21600$. Уколико за π узмемо да је $\pi \approx 3{,}141592$, добијамо да је $r \approx 3437{,}75$. Стога су Индијци узели да је полупречник круга 3438. То значи да је њихова апроксимација за π овде била приближно $3{,}14136$.

Када је изабран полупречник круга, онда је прављена таблица вредности $\sin x$, тако што је 90° подељен на 24 једнака дела. Најмањи угао је дакле био $3\frac{3}{4}^\circ$, што износи $225'$, те је узето да је $\sin\left(3\frac{3}{4}^\circ\right) = 225$. Добро, сад већ видимо да у таблици немамо баш синус угла, али се синус угла лако добија дељењем са полупречником. По тој рачуници је $\sin\left(3\frac{3}{4}^\circ\right) = 225/3438 \approx 0{,}06545$. А ако проверите, рецимо дигитроном, добијете да је $\sin 3\frac{3}{4}^\circ \approx 0{,}06540$. Дакле, није лоше за почетак. Ако сада са s_n означимо тај n-ти синус и ако је S_n сума првих n таквих синуса, онда је за рачунање коришћена формула:

$$s_{n+1} = s_n + s_1 - \frac{S_n}{s_1}.$$

Како је добијена та формула, не зна се. Али, да проверимо:

$$s_2 = s_1 + s_1 - \frac{s_1}{s_1} = 449,$$

$$s_3 = s_2 + s_1 - \frac{s_1 + s_2}{s_1} = 449 + 225 - \frac{225 + 449}{225} \approx 671,$$

$$s_4 = s_3 + s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3}{s_1} = 671 + 225 - \frac{225 + 449 + 671}{225} \approx 890,$$

$$s_5 = s_4 + s_1 - \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{s_1} = 890 + 225 - \frac{225 + 449 + 671 + 890}{225} \approx 1105.$$

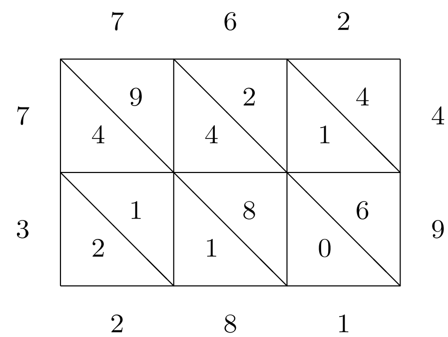
Како s_5 одговара синусу угла од $18\frac{3}{4}^\circ$, по овој таблици бисмо добили да је

$$\sin\left(18\frac{3}{4}^\circ\right) = \frac{1105}{3438} \approx 0{,}32141$$

док нам дигитрон даје приближну вредност $0{,}32144$.

Занимљив начин множења бројева

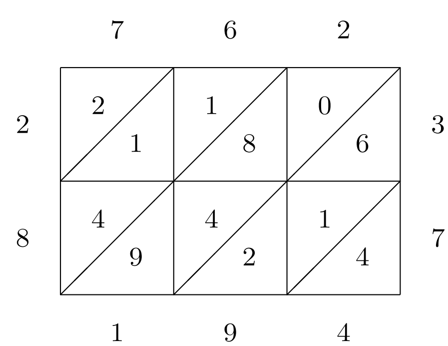
Приказаћемо овде један занимљив начин множења бројева, који се, највероватније најпре појавио у Индији и одатле је пренет у Кину, у Арабију, а потом преко Арабије и у Европу.



Ова таблица показује да је $37 \cdot 762 = 28194$. Како? Видимо да смо формирали производе цифара који се појављују у запису, тако што смо их распоредили у одговарајуће квадрате подељене на два троугла. Број 37 смо исписали одоздо нагоре, а 762 слева удесно. Заправо, таблице се могу и другачије исписивати.

Како су измножене све цифре, онда добијене резултате сабирамо по дијагоналама и исписујемо у наставку. Почињемо од $7 \cdot 2$ (дакле од цифара јединица) и исписујемо цифру 4, пошто се само она налази на тој дијагонали. На следећој дијагонали имамо збир $2+1+6=9$ и 9 смо исписали у наставку. Потом имамо дијагоналу на којој је збир $9+4+8+0=21$ и у наставку исписујемо цифру 1, а 2 пребацујемо за сабирање са бројевима у следећој дијагонали. Дакле, имамо потом $2+4+1+1=8$, исписујемо 8 у наставку. Коначно, последња дијагонала има само 2, без преноса са претходне и ту пишемо 2.

Битно је било да се крене од производа цифара јединица и да се даље иде по дијагонали. Ако бисмо исписали број 37 са десне стране, онда бисмо квадрате делили на другачији начин да бисмо добили резултат:



Брамагупта

Значајни индијски астроном и математичар Брамагупта (око 598–670) живео је око једног века после Аријабате, али се он не наставља на његове резултате. Он је пре свега астроном, али има и довољно занимљивих математичких резултата вредних спомена.

Најпре, код њега први пут наилазимо на експлицитан опис рада са негативним бројевима и нулом. Тако да имамо правила попут тога да производ позитивног и негативног броја даје негативан број, да производ негативног и негативног даје позитиван број, да производ позитивног или негативног броја и нуле даје нулу. Он се не изјашњава око тога шта се добија при дељењу са нулом, сем што наводи да је $0/0=0$. Но, не можемо му то толико замерити.

Оно што је посебно значајно је да је он први који је нашао сва целобројна решења једначине

$$ax = by + c, \tag{1}$$

где су a, b, c дати цели бројеви. Он зна да је потребан услов за постојање решења $NZD(a,b) \mid c$. Уколико је то тако, може се поделити највећим заједничким делиоцем и сматрати да су a и b узајамно прости. Он такође зна да, ако има једно решење (x_0, y_0), сва друга су дата са $x = x_0 + mb$, $y = y_0 + ma$, где је m цео број. Метод за налажење једног решења у случају да су a и b узајамно прости називао се „кутака" („дробилица"). Тај метод се појављује, али не експлицитно за решавање овог типа једначина, још код Аријабате, објаснио га је боље Баскара I (око 600–680), а и касније је усавршаван. Идеја је да применом Еуклидовог алгоритма a и b смањујемо („дробимо") док не дођемо до остатака 1(и 0), а да онда, на основу добијених количника и остатака добијемо то партикуларно решење. Ево основне идеје.

Претпоставимо да је $b > a$ (то није губљење општости наравно). Поделимо b са a: $b = q_1 a + r_1$. Но, почетна једначина је тада

$$ax = (q_1 a + r_1)y + c$$

и ако узмемо да је $x = q_1 y + z$, онда добијамо

$$aq_1 y + az = aq_1 y + r_1 y + c,$$

односно

$$r_1 y = az - c.$$

Видимо да су се коефицијенти уз непознате смањили, а слободан члан је остао исти (до на знак). Како је сада $a > r_1$ поступак се може поновити. Поступак се понавља све док не дођемо до последњег остатка који није нула, а пошто је то заправо 1 (јер су a и b узајамно прости по претпоставци), долази се до једначине која се лако решава.

Затим се то решење 'подиже' до решења почетне једначине и тај поступак је описан. Ми бисмо то све слично и данас радили, али можемо да користимо матрице и онда нам је знатно лакше.

Овде је можда занимљиво напоменути да је Брамагупта за дељење са остатком користио и неке мале 'трикове'. На пример, ако жели да подели 750 са 22, тј. да разломак $\frac{750}{22}$ изрази као мешовити број, онда (у савременим ознакама, он јесте користио разломке, али без разломачке црте, само је бројилац писао изнад имениоца):

$$\frac{750}{22} = \frac{750}{25} \cdot \frac{25}{22} = 30 \cdot \left(1 + \frac{3}{22}\right) = 30 + \frac{90}{22} = 30 + \frac{45}{11} = 34\frac{1}{11}.$$

Дакле, он би именилац заменио већим бројем који дели бројилац и тако поједноставио даљи рачун.

Постоје озбиљне анализе које показују да је Брамагупта у решавању једначине (1) био мотивисан својим астрономским разматрањима, али се ми њима овде нећемо бавити.

Брамагупта се бавио и решавањем неодређене једначине облика

$$x^2 = 1 + dy^2. \tag{2}$$

Једначине тог типа сада се (неоправдано) називају Пелове једначине, а и сам Архимед је повезан са једначином тог типа. Наиме у делу које нисмо разматрали – *Проблем стоке*, он је поставио проблем као изазов александријским математичарима, како рече „онима који се занимају таквим стварима”. У њему се тражи да се одреди број бикова и крава различитих боја (четири боје, дакле има 8 непознатих) који задовољавају разне услове. Сви услови, сем два, су једноставне линеарне везе, но та два захтевају да нека два броја буду троугаони број и потпун квадрат. И то је део који чини проблем изузетно тешким са практичне тачке гледања, јер су решења те једначине уистино веома велики бројеви. Тек у деветнаестом веку имамо нека решења. Наиме, тада је показано да се у решењу појављују бројеви са 206545 цифара! Коначно решење је нађено тек почетком осамдесетих година двадесетог века, наравно уз помоћ компјутера.

У сваком случају, Брамагуптин допринос је у томе што је дао метод како да се од два решења добије ново решење. Наиме, ако су (p, q) и (p', q') нека решења једначине (2) , онда је и

$$(pp' + dqq', pq' + qp')$$

такође једно решење. То нама сада није тешко проверити. Треба рећи да је Брамагуптина алгебра била скраћеничког типа, умањилац је означавао тачком изнад њега, већ смо видели како је писао разломке, а и непознате су означаване одговарајућим скраћеницама.

Брамагупта је имао и резултате из геометрије, мада се и код њега налазе једни поред других тачни и нетачни резултати. Од тачних резултата наведимо да је имао формулу за одређивање пречника круга описаног око датог троугла: ab/h_c, ако су a и b странице датог троугла, а h_c висина која одговара трећој. Но, ова формула је заправо синусна теорема у другом облику (размислите зашто) и она је била позната и Птолемеју. За π је користио вредност $\sqrt{10}$, а понекад чак и само 3 као „практичну вредност”. Брамагупта је дао и формулу за површину тетивног четвороугла, која одговара Хероновом обрасцу: ако је s полуобим тетивног четвороугла чије су странице a, b, c и d, онда је површина дата са:

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Видимо се добија баш Херонов образац у случају да се четвороугао деформише у троугао, тј. ако је једна од страница једнака 0. Ова формула је и сада позната као *Брамагуптина формула* (изведите ову формулу). Једина мана је у томе што Брамагупта није експлицитно навео да она важи само за тетивне четвороугле. У ранијим временима многима није било јасно да за одређивање четвороугла треба више од 4 елемента. На пример, ако посматрате неки квадрат странице a, онда можете да нађете ромб странице a, који има било коју површину између 0 и a^2.

Баскара II

Најзначајније дело математичара и астронома из XII века Баскаре II (1114–1185) било је *Сиданта Сиромани*. Састоји се од четири дела, а прва два *Лилавати* и *Виџаганита* су релевантни за математику.

Лилавати је наводно била Баскарина ћерка којој је он посветио тај део. Ту има више аритметичких проблема који се тичу линеарних и квадратних једначина, аритметичке и геометријске прогресије, Питагориних тројки и сличних тема. Неки од проблема су одређеног типа, неки неодређеног. Наводи и метод за решавање квадратне једначине, а и дискутује када постоје два позитивна решења. Каже још:

Ако се решење не може овако наћи (на пример у случају једначине трећег или четвртог степена) онда се мора наћи вештином самог решавача.

Пошто се речима наведу формуле $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ и $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, те се формуле примењују за налажење 9^3 (као $(4+5)^3$), 27^3 (као $(20+7)^3$) и 125^3 (најпре се нађе 12^3, а потом $125^3=(12\cdot10+5)^3$). Но, потом се објашњава инверзни поступак за налажење квадратног и кубног корена базиран на овим формулама и поступном формирању декадног записа тог кубног корена. Наводи баш примере за налажење кубног корена који су претходној рачуници кубови датих бројева. На пример, тражи да се одреди кубни корен из $1953125 (=125^3)$. На први поглед делује празно, али и није, метод који наводи омогућава да се поступа без обзира који је у питању број, једино се овде добија резултат релативно брзо и као цео број. Занимљиво је ово питање, али се нећемо даље бавити њиме.

Баскара даје и партикуларна решења (Пелове) једначине $x^2 = 1 + dy^2$ за $d \in \{8, 11, 32, 61, 67\}$. На пример, за $d = 67$ даје решење $x = 1776319049$, $y = 22615390$. Нимало једноставно решење за то време.

Што се геометријских резултата тиче, за π је користио вредност $\frac{22}{7}$, а коректно је навео формуле за површину круга и запремину сфере. У његовом делу налазимо и разматрање пермутација и комбинација, као и опис формула за рачунање $\binom{n}{k}$. Наводи да је количник $a/0$ једнак бесконачности, али потом наводи и да је $a/0 \cdot 0 = a$.

Кералска школа

Индијски астроном и математичар Мадава (1340–1425) рођен је у граду Сангамаграма у области Керал (једна од држава у данашњој Индији носи то име)

Слика 2: Држава Керал у Индији

и он је оснивач једне врло продуктивне школе астрономије и математике која је произвела изузетне резултате. Чланови ове школе су живели, радили и предавали у породичним заједницама које су се звали *илами*. Од самог Мадаве није остало ништа записано од математичких резултата, но његови ученици и њихови ученици су наставили традицију и на основу каснијих записа (из XVI века) знамо до којих су резултата дошли математичари ове школе.

Ево тих резултата.

Развоји тригонометријских функција у степене редове

1. $\theta = tg\theta - \frac{tg^3\theta}{3} + \frac{tg^5\theta}{5} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4;$

2. $\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2;$

3. $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2;$

4. $\sin^2\theta = \theta^2 - \frac{\theta^4}{2^2-2/2} + \frac{\theta^6}{(2^2-2/2)(3^2-3/2)} - \frac{\theta^8}{(2^2-2/2)(3^2-3/2)(4^2-4/2)} + \cdots,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4.$

Концепт периодичности ових функција развијен је тек касније.

Имамо и развоје који су експлицитно у вези са π.

1. $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n} \pm f_i(n+1)$, за $i = 1,2,3$, где је

$$f_1(n) = \frac{1}{2n}, \quad f_2(n) = \frac{n}{2(n^2+1)}, \quad f_3(n) = \frac{n^2+4}{2n(n^2+5)}.$$

2. $\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \cdots;$

3. $\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5+4\cdot 1} - \frac{4}{3^5+4\cdot 3} + \frac{4}{5^5+4\cdot 5} - \cdots;$

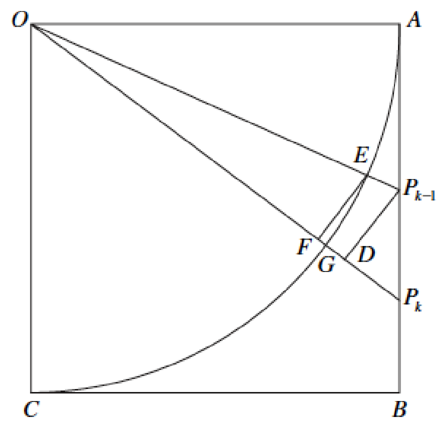
4. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{3\cdot 3}{+}\frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots;$

5. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(2\cdot 2^2-1)-2^2} + \frac{1}{(2\cdot 4^2-1)-4^2} + \frac{1}{(2\cdot 6^2-1)-6^2} + \cdots;$

6. $\frac{\pi-2}{4} \approx \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} - \cdots \mp \frac{1}{n^2-1} \pm \frac{1}{2((n+1)^2+2)}.$

Сматра се да развоји тригонометријских функција у редове потичу од Мадаве. Занимљиво је и напоменути да су процене грешака у Лајбницовом развоју за $\frac{\pi}{4}$ (први развој у другом списку), остварене помоћу функција f_i, значајне због саме рачунице. Тај алтернирајући ред врло споро конвергира, те додатне функције знатно увећавају апроксимацију. Заправо, то је знатно касније приметио и Њутн у писму Олденбургу из 1676. Он каже да се ту додавањем половине последњег члана или на сличан начин рачунање може извести са великом тачношћу. Читаоци сами могу лако проверити колико то побољшава апроксимацију.

Индијски текстови углавном наводе ове резултате без доказа, али се ипак у неким текстовима могу и наћи докази. На пример, развој функције x (наш први развој) се, de facto, добија интеграцијом функције $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Наравно да се појам интеграла не спомиње, но формира се заправо интегрална сума за ту функцију (користећи сличности троуглова и апроксимације малих лукова тетивама), та се функција развија у ред, а потом се користи резултат да је $\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} \sim \frac{1}{k+1}$, када је n велико. Ова апроксимација за суму првих k степена се често појављује у оквиру ове школе. Није ту све наравно у потпуности коректно, али се долази до правог резултата. У текстовима ове школе на Санскриту нема извођења, но текст *Јухтибаса* на малајаламском језику (који је близак тамилском, за кога је вероватно више нас чуло) садржи методе којима се добијају ове формуле. Приказаћемо како се долази до формуле за развој функције $arctg$.



Овде је $OA = 1$, четвороугао $OABC$ је квадрат и имамо лук $\widehat{AC}$, који је четвртина круга. Страница AB је подељена на n једнаких делова, $\measuredangle AOP_k = \theta$, $x = AP_k = tg\theta$, $P_{k-1}P_k = \frac{1}{n}$ (те је $x = \frac{k}{n}$). Осим тога, дужи EF и $P_{k-1}D$ су ортогоналне на дуж AP_k.

Сличност троуглова $\triangle OEF$ и $\triangle OP_{k-1}D$, даје

$$\frac{EF}{OE} = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}}, \text{ те је } EF = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}}, \text{ јер је } OE = OA = 1.$$

Троуглови $\triangle P_{k-1}P_kD$ и $\triangle OAP_k$ су такође слични:

$$\frac{P_{k-1}P_k}{OP_k} = \frac{P_{k-1}D}{OA}, \text{ те је } P_{k-1}D = \frac{P_{k-1}P_k}{OP_k}.$$

Ако OP_{k-1} апроксимирамо са OP_k, добијамо

$$EF = \frac{P_{k-1}D}{OP_{k-1}} \approx \frac{P_{k-1}P_k}{OP_k^2} = \frac{P_{k-1}P_k}{1 + AP_k^2} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Ако лук $\widehat{EG}$ апроксимирамо са EF и искористимо претходну апроксимацију, добијамо

$$\widehat{EG} \approx \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{k^2}{n^2}}.$$

Стога можемо да закључимо да се $arctg\, x = \theta$ може апроксимирати сумом

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{j^2}{n^2}}$$

за n (стога и k, јер је $k/n = tg\theta$) довољно велико. За даљу апроксимацију, $\frac{1}{1+\frac{j^2}{n^2}}$ се развија у ред. Ред се добија итеративном процедуром:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x\left(1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right) = \ldots = 1 - x + x^2 - \ldots$$

Стога се $\theta = arctg\,x$ може апроксимирати са (подсетимо се да је $x = \frac{k}{n}$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{j^2}{n^2} + \frac{j^4}{n^4} - \cdots\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} 1 - \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{k} j^2 + \frac{1}{n^5}\sum_{j=1}^{k} j^4 - \cdots \\ &= \frac{x}{k}\sum_{j=1}^{k} 1 - \frac{x^3}{k^3}\sum_{j=1}^{k} j^2 + \frac{x^5}{k^5}\sum_{j=1}^{k} j^4 - \cdots.\end{aligned}$$

Ако се искористи горенаведена апроксимација

$$\frac{1}{k^{s+1}}\sum_{j=1}^{k} j^s \approx \frac{1}{s+1},$$

добијамо ($x = tg\theta$):

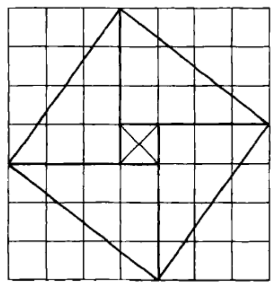
$$\theta = tg\theta - \frac{tg^3\theta}{3} + \frac{tg^5\theta}{5} - \cdots.$$

Индијска математика је интуитивна, посебна, дела су често мешавине погрешних или тривијалних резултата и изузетно вредних. Она су писана у стиховима, нису систематична попут грчких, а не постоји ни континуитет у раду. Но, то је и разумљиво с обзиром на сву сложеност Индије и мноштва нација и језика који ту постоје.

Кинеска математика

Јасно је да је у долинама Жуте реке и реке Јангце, формирана цивилизација у приближно исто време када и цивилизације у Месопотамији и Египту, али хронолошки подаци о математици тих цивилизација су знатно мање поуздани него у наведена два претходна случаја. За најстарији математички класик се сматра „Џоу Би Суан Ђинг”, односно, „Аритметички класик о гномону и кружним небеским путањама”, али се процене о његовој старости разликују и за више од 1000 година. Неки наводе да се ту ради о запису кинеске математике из периода око 1200. г. п. н. е. док други сматрају да се пре ради о документу из првог века п. н. е. Највероватније је да се ту ипак ради о документу скупљеном из више периода. У овој књизи пре свега имамо астрономска израчунавања, али и својства правоуглих троуглова укључујући наравно и Питагорину теорему. Питагорина теорема је у кинеским класицима позната као гоугу теорема. Наиме, гу на кинеском представља вертикални штап на сунчаном сату, док је гоу сенка тог штапа.

У овом делу имамо познату кинеску илустрацију Питагорине теореме за троугао са страницама 3, 4 и 5.



Слика 3: Гоугу или Питагорина теорема

Најзначајнији кинески класик је свакако „Ђиу Џанг Суан Шу", односно „Девет књига (глава) о математичкој вештини". Највероватније је уобличен у време Еуклидових „Елемената", али је уништен у великом паљењу књига 213. г. п. н. е. Заправо оно што данас имамо је коментар на то дело које је 263. године саставио значајни математичар Лиу Хуи.

Слика 4: Лиу Хуи

Он је својим коментарима, у којима имамо и доказе и додатна објашњења знатно проширио то дело. У VII веку је одлучено да то дело буде обавезна литература за образовање државних службеника. То је један од најстаријих штампаних уџбеника, пошто је штампан техником дрвених блокова 1089. године.

Девет књига нису теоријско дело попут *Елемената* него практични приручник са разним формулама за рачунање површина, запремина, али и пореза. Има и прецизних резултата, али и апроксимација. Посебно су занимљиве две теме.

Прва се тиче рачунања квадратних корена методом постепеног формирања цифара у декадном запису. Можете је наћи ако имате неки старији уџбеник или приручник из, рецимо, педесетих година прошлог века. Проблем 12 у четвртој књизи тражи да се нађе страница квадрата чија је површина 55225 (неких јединица, које нама нису битне). Дакле, тражи се $\sqrt{55255}$. Јасно је да је резултат троцифрен број (прецизније, знамо да је његов цео део троцифрен број). У ту сврху се цифре почетног броја групишу у групе од по две цифре почећи од цифара јединица: $5|52|25$. Посматрањем прве групе, која се састоји само од цифре 5 може се констатовати да је прва цифра траженог броја 2, јер је $2^2 \leqslant 5 < 3^2$. Сада квадрат те цифре, који је 4, одузимамо од 5 и „спуштамо” наредне две цифре. Посматрамо број 152. Треба нам цифра x тако да је квадрат броја $(2x)_{10} = 20 + x$ најбоља доња апроксимација за 552. Како је $(20+x)^2 = 400+40x+x^2$, а 400 смо већ одузели, питање се своди на налажење највеће цифре x за коју је $(4x)_{10} \cdot (x)_{10} \leqslant 152$. Јасно је да је то 3. Сада израчунамо $152 - 43 \cdot 3$, добијемо 23 и спустимо преостале две цифре 25, тј. посматрамо број 2325. Добили смо да су прве две цифре траженог корена 23. Стога сада тражимо највећу цифру x за коју је $(46x)_{10} \cdot (x)_{10} \leqslant 2325$. Но, видимо да је $465 \cdot 5 = 2325$, те смо заправо добили да је тражени број 235. Но, и да нисмо добили резултат, могли смо да наставимо даљим тражењем цифара, само бисмо сада додали децимални зарез, „спустили” две нуле и наставили. Дакле, поступак ради без обзира на чињеницу да је овде наведен пример у коме се добија баш цео број. Он се може мало средити, али то је у суштини то. Видимо да је суштина поступка у формули за квадрат бинома: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. За вежбу препоручујемо читаоцима да нађу $\sqrt{25281}$ (проблем 13), $\sqrt{71824}$ (проблем 14), $\sqrt{564752\frac{1}{4}}$ (проблем 15) и, када посебно буду расположени, $\sqrt{3972150625}$ (проблем 16). Наравно, радећи овако велике бројеве лако се можете убедити да метод ради без обзира на чињеницу да су то примери са правилним решењима.

Проблем 19 пак тражи да се израчуна страница коцке чија је запремина 1 860 867 (неких јединица). Дакле, тражи се $\sqrt[3]{1860867}$. Према томе, треба решити једначину

$$x^3 = 1\,860\,867.$$

Видимо да решење мора бити троцифрени број (као и горе – оно што заиста знамо је да је цео део решења троцифрен број) и видимо да је прва цифра једнака 1. Уведимо смену $x = y + 100$. Добијамо

$$y^3 + 300y^2 + 30\,000y + 1\,000\,000 = 1\,860\,867,$$

односно

$$y^3 + 300y^2 + 30\,000y = 860\,867.$$

Наравно сада је y двоцифрени број и видимо да је његова прва цифра једнака 2 (y је свакако мањи од 30, то се лако види). Сада уводимо смену $y = z + 20$. Добијамо

$$z^3 + 60z^2 + 1200z + 8000 + 300z^2 + 12\,000z + 120\,000 + 30\,000z + 600\,000 = 860867,$$

тј.

$$z^3 + 360z^2 + 43\,200z = 132\,867.$$

Број z једноцифрен и видимо да не може бити већи од 3. Но, заправо је

$$3^3 + 360 \cdot 3^2 + 43\,200 \cdot 3 = 132\,867,$$

те је тражено решење број 123.

За вежбу: $\sqrt[3]{1953\frac{1}{8}}$ (проблем 20), $\sqrt[3]{63\,401\frac{447}{512}}$ (проблем 21) и $\sqrt[3]{1\,937\,541\frac{17}{27}}$ (проблем 22).

Друга тема је заиста посебна. У *Девет књига* по први пут налазимо метод за решавање система линеарних једначина. Заправо је то суштински Гаусов метод, само са другачијим записом. Али се заиста појављује и матрица. Тај метод се илуструје у 18 проблема у осмој књизи. Један од проблема у коме се тражи да се одреде количине снопова жита три различита квалитета, своди се на решавање система линеарних једначина

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

Наравно да се систем није овако исписивао, али су се штапићи за рачунање постављали на табли за рачунање на следећи начин:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Дакле, ништа друго до матрица система мало другачије написана. Рачунањем уз помоћ штапића ова се матрица свела на матрицу

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

а одговарајући систем

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 39 \\ 5y+z &= 24 \\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

се наравно лако решава.

У току рачунања су се могли појављивати и негативни коефицијенти (мада су признавана само позитивна решења, јер су и проблеми тако постављани) и они су се означавали помоћу црних штапића, а позитивни помоћу црвених. Ово је прави тренутак да напишемо и како су се бројеви записивали помоћу система који је одговарао рачунању са штапићима.

Цифре су биле 𝍠, 𝍡, 𝍢, 𝍣, 𝍤, 𝍥, 𝍦, 𝍧, 𝍨, на позицијама јединица, стотина, десет хиљада, док су на позицијама десетица, хиљада коришћене ознаке 𝍩, 𝍪, 𝍫, 𝍬, 𝍭, 𝍮, 𝍯, 𝍰, 𝍱.

Дуго времена није постојала цифра за нулу, то је место остављано да буде празно. На пример, број 2021 би се овако записао:

𝍪   𝍪 𝍠

Знатно касније је уведен кружић за нулу, те је тада 2021:

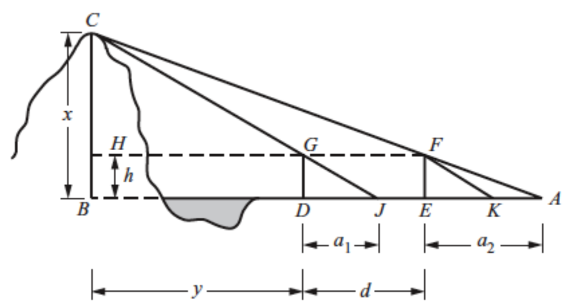
𝍪 〇 𝍪 𝍠

Као што је речено, у почетку су коришћене боје да означе позитивне и негативне коефицијенте, али се у XIII веку прешло на прецртавање цифре јединица да би се означио негативан коефицијент. На пример, број −437 би се записивао овако:

𝍣 𝍫 𝍦̸.

Осим писања коментара на *Девет књига* Лиу Хуи је написао и краће дело, које је вероватно требало да послужи као додатак на девету књигу, која је била посвећена правоуглим троугловима, но ипак је издвојено као посебно дело. Садржи само девет практичних проблема и зове се „Математички приручник за острво на мору”. Бави се одређивањем растојања међу недоступним тачкама коришћењем неколико посматрања. Проблем по коме је и дело добило име је следећи.

Имамо острво на мору које треба да измеримо. Два стуба висине по 30 стопа сваки, подигнута су на истом нивоу, а њихово растојање је 1000 корака (1 корак = 6 стопа) тако да су оба стуба у истој линији са острвом. Ако човек оде 123 корака од ближег стуба, највиша тачка на острву ће му таман постати видљива, а ако се помери 127 корака уназад од даљег стуба, поново ће му та највиша тачка бити таман видљива. Одредити висину највише тачке и растојање до ближег стуба.



Ево како је проблем решен у модерној нотацији. Приметимо да је овде $a_1 = 123$, $a_2 = 127$, $h = 5$ и $d = 1000$. Нека је $EK = DJ$, тако да је FK паралелно са GJ. С обзиром да су троуглови $\triangle CHG$ и $\triangle FEK$ слични, као и троуглови $\triangle CGF$ и $\triangle FKA$, добијамо једнакости

$$\frac{CH}{FE} = \frac{HG}{EK} = \frac{CG}{FK} = \frac{GF}{AK}.$$

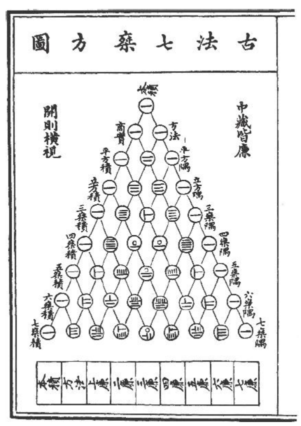
Добијамо

$$\frac{x-5}{5} = \frac{y}{123} = \frac{1000}{127-123},$$

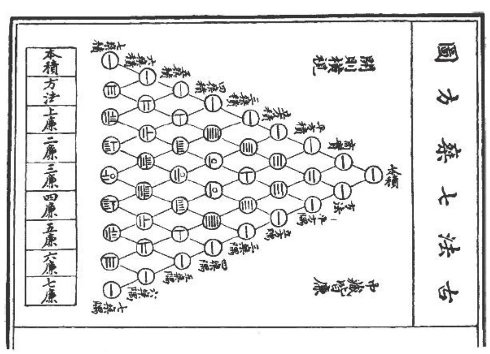
одакле следи да је $x = 1255$ (корака), а $y = 30\,750$ (корака).

Наравно да не можемо исцрпно да анализирамо сва дела кинеске математике, но морамо споменути и дело „Драгоцено огледало од четири елемента” математичара Џу Шиђеа са краја XIII и почетка XIV века (четири елемента су небо, земља, човек и материја). Ово дело је објављено 1303. године. Погледајте насловну страну.

Слика 5: Цу Шиђе



Заправо је можда боље видети је ротирану.



Није тешко уверити се да овде имамо познати нам Паскалов троугао (записан коришћењем добро нам познатих цифара уз кружић који означава нулу), значајно пре Паскала. Овде имамо биномне коефицијенте до осмог степена.

У овом делу имамо такође даље развијен метод за нумеричко решавање алгебарских једначина. Док у *Девет књига* имамо само једначине типа $x^2 = c$ и $x^3 = c$, овде имамо значајно сложеније случајеве, а метод је заправо разрада већ наведеног, а налази се и у ранијим делима других кинеских математичара. Енглески математичар Хорнер је 1819. године објавио дело „Нови метод за нумеричко решавање једначина свих редова помоћу непрекидне трансформације”. Тај ’нови’ метод је заправо већ одавно био познат кинеским математичарима, но на Западу је добио назив *Хорнеров метод*. Добро је позната изрека да је ново све што је добро заборављено. У вези са тим је занимљиво споменути да су се нека дела кинеских математичара изгубила у Кини, али су постала позната у Кореји и Јапану и извршила значајан утицај на развој математике у овим земљама.

Један од кинеских математичара који је описао овај нумерички метод био је и Ћин Ђушао (1202-1261)

Слика 6: Ћин Ђушао

у свом значајном делу „Математичка расправа у девет одељака” из 1247. године (XIII век је било златно доба кинеске математике). Сваки одељак садржи 9 проблема, дакле укупно је ту 81 проблем.

Оно што је посебно значајно за ово дело је да је ту дат de facto конструктиван доказ за Кинеску теорему о остацима. Прво спомињање ове теореме налази се у „Математичком класику Сун Цуа” чије се порекло процењује на IV век. Ту се налази овај проблем.

Имамо ствари за које не знамо колико их је; ако их бројимо по три, остатак је 2; ако их бројимо по пет, остатак је 3; ако их бројимо по седам, остатак је 2. Колико има ствари?

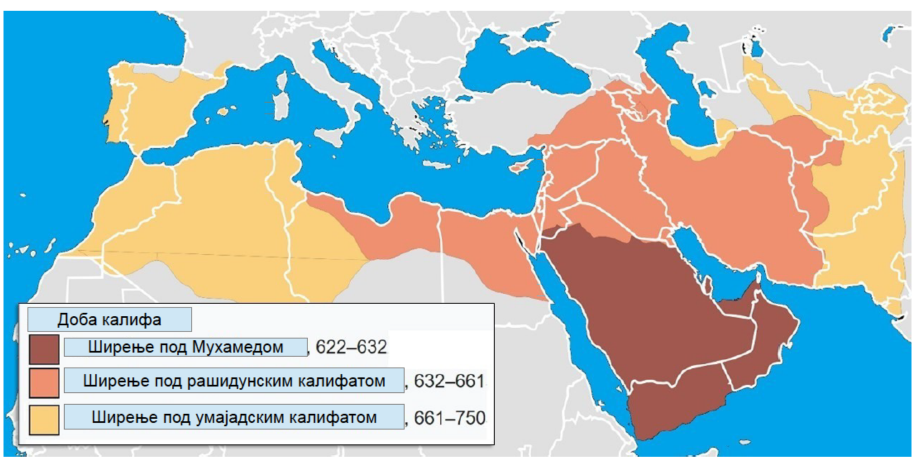
Јасно је да се овде тражи да се реши систем конгруенција:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

и дато је решење $x = 23$. Наравно, ово је једноставан проблем. Ћин је заправо описао налажење решења у општем случају, чак и када модули нису узајамно прости (наравно, решење тада не постоји увек, али се установљава и када оно постоји). То је велики скок од тог једног једноставног проблема из давних времена. Сам Ћин свакако није био оличење врлине. Није презао ни од тога да отрује оне који му се нису свиђали, а и позиције администратора је користио за пљачку и лично богаћење. Изузетни резултати у науци не морају бити дела узорних људи.

Исламска математика

Појава ислама у трећој деценији VII века довела је до великих арапских освајања. Дамаск је освојен 635. године, Јерусалим 637. док је освајање Египта завршено 642. године. Револуцијом међу исламским вођама на власт 660. године долази династија Умајада. Освојена је цела Северна Африка и Арапи су прешли на тле данашње Шпаније 711. године. Њихова освајања на западу Европе заустављена су у бици код Пуатјеа 732. године. Покушај освајања Византије сломљен је у бици код Константинопоља 717. На истоку је арапска војска освојила Сирију, Персију и стигла и до Индије. Године 750. долази до нове револуције и на власт долази династија Абасида на истоку арапске државе. Умајаде су остале на власти у данашњој Шпанији у форми Кордопског калифата.



Слика 7: Ширење ислама

Године 762. престоница се из Дамаска сели у новоизграђени град на реци Тигар – Багдад. Багдад постаје велики трговачки и културни центар и његова популација у IX веку достиже 800,000 што га чини у то време већим и од Константинопоља. Освојене територије су биле сигурне наредних 300 година на истоку и 600 година у Шпанији. Наступио је период мира и културног развоја. Владари Абасида Харун ел Рашид (владао у периоду 786–809) и његов син Абу Џафар ел Мамун (813–833) били су велики покровитељи културе и науке. Основана је Кућа мудрости, која је била пандан Библиотеци у Александрији.

Слика 8: Кућа мудрости у Багдаду

Тај научни процват у Багдаду, посебно у математици, свакако се може повезати и са чињеницом да је у то време и у Византији дошло до сличног развоја. Значајна личност у Византији у том смислу био је Лав Математичар (или Лав Филозоф) (око 790–869).

Слика 9: Лав Математичар

Рођен је у Тесалији и сматра се да је, бар делимично, био јерменског порекла. Образовао се у Константинопољу, али је потом отишао на острво Андрос где је математику учио од једног старог монаха. По повратку у Константинопољ издржавао се држећи приватне часове.

Постоји легенда о томе да је један од његових ученика био заробљен у борби против Арапа и да је ел Мамун био толико импресиониран знањем тог студента да је изразио жељу да Лава доведе у Багдад и да му је понудио велику плату. Лав то није прихватио, али је ту ситуацију искористио да поправи свој положај и од византијског цара Теофила добио одобрење да оснује своју школу. Лав је заслужан за преписе многих значајних дела грчке математике. Дела Еуклида, Архимеда, Прокла, Аполонија и других математичара и филозофа била су у његовој библиотеци и арапски научници су имали прилику да та дела преведу на арапски језик. Постоје индиције да је Лав поправио Диофантову скраћеничку алгебру увођењем боље симболике, али то није имало даљег утицаја.

Ел Хорезми

Мухамед бен Муса ел Хорезми (око 780–850), пореклом је, како му само име каже, из Хорезма (данашња Хива) у области која се налази на територији данашњег Узбекистана, па се може наћи да се он води и као узбечки математичар.

Слика 10: Поштанска марка у СССР-у посвећена Ел Хорезмију

Но, негде се наводи да је он заправо рођен у околини Багдада, а да су му преци из Хорезма. У сваком случају, за време владавине ел Мамуна, он је био члан Куће мудрости. Значајна су два његова дела.

Прво дело је сачувано само у преводу на латински језик: ***Algoritmi de numerum indorum*** („Ел Хорезми о индијским бројевима”) у коме описује декадни систем који је развијен у Индији. Као што смо напоменули, постојало је 9 цифара, али у овом раду ел Хорезми сугерише да се за недостајуће место стави мали кружић — претеча нуле. Санскритска реч *сунја* (празно) је на арапски преведено као *сифр*. Потом на латински као ***zephyrum*** и одатле имамо и ***zero*** и *цифру*. У овом делу је он описао рачунање у декадном систему, те је латинизована верзија његовог имена почела да означава најпре тај поступак, а потом и било коју процедуру у коначно много корака за решавање неког проблема.

Другим делом ћемо се више позабавити. Кратко се наводи као *Хисаб ал-џабр в'ал мукабала*, а превод целог наслова би могао да буде *Сажета књига о рачунању по правилима комплетирања и редуковања.* Ради се о решавању алгебарских (заправо само квадратних) једначина и правила се односе на трансформацију израза – ал-џабр се односи на додавање позитивних израза на обе стране једначине да би се елиминисали негативни изрази, а ал-мукабала на редукцију чланова истог типа. О томе смо већ раније писали. Малом променом од ал-џабр долази се до термина *алгебра*. Овде је можда забавно рећи да се у време Дон Кихота (или, ако се тако некоме више допада, у време Мигуела Сервантеса) у Шпанији на вратима многих берберница могао наћи натпис ***Algebrista y Sangradoe*** (*Намештање костију и пуштање крви*), тако би *алгебриста* могло да се преведе и као *костоломац*.

Алгебра ел Хорезмија је реторичког типа, ту нема симболике, све се описује речима. Он у свом уводу јасно наводи да је имао намеру да напише кратак приручник за решавање конкретних проблема који се тичу наслеђивања, подела, трговине, премеравања и сличним питањима. Дакле, његово дело није теоријског типа, но је мотивисано праксом. Код њега је присутна доза отклона од грчке геометрије. На пример, једног значајног арапског аутора који је био нешто старији од њега (да не наводимо сада његово име, није нам од значаја за касније), а који је био велики заговорник усвајања грчке математике у Багдаду, он уопште не наводи. Он избегава спомињање Еуклида, мада, као што ћемо видети, он користи геометрију да оправда своје алгебарске трансформације. Касније је, као неку врсту одговора на то, значајни геометар Табит бен Кура, показивао да је то што су радили 'алгебристи' заправо већ садржано код Еуклида.

Код ел Хорезмија нема негативних бројева, чак ни као коефицијената, те је он све линеарне и квадратне једначине свео на шест случајева.

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = b$
3. $ax = b$

4. $ax^2 + bx = c$

5. $ax^2 + c = bx$

6. $ax^2 = bx + c$

где су a, b, c дати позитивни рационални бројеви. Речима би, рецимо, случај 4. описао као корени и квадрати једнаки бројевима. Дакле, за њега је x био *корен*, а не *линија, дуж* као код Грка. На прва три случаја се врло кратко задржава, при чему увек најпре своди задати проблем на проблем у коме је коефицијент уз x^2 јединица, било дељењем било множењем одговарајућим бројем. То ради и за остале случајеве, које назива сложеним, те заправо имамо следеће 'сложене' случајеве.

1. $x^2 + px = q$

2. $x^2 + q = px$

3. $x^2 = px + q$

Он најпре даје опис поступака за решавање свих ових случајева, уз конкретан пример, а затим геометријски образлаже зашто је поступак добар. Подсетимо се, он пише приручник, не научно дело.

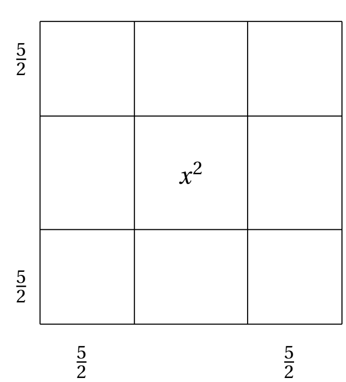
Ево како образлаже први случај (пример који користи је $x^2 + 10x = 39$):

Решење је ово: преполовите број корена, што у овом случају даје пет. То помножите са самим собом; производ је двадесет пет. Додајте то на тридесет девет; сума је шездесет четири. Сада нађите корен из овога, што је осам и одузмите од њега половину броја корена, што је пет; остатак је три. Ово је корен квадрата који сте тражили, сам квадрат је девет.

Занимљиво је да је њему непозната квадрат. Он заправо описује следећу формулу:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

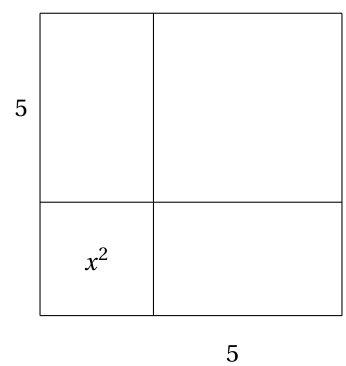
Ово оправдава комплетирањем квадрата и то на два начина.



Наравно, код њега нема свих ових ознака, означена су поједина темена и образложено је шта се ради. Формира се непознати квадрат (x^2) и на њега са стране ’накаче’ четири правоугаоника чија је друга страница $\frac{5}{2}$. Тако добијамо четири правоугаоника укупне површине $4 \cdot \frac{5}{2} x = 10x$. Та централна фигура се онда допуни малим квадратима укупне површине $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$ до пуног квадрата који је странице 8. Стога је страница непознатог квадрата $x = 3$. Дакле, овде имамо класично (и буквално) комплетирање квадрата. Формулама би то оправдали овако:

$$\begin{aligned} x^2 + 10x &= 39 \\ x^2 + 10x + 25 &= 39 + 25 \\ (x+5)^2 &= 8^2 \\ x + 5 &= 8 \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Други цртеж је убедљивији, свакако је једноставнији.

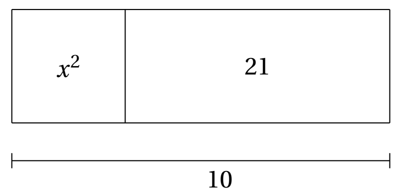


Дакле на непознати квадрат смо ‘накачили’ два правоугаоника чије су друге странице 5. Укупна површина тог објекта је $x^2 + 10x$. Он се комплетира до квадрата додајући квадрат странице 5. Тако се добија велики квадрат површине $39 + 25 = 64$ и то је то. Заправо је онај први цртеж непотребан, ово друго је јасније и директније образложење. Занимљиво је да се овај конкретан пример после вековима провлачио кроз разне касније уџбенике алгебре.

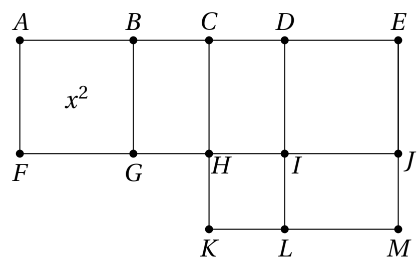
Други случај одговара формули

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Дакле, овде имамо два случаја и ел Хорезми указује на то. Посебно истиче да решење постоји само ако $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ није мање од q и да је решење баш $\frac{p}{2}$ уколико је $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$. Пример $x^2 + 21 = 10x$ илуструје на следећи начин. Ми ћемо додати цртеж који означава поставку проблема.



Дакле, на непознати квадрат додајемо правоугаоник површине 21, чија је једна страница непознати корен. Заједно добијамо правоугаоник чија је једна страница непознати корен, а друга је једнака 10. Ево и комплетног цртежа.

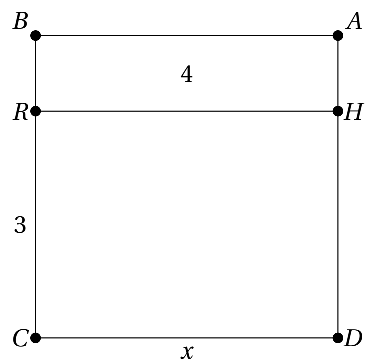


У средишту C дужи AE повлачимо нормалу CK и формирамо квадрат $CEMK$. Тачка H је пресечна тачка те нормале и FJ. Формирамо нови квадрат $HILK$. Ел Хорезми објашњава зашто су правогаоници $BCHG$ и $IJLM$ једнаки (подударни) и онда се може закључити да је 'гномон' $CHILME$ исте површине као и правоугаоник $BEJG$ за који знамо да је површине 21. Квадрат $CEMK$ је површине 25, а квадрат $HILK$ комплетира гномон $CHILME$ до тог квадрата. Стога је $HI = 2$. Но, и $DEJI$ је квадрат, а његова страница је x. Како је $HJ = 5$, добија се да је $x = 5 - 2 = 3$. Ел Хорезми објашњава да је друго решење $x = 5 + 2 = 7$.

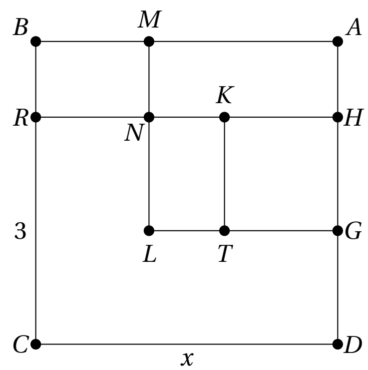
За последњи случај „корени и бројеви једнаки квадрату”, тј. за једначину облика $x^2 = px + q$, ел Хорезми даје решење:

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{p}{2}.$$

Геометријски то појашњава на примеру $x^2 = 3x + 4$. Најпре поставка проблема.



Дакле, имамо непознати квадрат странице x и њега поделимо на два правоугаоника – један је површине 4, са једном од страница x, док једна страница другог 3, а друга x. Ево решења.



Тачка G је средиште дужи DH. Формира се квадрат $HGTK$. Формира се и квадрат $AGLM$. С обзиром на избор ових тачака, имамо да је $MN = ML - LN = NH - HK = NK$. Такође је $RN = RH - NH = AD - AG = GD = HG = NL$. Стога су правоугаоници $BMNR$ и $NKTL$ подударни. Према томе, површина гномона $AHKTLM$ једнака је површини правоугаоника $BAHR$, тј. једнака је 4. Тај гномон се квадратом $HKTG$, чија је страница $\frac{3}{2}$ допуњава до квадрата странице AG. Дакле,

$$AG = \sqrt{4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}.$$

Тада је $x = AD = AG + GD = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$ (G је средиште дужи DH).

У даљем тексту, ел Хорезми објашњава како се множе биноми, тј. правила за рачунање производа облика $(ax \pm b)(d \pm cx)$ и потом ради разне примере једначина које настају из неких проблема. У делу *Мерење* налазимо разне формуле за рачунање површина и запремина. Нема ту ништа ново, за π предлаже три, добро нам познате, апроксимације: $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$, $\frac{62832}{20000}$.

Значајан део рада посвећен је практичним питањима наследства, поделе имовине и сличним проблемима. Наравно, тај нам део није занимљив.

Абу Камил

Абу Камил (око 850–930), познат и као „рачунџија из Египта” написао је своју *Алгебру*, која је заправо проширење ел Хорезмијеве

Слика 11: Абу Камил из Египта

књиге. У њој има 69 проблема (код ел Хорезмија има 40). Многи су преузети, али има и нових, као и других метода за решавање. Ево једног примера.

Проблем број 8, речима изражава захтев да се 10 подели на два дела, тако да збир количника тих делова даје $4\frac{1}{4}$. Дакле, ради се о систему једначина:

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x} &= 4\tfrac{1}{4}, \end{aligned}$$

где је x мањи део. Друга једначина се своди на

$$x^2+y^2=4\tfrac{1}{4}xy. \tag{3}$$

Абу Камил решава овај проблем на два начина. Најпре користи метод ел Хорезмија. Из прве једначине изражава $y=10-x$ и убацује у (3). Добија једначину

$$6\tfrac{1}{4}x^2+100=62\tfrac{1}{2}x,$$

односно
$$x^2 + 16 = 10x,$$
која има решење $x = 2$, те је $y = 8$. Друго решење користи идеју старе месопотамске математике — уводи се нова непозната z са:
$$x = 5 - z, \quad y = 5 + z.$$
Када се то замени у (3), добија се
$$50 + 2z^2 = 4\tfrac{1}{4}(25 - z^2),$$
одакле се лако добија $z^2 = 9$, те је $z = 3$ и потом се добијају и x и y.

Абу Камил је развио и рачун са коренима, па је користио и формулу
$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}.$$
Посебно је занимљиво да се код њега, по први пут, појављује решавање проблема у којима одговарајуће једначине имају и ирационалне коефицијенте. На пример, у проблему 53, добија се једначина
$$(x + \sqrt{3})(x + \sqrt{2}) = 20.$$
Абу Камил решење даје у облику
$$x = \sqrt{21\tfrac{1}{4} - \sqrt{6} + \sqrt{1\tfrac{1}{2}}} - \sqrt{\tfrac{3}{4}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$
Уверите се да је решење заиста добро, мада је можда, за нас, необично записано.

Абу Камилова *Алгебра* има посебан значај, јер је извршила велики утицај на Леонарда из Пизе (Фибоначија) који је у својој *Књизи о абакусу* из 1202. пренео 29 проблема од Абу Камила (уз неке мале измене).

Табит бен Кура

Табит бен Кура ел Харани (836–901) био је сабејац из Харана.

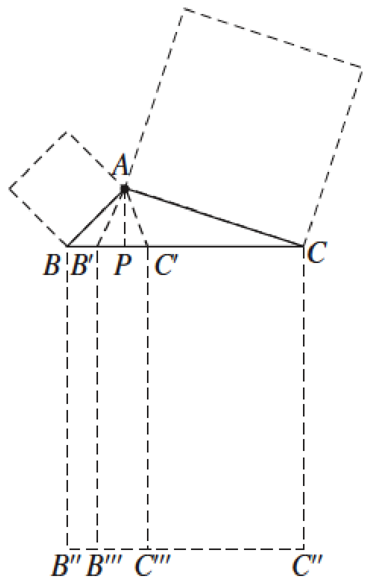
Заправо, како историчари наводе, сабејци из Харана су били ‘лажни сабејци’. Прави сабејци су били религиозна група коју је, уз хришћане и јевреје, Куран признавао као „људе од Књиге” и они су уживали сву верску толеранцију у оквиру муслиманске државе. Но, људи из Харана су били хеленизовани Сиријци, који су следили неопитагорејску филозофију и начин живота. Легенда каже да је Калиф ел Мамун предводећи једном приликом војску ка Византији свратио у Харан и питао тамошње становништво да ли су они хришћани на шта су му они одговорили да нису. Питао их је да ли су јевреји. Рекли су да нису ни јевреји. На питање да ли имају свету књигу или пророка,

Слика 12: Табит бен Кура

нису јасно одговорили. Када је то све чуо, ел Мамун им је рекао да ће морати или да пређу у ислам или у хришћанство или у јудаизам или ће их све побити када се буде враћао. Они су потражили савет од једног искусног шеика (и добро му платили за то) и он им је рекао да кажу да су они сабејци. И тако се они спасоше. У сваком случају, чињеница да су следили неопитагорејску филозофију је довела до тога да је међу њима било значајних математичара и астронома. Рецимо и ел Батани, о коме нећемо даље писати, је био сабејац.

Табит бен Кура је писао на свом језику, сиријском (то је језик који данас више не постоји, а у истој је групи као и арамејски којим је говорио Исус Христ), преводио са тог и других језика на арапски. Био је геометар по уверењу, промовисао је грчку геометрију, па је написао и кратку расправу *О верификацији алгебарских проблема геометријским доказима* у којој је показивао да се све што су радили алгебристи при решавању квадратних једначина може већ наћи код Еуклида, заједно са коректним доказима. Очигледно да то није било јасно свима, чим је он осетио потребу да напише то дело. Табит је, дакле, представљао ту другу струју у исламској математици, која се наслањала најпре на грчку математику са јаком теоријском подлогом, а не на рачунску традицију Месопотамије и Индије.

Табит је имао и значајних резултата. Наведимо његову генерализацију Питагорине теореме за било који троугао.



Слика 13: Уопштење Питагорине теореме

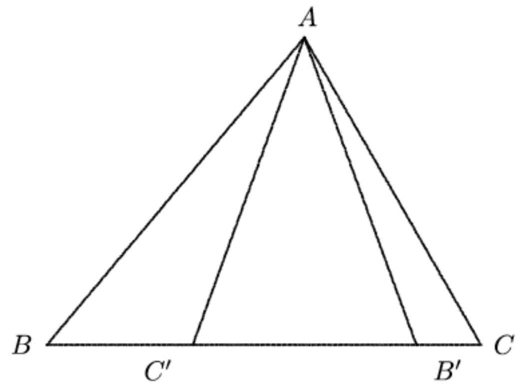
Дакле, дат је произвољни троугао $\triangle ABC$ и на страници BC изабране су тачке B' и C' такве да је $\measuredangle AB'B \cong \measuredangle BAC \cong \measuredangle AC'C$. Тада је

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BB' + CC').$$

На слици је нацртан квадрат $BCC"B"$ и уочавамо и два правоугаоника $BB'B'''B''$, $CC''C'''C$. Тврђење заправо каже да је збир (површина) квадрата над страницама AB и AC једнак збиру (површина) та два правоугаоника. Табит не даје доказ, само наводи да се лако може извести помоћу Еуклидових резултата (и то оних који заправо представљају формулације косинусне теореме, а о којима смо раније писали). Но, може се то добити на разне начине. Ако се присетимо Еуклидовог доказа Питагорине теореме, у њему се показује једнакост површина тих квадрата и површина одговарајућих правоугаоника. То имамо и овде, само та два правоугаоника у овом случају (када је угао код темена A туп) не покривају цео квадрат над BC.

У случају када је угао код темена A оштар, збир њихових површина је већи од тог квадрата
Доцртајте одговарајуће квадрате и правоугаонике – приметимо да је распоред тачака B' и C' сада другачији тако да се ти правоугаоници сада преклапају.

Његова *Књига о одређивању пријатељских бројева* садржи врло леп резултат из теорије бројева. Бројеви a и b су пријатељски уколико је



сваки од њих једнак збиру правих делилаца оног другог. На пример, пријатељски су бројеви $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ и $284 = 2^2 \cdot 71$:

$$1+2+5+11+2^2+2\cdot5+2\cdot11+5\cdot11+2\cdot5\cdot11+2^2\cdot5+2^2\cdot11 = 284,$$

$$1+2+71+2^2+2\cdot71 = 220.$$

Ево Табитовог правила: ако су $p = 3\cdot2^n - 1$, $q = 3\cdot2^{n-1} - 1$ и $r = 9\cdot2^{2n-1} - 1$ прости бројеви, онда су бројеви $M = 2^n pq$ и $N = 2^n r$ пријатељски бројеви. Управо горенаведени пар пријатељских бројева добијамо за случај $n = 2$: $p = 11 (= 3\cdot2^2 - 1)$, $q = 5 (= 3\cdot2^{2-1} - 1)$ и $r = 71 (= 9\cdot2^3 - 1)$.

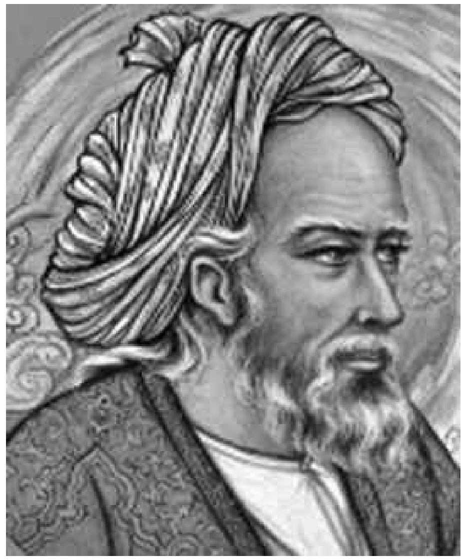
И други се парови пријатељских бројева могу добити помоћу Табитовог правила. На пример, пар бројева 17296 и 18416 добио је Ферма из Табитовог правила за $n = 4$, док је Декарт добио пар бројева 9363584 и 9437056 за $n = 7$. Ојлер је написао три рада о пријатељским бројевима. Доказао је исправност Табитовог правила и навео листу од чак 62 пара пријатељских бројева (они нису сви добијени овим правилом).

Омер Хајам

Само један хлебац од чисте пшенице,
један крчаг вина, комад печенице,
и ја покрај тебе пусте сред равнице, —
шта су спрам те сласти султанске границе?!

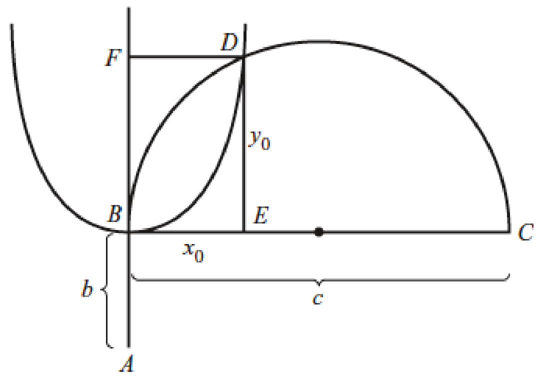
Омер Хајам (1050–1123) значајни персијски математичар, астроном, филозоф и песник, познат по својим хедонистичким стиховима, писао је своја математичка дела на арапском, а песме на персијском језику.

Његово најзначајније математичко дело је, кратко, *Алгебра* и у њему се бавио геометријским решавањем кубних једначина. Он је



Слика 14: Омер Хајам

истакао да се кубна једначина не може решавати лењиром и шестаром, него су за то потребни конусни пресеци. С обзиром да је и он искључивао негативне коефицијенте (а и корене), морао је да разматра 14 типова кубних једначина. Метод решавања је био да се једначина геометријски реши помоћу пресека две криве другог реда, на пример хиперболе и кружнице, или параболе и хиперболе. Треба имати у виду да је он на располагању имао реторичку алгебру и да је све то било знатно сложеније него нама данас. Ево једног његовог решења.



Слика 15: Геометријско решавање кубних једначина

Овде је приказано његово геометријско решење једначине $x^3 + b^2x = b^2c$, где се решење добија у пресеку параболе $x^2 = by$ и полукруга са центром у $(c/2, 0)$ полупречника $c/2$. Разлог зашто су коефицијенти овако одабрани је у његовој жељи да сви коефицијенти буду 'просторни'. У својим разматрањима игнорисао је случај када постоји двоструки корен, а није открио ни случај у коме постоје три различита решења. Такође је сматрао да кубне једначине немају алгебарско решење. Но, без обзира на то, његово дело било је веома значајан напредак, јер мада он разматра питање геометријски, он заправо решава једначине. Мали корак ка алгебарској геометрији.

Други његов значајан рад тиче се покушаја доказивања Еуклидовог петог постулата. Већ раније се тиме бавио бен ел Хајтам који је разматрао четвороугао, који има три права угла (он је данас познат као Ламбертов четвороугао) и покушао је да докаже да и четврти угао мора бити прав. Хајам критикује његов доказ, који јесте био погрешан и сам разматра четвороугао који је једнакокраки трапез са два права угла на основици (данас познат као Сакеријев четвороугао). И он је погрешно доказао да је то обавезно правоугаоник. У сваком случају, Сакери је био упознат са преводом Хајамовог дела и могао је да гради даљу теорију уз коришћење Хајамових идеја.

Ел Каши

Џамшид ел Каши (око 1380–1429) припада већ периоду заласка исламске математике. Он је такође био персијски математичар који је радио у Самарканду (сада град у Узбекистану), који је тада био престоница Улуг Бега, унука чувеног Тамерлана (победника над султаном Бајазитом у бици 1402. године код Ангоре, тј. данашње Анкаре). Улуг Бег је и сам био одличан астроном и математичар, но стога не баш и

Слика 16: Са иранске поштанске марке

успешан владар, те га је син срушио са престола и наручио потом и његово убиство док је овај одлазио у Меку после пораза.

Ел Каши је био без премца у вештини рачунања. Рачунао је користећи и сексагезималне и децималне записе. Знао је да одређује нумеричка решења алгебарских једначина методом који се сада назива Хорнеров метод и који је базиран на постепеном формирању одговарајућег записа траженог броја. На пример, израчунао је шести корен броја који је у основи 60 записан као $34, 59, 1, 7, 14, 54, 23, 3, 47, 37; 40$ што заиста делује скоро нестварно. Изразио је и 2π у децималном запису: $6{,}2831853071795865$, што је апроксимација која је остала ненадмашена све до краја шеснаестог века (можда је ово прави тренутак да наведемо занимљив метод за памћење децималног записа броја π – ако запишете број слова у следећем исказу, добићете π на 16 децимала: још и Грци и стари Вавилонци су казали — обиме кад делиш круговим пречником добијаш неопходни нам пи). Ел Каши је направио и одличне тригонометријске таблице за опсерваторију у Самарканду, а код њега се појављује и Паскалов троугао (који се у Кини разматрао још раније, а у Европи тек један век после њега).

Можда је најбоље овај део предавања о историји математике завршити преводом увода у уџбеник алгебарске геометрије *Алгебарски* *варијетети* значајног америчког математичара Џорџа Кемпфа.

Алгебарска геометрија је мешавина идеја две медитеранске културе. Она је надградња арапске науке брзог рачунања решења једначина над грчком вештином о положају и облику. Овај гоблен је оригинално извезен на европском тлу и још увек се профињује под утицајем међународне моде. Алгебарска геометрија проучава деликатан баланс између геометријски уверљивог и алгебарски могућег. Кад год једна страна ове математичке клацкалице превагне над другом, човек одмах губи интерес и бежи у потрагу за узбудљивијом разонодом.

Почеци математике у Западној Европи

Леонардо из Пизе

Леонардо из Пизе (око 1170–1240) рођен је у граду-држави Пиза. Његов отац звао се Гиљермо, а Леонардо је наводио да је потомак

Слика 17: Фибоначи

Боначија, који је највероватније био неки давни предак. У то време је позивање на познате претке било правило у Италији. Он је сам себе називао Леонардо Пизански Биголо и када је 1240. године добио званичне почасти од града Пизе за службу као финансијски саветник, у том документу је баш то стајало. Било је много покушаја да се објасни то име Биголо, али није нам то много важно. Но, надимак Фибоначи (што долази од 'син Боначија') по свему судећи потиче од једног историчара математике из 1838. године. Нема никаквих доказа да је сам Леонардо икада користио то име, али ето то је остало и под тим надимком је и најпознатији.

Више италијанских градова-држава у то време је имало веома развијену трговину са исламским светом и Пиза је била један од њих. Леонардов отац је добио важну позицију у једном граду у садашњем Алжиру 1192. године и повео је свог сина са собом да изучи трговачке вештине. Добио је одличну подуку из математике и тамо је научио рачун помоћу индо-арапских цифара. Писао је да му се то веома допало и да је наставио са изучавањем математике и у даљим путовањима по Египту, Сирији, Византији, Сицилији и Провански.

Леонардо се у Пизу вратио 1200. године и у наредних 25 година написао неколико дела. Она која су остала сачувана су

1. *Liber abbaci* (1202, редиговано 1228),
2. *Practica geometriae* (1220),
3. *Flos* (1225).
4. Писмо филозофу Теодорусу, који је живео на Сицилији на двору Фридриха II, цара Светог римског царства,
5. *Liber quadratorum* (1225).

Даћемо кратак преглед неких од ових дела. Почнимо од најчувенијег и најобимнијег *Liber abbaci*, тј. *Књиге о рачунању*. Ова књига има 15 глава.

Првих 7 глава књиге посвећено је рачунању у декадном систему базираном на индо-арапским цифрама уз додати знак 0 за нулу. Велики број примера, детаљно описаних речима може се ту наћи. Ево, на пример, како Леонардо описује дељење броја 9000 бројем 7. Он све описује речима, а ми ћемо приказати поступак симболима. Најпре каже да се 7 испише испод прве нуле:

$$\begin{array}{llll} 9&0&0&0\\ &&&7 \end{array}$$

Затим каже да се 9 дели са 7; количник је 1, а остатак 2 и стога 1 треба писати испод 9, а 2 изнад 9:

$$\begin{array}{llll} 2&&&\\ 9&0&0&0\\ &&&7\\ 1&&& \end{array}$$

Сада се та двојка споји са нулом која је иза 9, те се тако добијен број 20 дели са 7. Количник је 2, а остатак 6. Знамо већ где их пишемо.

$$\begin{array}{l} 26 \\ 9000 \\ \quad\;\; 7 \\ 12 \end{array}$$

Настављамо поступак.

$$\begin{array}{l} 264 \\ 9000 \\ \quad\;\; 7 \\ 128 \end{array}$$

Најзад, 40 при дељењу са 5 даље количник 5, који се пише испод одговарајуће нуле

$$\begin{array}{l} 264 \\ 9000 \\ \quad\;\; 7 \\ 1285 \end{array}$$

док се остатак 5 пише изнад разломачке црте над 7. И тако се добија резултат: $\frac{5}{7}1285$. Да? Није грешка, Леонардо овако пише мешовити број, најпре разломљени део, а после цео део. То је сигурно под утицајем арапског писма које се пише здесна улево.

Дакле, имамо заиста разломачку црту, разломке, но Леонардо има и овакве записе:

$$\frac{2\;4\;4}{3\;5\;5}9.$$

Шта је сада ово? Можда ће јасније бити када на овакав начин напишемо, на пример, број $2{,}3478$:

$$\frac{8\;\;7\;\;4\;\;3}{10\;10\;10\;10}2.$$

Дакле:

$$2{,}3478 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10\cdot 10} + \frac{7}{10\cdot 10\cdot 10} + \frac{8}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10},$$

а

$$\frac{2\;4\;4}{3\;5\;5}9 = 9 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 5\cdot 3}.$$

Чему служе ови сложени разломци, каква је то ‘егзотика’? Но, главе 8–11 садрже проблеме који се тичу трговине, а разне мерне јединице, укључујући новчане, нису биле тако правилне као данас. Уосталом, и сада имамо тај англосаксонски систем:

1 лига = 3 миље; 1 миља = 8 фурлонга; 1 фурлонг = 10 ланаца; 1 ланац = 22 јарде; 1 јард = 3 стопе; 1 стопа = 12 инча. [1]

Добро, лига се више не користи (мада се спомиње у добро познатој књизи „Господар прстенова", на пример), а и постоји сада 1000ти део инча, но...

Дакле, 3 лиге, 2 миље, 4 фурлонга, 6 ланаца, 11 јарди, 2 стопе и 5 инча је, по Леонардовом запису:

$$\frac{5\ \ 2\ \ 11\ \ \ 6\ 4\ 2}{12\ 3\ 22\ 10\ 8\ 3}\,3\text{ лиге}\qquad ☺.$$

Ако читате старије књиге, онда можете да погледате и како је било са новчаним јединицама. Код Леонарда има велики број задатака који се тичу трампе, конверзије валута и слично. Уз коришћење оваквих записа.

У главама 12 и 13 има више забавних проблема, али је наслов главе 13 посебно занимљив:

Овде почиње глава тринаест о методу елшатајм и како се њим скоро сви проблеми у математици решавају.

Добро, шта је тај метод? Назив потиче из арапског и значи две грешке. Идеја је да се при решавању једначине $f(x) = c$ израчунају вредности функције f у неке две тачке a и b (то су те две 'грешке'), да се постави права кроз те две тачке и тако се одреди приближно решење. Прецизније, ако желимо да решимо једначину

$$f(x) = c,$$

онда је њено приближно решење x' дато са:

$$\frac{x' - a}{b - a} = \frac{c - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Дакле, ради се о линеарној интерполацији. Још у египатској математици је, за решавање линеарних једначина $ax = b$ коришћена метода (једне) погрешне претпоставке, где се за x узима нека погодна вредност, па се онда она поправља. Метода две погрешне претпоставке је дуго времена коришћена за решавање једначина облика $ax + b = c$. Нама то сада изгледа крајње необично, али тако је било. Наравно у овом случају се добија тачно решење пошто се ради о правој. У случају полинома добија се приближно решење.

[1] За љубитеље фудбала (и геометрије) наведимо да је ширина гола 8 јарди, висина 8 стопа, да је „петерац" правоугаоник страница 20 и 6 јарди, да је „шеснаестерац" правоугаоник страница 44 и 18 јарди, да је „једанаестерац" на 12 јарди, док је растојање при извођењу слободног ударца 10 јарди — лук који се налази на врху казненог простора је онај део лука круга полупречника 10 јарди са центром у тачки за извођење „пенала", који се не налази у казненом простору.

У глави 14, Леонардо се бави рачунањем квадратних и кубних корена. За квадратне корене користи добро познату апроксимацију:

$$\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a},$$

док за кубне корене користи две апроксимације. Најпре

$$\sqrt[3]{a^3+r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = a_1,$$

док је друга апроксимација:

$$a_2 = a_1 + \frac{a - a_1^3}{3a_1(a+1)}.$$

Заправо, као што се можете лако уверити, прва апроксимација је добијена методом две грешке (решава се једначина $x^3 = a^3 + r$ и рачунају вредности x^3 за $x = a$ и $x = a+1$) и ово је било навођено у делима исламских математичара, док за другу апроксимацију Леонардо каже: „Ја сам изумео овај начин за налажење корена."

Глава 15 је посвећена проблемима у којима се појављују линеарне и квадратне једначине, као и оне које се своде на такве. Наведимо само један пример система једначина који се разматра:

$$y = \frac{10}{x}$$

$$z = \frac{y^2}{x}$$

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Овај систем се своди на квадратну једначину по x^4:

$$x^8 + 100x^4 = 10000.$$

Кратко дело ***Flos*** (*Цвет*) Леонардо је саставио и послао Фридриху II, који је био велики покровитељ науке и уметности. У њему су између осталог, одговори на нека питања која је, као изазов, Леонардо поставио Ђовани из Палерма, који је био математичар на двору цара Фридриха II, који је тада столовао на Сицилији. Два су питања посебно занимљива.

Први проблем је био да се нађе (рационалан и позитиван) број x такав да су и x^2+5 и x^2-5 потпуни квадрати. Леонардо је, без образложења поступка дао пример: $x = \frac{5}{12}3$:

$$\left(\frac{5}{12}3\right)^2 + 5 = \left(\frac{1}{12}4\right)^2, \quad \left(\frac{5}{12}3\right)^2 - 5 = \left(\frac{7}{12}2\right)^2.$$

Метод је образложен у књизи *Liber quadratorum*.

Други проблем се састојао у решавању кубне једначине:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Леонардо је показао да ниједан рационалан број није решење ове једначине, а нису то ни квадратне ирационалности које је разматрао Еуклид у својим *Елементима*. Дакле, ни бројеви облика $\sqrt{a}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, где су a и b позитивни рационални бројеви, нису решења ове једначине. И онда је написао, отприлике, да пошто решења нису бројеви овог типа, он даје приближно решење. Изражено у сексагезималном систему решење које је дао је:

$$1;22,7,42,33,4,40.$$

Он није дао никакво објашњење како је дошао до овог решења. А приближно решење које је дао је изванредно добро. Заправо је развој у сексагезималном систему:

$$1;22,7,42,33,4,38,30,50\ldots$$

Постављају се два питања овде. Како је дошао до овог приближног решења? Зашто је последњи члан у развоју 40? Зашто није 38 или 39, ако је већ решио да заокружи резултат.

Постоје два начина на који је Леонардо могао да дође до овог резултата. Један је метод, који је био познат још одавно у Кини, а који је данас познат као Хорнеров метод за налажење корена оваквих једначина (опет нам се овај метод појављује у причи), а други је „метод двоструке грешке”, за који смо видели да га је детаљно разматрао у свом делу *Liber abbaci*.

Прикажимо сада шта је то Хорнеров метод за решавање једначина. Приказаћемо га на наведеном примеру, али ћемо ипак рачунати у децималном систему, јер нам је тако лакше. Метод се састоји у томе да се постепено формира децимални развој за тражено решење. Приметимо најпре да једначина

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

има само једно позитивно реално решење. Ми то сада знамо лако да покажемо: функција f задата са $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ има извод $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ и он је позитиван за све вредности $x > 0$. Дакле, функција расте. Како је $f(0) = -20 < 0$ и како f неограничено расте, то ће једначина $f(x) = 0$ имати тачно једно позитивно решење. Но, Леонардо је и разматрао само позитивна решења.

Како је $f(1) = -7 < 0$, а $f(2) = 16 > 0$, решење се налази између 1 и 2. Дакле, решење је 1,.... Направимо смену: $x = y+1$. Добијамо једначину по y:

$$y^3 + 5y^2 + 17y = 7$$

и знамо да је решење између 0 и 1, тј. да је облика $0,y_1y_2\ldots$. Да бисмо нашли y_1 помножимо једначину са 10^3:

$$(10y)^3 + 50(10y)^2 + 1700 \cdot (10y) = 7000.$$

Смена $z = 10y$ даје нову једначину:

$$z^3 + 50z^2 + 1700z = 7000$$

и знамо да је решење између 0 и 10. Провером установљавамо да је решење између 3 и 4 (било би погодно применити Хорнерову схему за рачунање ових вредности, но није нам то сада много важно, јер нису компликовани полиноми којима баратамо). Дакле, решење је $z = 3,\ldots$, те је решење почетне једначине: $x = 1,3\ldots$. Да бисмо добили следећу цифру, радимо смену $z = u + 3$ и скалирамо:

$$u^3 + 59u^2 + 2027u = 1423,$$

$$(10u)^3 + 590(10u)^2 + 202700 \cdot (10u) = 1423000.$$

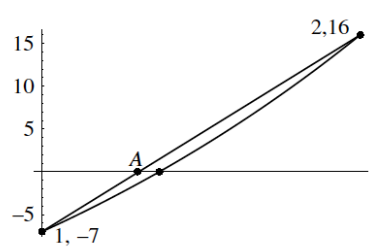
Смена $v = 10u$ даје нову једначину

$$v^3 + 590v^2 + 202700v = 1423000.$$

Није тешко видети да је решење између 6 и 7, те је почетно решење $x = 1,36\ldots$.

Мада се бројеви повећавају, јасно је да можемо овако да наставимо док имамо стрпљења, оловке и папира.

Који је метод користио Леонардо? Наравно, немогуће је са сигурношћу одговорити на ово питање, но других метода није било, а он нигде у својим другим делима није користио овај метод, те су истраживачи у области историје математике склони томе да закључе да је користио тај метод „двоструке грешке” коме је посветио значајан део *Liber abbaci*. С обзиром да је функција $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ конвексна, сечица је изнад криве и стога разумне процене позиције корена и итериране апроксимације увек 'подбацују', а Леонардово решење 'пребацује'.



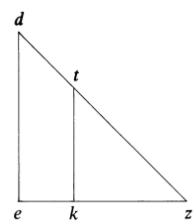
Стога је једна од сугестија истраживача да је он намерно навео тако ту погрешну последњу цифру да не ода метод. Рецимо, баш споменутом Ђованију из Палерма. У то време је било важно неке методе чувати за себе и обезбедити подршку владара или богатих мецена.

Књига *Liber quadratorum* (*Књига о квадратима*) посвећена је проблема представљања бројева у облику сума квадрата, испитивању када су бројеви неког облика квадрати и слично.

Урадимо за почетак један једноставан пример да видимо како је он то радио и које је ознаке користио. Ради се о петом проблему.

Наћи два броја тако да сума њихових квадрата чини квадрат формиран од суме квадрата друга два дата броја.

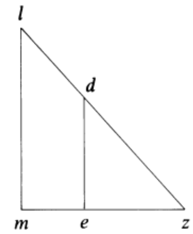
Нека су два броја $.a.$ и $.b.$ дата тако да сума њихових квадрата чини квадратни број $.g.$. Узмимо нека друга два броја чија сума квадрата јесте квадрат. Та два броја су представљена дужима $.de.$ и $.ez.$ и постављени су под правим углом, углом $.dez.$.



Квадрат над дужи $.dz.$ је једнак броју $.g.$ или није. Најпре, ако јесте, онда смо добили решење. Ако није, онда је или мањи или већи од $.g.$. Најпре, ако је већи, онда ће број $.dz.$ бити већи од квадратног корена из $.g.$; стога нека је квадратни корен из $.g.$ једнак броју $.i.$ и постављен дуж $.dz.$ и означен са $.tz.$. Из тачке $.t.$ нацртајмо $.tk.$ која је нормална на $.ez.$; $.tk.$ је стога паралелна $.de.$. Пошто је троугао $.tkz.$ сличан троуглу $.dez.$, $.zd.$ је према $.zt.$ као што је $.de.$ према $.tk.$. Али, однос $.zd.$ према $.zt.$ је познат; обе дужине су заиста познате. Због тога је и однос $.de.$ пре $.tk.$ познат. Такође је и $.de.$ познато. Стога је дуж $.tk.$ позната. Слично се показује да је и дуж $.zk.$ позната. Дакле, познати су $.tk.$ и $.kz.$ чија је сума квадрата једнака квадрату кога чини дуж $.tz.$. Али, квадрат броја $.tz.$ једнак је квадрату броја $.i.$ а $.i.$ је квадратни корен из $.g.$. Стога је квадрат над $.tz.$ једнак броју $.g.$ и два броја $.tk.$ и $.kz.$ су заиста нађена чија сума квадрата је једнака квадратном броју $.g.$. Алтернативно, нека је $.dz.$ мање од $.i.$.

Продужимо дуж $.zd.$ до $.l.$ и нека је $.zl.$ једнако броју $.i.$. Слично се $.ze.$ продужава и $.lm.$ се повеже тако да је $.lm.$ паралелно са $.de.$.

Довршава доказ исто користећи сличност троуглова и наставља конкретним примером у коме узима да је $.a. = 5$, $.b. = 12$. Стога је $.i. = 13$



и добија после образложења да је $.tk. = 11\frac{8}{17}$ (сада пишемо на стандардан начин) и $.kz. = 6\frac{2}{17}$. Има и пример за други случај.

Као што смо навели, у овој књизи је приказан и метод којим је решен један од проблема који је поставио Ђовани из Палерма. Проблем се састоји у решавању система једначина (у позитивним рационалним бројевима):

$$x^2 + 5 = y^2$$

$$x^2 - 5 = z^2.$$

Леонардо разматра општији проблем:

$$x^2 + C = y^2$$

$$x^2 - C = z^2.$$

Ако постоји решење овог проблема, онда број C назива *congruum*, а број x^2 *quadratus congruentus*. Ево како он решава овај проблем. Сабирањем се добија

$$2x^2 = y^2 + z^2.$$

Сменом $y = u + v$, $z = u - v$ горња једначина се своди на

$$x^2 = u^2 + v^2.$$

Дакле, имамо Питагорине тројке (гледамо само природне бројеве сада), те је

$$x = a^2 + b^2, \quad u = 2ab, \quad v = b^2 - a^2.$$

Леонардо добија следећу теорему.

Ако су a и b узајамно прости и $b > a$, имамо два случаја.

1. Ако су a и b непарни, онда је $C = ab(b-a)(b+a)$ *congruum*, а конгруентни квадрат је $x^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$. На пример, ако је $a = 1$ и $b = 3$, онда је $C = 24$.

2. Ако су a и b различите парности, онда је $C = 4ab(b-a)(b+a)$ *congruum*, а конгруентни квадрат је $x^2 = (a^2 + b^2)^2$. На пример, ако је $a = 2$ и $b = 3$, онда је $C = 96$.

За $a = 1$, $b = 9$, добија: $C = 1 \cdot 9 \cdot (9-1) \cdot (9+1) = 720 = 5 \cdot 12^2$, $x = 41$, $y = 49$, $z = 31$. Дељењем са 12, добија наведено решење за $C = 5$. Истим методом добија решења и за друге вредности C.

Овде је можда занимљиво навести и појам *конгруентног броја*. То је цео број који је једнак површини правоуглог троугла са рационалним страницама. Сваки ***congruum*** јесте конгруентан број, а сваки конгруентан број је производ ***congruum***-а и квадрата рационалног броја. Како превести ***congruum***? Како је то неутрални род од ***congruus*** и како ***congruus*** значи *погодан*, а желимо да добијемо именицу, можда је *погодност* (мада је то код нас женски род) најпогоднији превод ☺.

Алгебра у ренесансној Италији

Лука Паћоли

Лука Паћоли (1445–1517)

Слика 18: Лука Паћоли

написао је значајно дело ***Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità***. Оно је написано на италијанском, не на латинском, 1487. године, а штампано је у Венецији 1494. Он је користио напреднију алгебарску нотацију од Леонарда. То је опет варијанта скраћеничке алгебре. За квадратни корен је користио ознаку R (Radix), или $R2$, а за кубни $R3$. Четврти корен је био RR, или $R4$. Непозната у једначини се означавала са co. (cosa, ствар), њен квадрат са ce. (censo), куб са cu. (cubo), четврти степен са ce.ce.. Ако би постојала још једна непозната, она би се звала quantità. За сабирање се користила ознака p, а за одузимање m. На пример,

$$\sqrt[3]{34-\sqrt{12}}$$

би се писало као

$$R3V34\tilde{m}R12.$$

Ознака V показује да се корен односи на све иза њега (*V=U=Universale*) и од тог слова се развила ознака за корен. На крају књиге је написао да је за једначине типа

numero, cosa e cubo;
numero, censo e cubo;
numero, cubo e censo de censo

за сада нико није успео да формира општа правила. Дакле, овде се ради о једначинама трећег и четвртог степена.

Решавање једначина трећег степена

Сваку једначину трећег степена

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

сменом $x=y-\frac{a}{3}$ сводимо на:

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0,$$

односно на

$$y^3-\cancel{3y^2\frac{a}{3}}+3y\left(\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^3}{27}+\cancel{ay^2}-2\frac{a^2}{3}y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c=0,$$

$$y^3+\left(b-\frac{1}{3}a^2\right)y+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0$$

дакле на једначину у којој нема квадратног члана. Ово је наравно било добро познато, те су се, с обзиром да се нису користили негативни коефицијенти, све једначине трећег степена сводиле на један од три типа:

(1) $x^3+px=q$,

(2) $x^3=px+q$,

(3) $x^3+q=px$,

где су, наравно, p,q позитивни бројеви. Први математичар који је нашао решење за једначину типа (1) био је Сципион дел Феро (1465–1526). Сматра се да је он до тог решења дошао око 1515. године. Био је професор у Болоњи и своје решење нигде није објавио, само га је на самрти саопштио свом зету Ханибалу Навеу и свом ученику Антонију Фјореу.

Дакле, и у то време, па и знатно касније, математичари нису увек желели да објаве своје резултате. Њихове позиције нису биле сигурне, морали су да се доказују. Једна од форми доказивања у ренесансној Италији била је у форми математичких двобоја. Николо Фонтана (1500–1557), познатији као Тартаља (Муцавац),

Слика 19: Николо Фонтана

био је самоук математичар. Рођен је у Бреши на северу Италије. Када је био мали, Французи су заузели Брешу и један француски војник га је ранио тако да је цео живот имао ожиљак на лицу и имао је проблема са говором. Тада му је и отац убијен. Мајка се трудила да га школује, али нису имали новца за то. Како пише у његовим биографијама, у школи је био док нису стигли до латиничног слова „c”, те није у школи ни научио да напише своје име. Но, школовао се самостално и успео је да обезбеди позицију приватног учитеља рачуна. Био је и веома успешан у тим математичким двобојима.

Тартаљин пријатељ му је 1530. послао два проблема, који се своде на следеће:

1. Решити једначину $x^3+3x^2=5$.

2. Решити једначину $x(x+2)(x+4)=1000$.

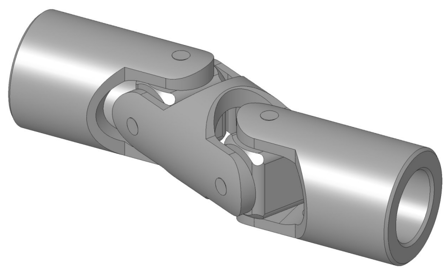
Тартаља се добро помучио и успео да реши ове задатке те је објавио да може да реши сваку једначину типа $x^3+px^2=q$.

Фјоре је сматрао да он блефира и 1535. га је изазвао на двобој. Свако од њих је задао другоме 30 задатака, а поражени је морао да плати 30 вечера за победника и његове пријатеље. Победник би био онај који реши више задатака за 50 дана. Тартаља је сазнао да се сви проблеми које је Фјоре саставио своде на решавање једначине типа (1). Стога се максимално потрудио да нађе решење за тај тип. Успео је у томе и све проблеме које му је Фјоре поставио решио је за неколико сати, док Фјоре није успео да реши већину проблема које је за њега саставио Тартаља (проблеми су били различитог типа, један је чак био скривено у вези са овим типом једначине и Тартаља га је поставио зато што је био убеђен да Фјоре не разуме суштински проблеме који се ту појављују). Наводно је Тартаља био толико задовољан својим тријумфом да је ослободио Фјореа обавезе да плати тражене вечере.

Тартаља је сада знао да решава једначине сва три типа и није имао намеру да објави ово решење. У причи се сада појављује Ђироламо Кардано (1501–1576) — лекар, изумитељ, астролог, математичар, шахиста, коцкар.

Слика 20: Ђироламо Кардано

Један од његових изума и сада се користи – „Карданова спојница” заиста носи име по њему. Написао је и књигу о игри коцком, то је можда и прва књига посвећена теорији вероватноће. Кардано је позвао Тартаљу да му открије своје решење. На крају је успео да га убеди да Тартаља дође код њега у Милано, где ће га Кардано упознати са војним заповедником Милана што је доста значило Тартаљи, јер је имао неке замисли које је желео да покаже дотичном маркизу.



Слика 21: Карданова спојница

У сваком случају, Кардано је успео да убеди Тартаљу да му открије свој метод. Обавезао се да неће то објавити пре него што га Тартаља сам објави. Тартаља је саопштио решење у облику песмице. Упутство је било једноставно: напиши q у облику $q = u - v$, при чему су u и v такви да је $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Тада је решење $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. У остала два случаја се бирају u и v тако да је $q = u + v$, $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ и решење је $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

Да проверимо:

$$\begin{aligned}
x^3 + px &= (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\
&= u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\
&= q - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\
&= q - 3\frac{p}{3}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\
&= q.
\end{aligned}$$

Наравно, и остали случајеви лако се провере.

Кардано и његов ученик Лодовико Ферари (1522–1565) даље су развијали овај метод. Ферари је чак успео да тако реши и једначину четвртог степена и они су желели да објаве те резултате, али их је обећање Тартаљи спречавало у томе. Но, сазнали су да је Сципион дел Феро имао решење и отишли су у Болоњу да то провере у његовој заоставштини. Када су сазнали да је то заиста тако, Кардано је сматрао да више није обавезан према Тартаљи и 1545. објављује дело *Ars Magna* (*Велика вештина*). У том делу описује решавање једначина трећег и четвртог степена. Наводи да је метод за решење једначине трећег степена сазнао од Тартаље, а да је метод за решавање једначине четвртог степена развио Ферари. Тартаља је био огорчен због тога, кренула је бујица оптужби. Све се то завршило дуелом Тартаље и Фераријa у коме су они расправљали о математичким проблемима. Јасно је да је млађи Ферари био у великој предности у односу на старијег и нимало речитог Тартаљу, који је био поражен и понижен тим дуелом.

Слика 22: Лодовико Ферари

Ми се враћамо на тему како је Кардано приказао овај метод. Он је то мало модификовао. Ево како је то било на примеру из његове књиге. Посматра једначину

$$x^3 + 6x = 20. \tag{4}$$

Наравно, он користи реторичку алгебру, све се ово објашњава речима. Он мотивише све геометријским разматрањима у простору, одговарајућим коцкама, но ми ћемо то прескочити, пошто знамо да баратамо кубом бинома. Оно што је важно је да он тражи решење у облику $x = u - v$. Када се ово замени у горњу једначину добије се:

$$(u^3 - v^3) - (3uv - 6)(u - v) = 20.$$

Он сада тражи да је

$$u^3 - v^3 = 20$$

$$3uv = 6.$$

Добија систем

$$u^3 - v^3 = 20$$

$$u^3 v^3 = 8.$$

Тада је $u^3 = \sqrt{108} + 10$, а $v^3 = \sqrt{108} - 10$ и коначно

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Овде већ можемо да уочимо проблем. Знамо да једначина (4) има тачно једно позитивно реално решење. Но, лако се види да је то решење заправо $x = 2$. А ми смо добили веома сложен израз за то решење у коме је тешко препознати да је заиста $x = 2$. Тартаља је био свестан овог проблема, зато је и веровао да Фјоре суштински не разуме шта се ту све дешава. Но, ми можемо да се снађемо овде. Наиме, приметимо да је $108 = 4 \cdot 27$, те је $\sqrt{108} + 10 = 6\sqrt{3} + 10$. Да ли можемо да нађемо неки број чији је ово трећи степен? То заправо није тешко наћи:

$$(\sqrt{3} + 1)^3 = 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} + 1 = 6\sqrt{3} + 10.$$

Но, тада је и $(\sqrt{3} - 1)^3 = 6\sqrt{3} - 10 = \sqrt{108} - 10$. Дакле, $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} = \sqrt{3} + 1$, $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{3} - 1$, те је заиста решење:

$$x = (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) = 2.$$

Наравно, нама сада не би било тешко да изведемо и опште решење, те да добијемо познате *Карданове формуле*, но уместо тога погледајмо још један пример. Посматрајмо једначину

$$x^3 = 15x + 4. \tag{5}$$

Ово је једначина другог типа и овде је згодно решење тражити у облику $x = u + v$. Дакле,

$$(u + v)^3 = 15(u + v) + 4.$$

$$u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 = 15(u + v) + 4.$$

$$3uv(u + v) + (u^3 + v^3) = 15(u + v) + 4.$$

Тражимо u и v тако да је $3uv = 15$, $u^3 + v^3 = 4$. Добијамо систем по u^3, v^3:

$$u^3 v^3 = 125$$

$$u^3 + v^3 = 4.$$

Овде је занимљиво да споменемо маестра Антонија из Фиренце (XIV век). Он је систем једначина

$$st = c$$

$$s+t=d$$

решавао тако што је решење тражио у облику $s=a+\sqrt{b}$, а $t=a-\sqrt{b}$. Наравно, ово је потпуно коректно, а и врло је згодан метод за решавање оваквог система. Искористимо га. Дакле, наш систем је

$$st=125$$

$$s+t=4.$$

Ако узмемо да је $s=a+\sqrt{b}$, а $t=a-\sqrt{b}$ добијамо да је $2a=4$, тј. $a=2$, док је $a^2-b=125$, тј. $b=-121$. Дакле, $u^3=2+\sqrt{-121}$, а $v^3=2-\sqrt{-121}$, те је

$$x=u+v=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Застанимо мало и погледајмо поново нашу почетну једначину. Није тешко видети да једначина $x^3=15x+4$ има за решење $x=4$ и да је то заправо једино позитивно реално решење. Осим тога, може се проверити да ова једначина има три различита реална решења. А ми добисмо нешто прилично компликовано! Ситуација је, да се тако изразимо, још гора него у претходном примеру, пошто смо добили квадратни корен из негативног броја. И сада имамо следеће: избегавали смо негативне бројеве уопште, а добили смо решење у коме се појављује чак и квадратни корен из негативног броја. Заправо, овако нешто ће се појавити увек у случају када једначина има три различита реална решења! То је такозвани *несводљив случај*.

Кардано је био свестан овог проблема и трудио се да га избегне у примерима које је дао у својој књизи. Ипак, на једном месту је допустио и корен из негативног броја. Разматрао је проблем растављања броја 10 на два дела чији је производ 40, односно систем једначина

$$x+y=10$$

$$xy=40.$$

Он је написао да је јасно да је то немогуће, али да ипак радимо. Добио је бројеве $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$. Каже: „Ако оставимо по страни ментално мучење, када помножимо $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$ добијамо 40... Ово је заиста софистика (мудровање)." По свему судећи, Кардано је био први математичар који је увео комплексне бројеве $a+\sqrt{-b}$, али се није осећао нимало пријатно у вези тога.

Рафаел Бомбели се, кратко, позабавио овим проблемом и то ћемо размотрити нешто касније.

Решавање једначина четвртог степена

Општа једначина четвртог степена

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

може се сменом $x = y - \frac{a}{4}$ свести на једначину у којој недостаје кубни члан. Наравно, с обзиром на избегавање негативних бројева, за математичаре у Италији у XVI веку било је више случајева. Основна идеја Фераријевог метода је да се додавањем погодних израза једначина сведе на облик

$$(x^2 + e)^2 = (fx + g)^2.$$

Размотрићемо пример из Карданове књиге:

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x. \tag{6}$$

Да би добио потпун квадрат са леве стране, додаје $6x^2$ на обе стране:

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x,$$

тј.

$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x.$$

Кардано наводи следећу формулу коју детаљно образлаже геометријски, али ми ћемо прескочити то образложење:

$$(x^2 + a + b)^2 = (x^2 + a)^2 + 2x^2b + 2ab + b^2.$$

У нашем случају је

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (x^2 + 6)^2 + 2x^2b + 12b + b^2.$$

Дакле, на обе стране једначине (6) додаје се $2bx^2 + 12b + b^2$. Добијамо

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (6x^2 + 60x) + (2bx^2 + 12b + b^2),$$

односно

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (2b + 6)x^2 + 60x + (b^2 + 12b). \tag{7}$$

Да би квадратни бином са десне стране био потпун квадрат, потребно је и довољно да је

$$4(2b + 6)(b^2 + 12b) = 60^2,$$

односно

$$b^3 + 15b^2 + 36b = 450.$$

Дакле, решавање једначине четвртог степена своди се на решавање помоћне једначине трећег степена. Та помоћна једначина се назива и *разрешавајућа кубика*. Смена $b = c - 5$ кубну једначину своди на

$$c^3 = 39c + 390.$$

Метод који смо приказали раније даје:

$$c = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}},$$

а одатле се добија и b. Једначина (7) сада је облика

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (2b + 6)\left(x + \frac{15}{b+3}\right)^2$$

и она се лако решава. Наравно, резултат не изгледа 'лепо', но то не може ни да се очекује.

Рафаел Бомбели

Рафаел Бомбели (1526–1572) написао је значајну књигу *L'Algebra*.

Слика 23: Рафаел Бомбели

Рођен је у Болоњи и није имао формално математичко образовање, а по професији је био архитектонски инжењер. Био је веома импресиониран Кардановим делом, но сматрао је да Кардано није увек био јасан у својим објашњењима и стога је решио да сам напише књигу из које би почетници могли да овладају алгебром без помоћи других књига. Но, тај посао је потрајао, јер је у међувремену у његов посед дошао грчки рукопис Диофантове *Аритметике* и он је био толико одушевљен тим делом да је решио да га преведе. На крају је текст његове *Algebre* штампан у Венецији непосредно пред његову смрт 1572. године и касније у Болоњи 1579.

У свом делу позабавио се и апроксимацијама квадратних ирационалности верижним разломцима. Да би изразио $\sqrt{2}$, он је записао

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}. \tag{8}$$

Одавде добија да је $y = 1 + \sqrt{2}$. Додавањем 1 на обе стране једнакости (8) добија:

$$y = 2 + \frac{1}{y} \tag{9}$$

Заменом (9) у (8) добија

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}.$$

Следећа замена даје

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}}.$$

Занемарујући $\frac{1}{y}$ добија апроксимације за $\sqrt{2}$: $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$ итд. Разматрао је и развоје за друге квадратне ирационалности.

Оно што нас највише занима је његова дискусија о горенаведеном примеру код Кардана. Он каже да су заиста корени из негативних бројева софистички, али да сама једначина није спорна, јер има решење $x = 4$. Стога он каже да се можда $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ може изразити у погодном облику:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}.$$

Затим анализира ту ситуацију и некако успева да добије да се за p може узети 2, а за q јединица. Заиста је $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$. Тако да добија да је

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-121}) + (2 - \sqrt{-121}) = 4$$

и са задовољством констатује: „У почетку ми се чинило да је цела ствар више базирана на софизму него на истини, али трагао сам док нисам нашао доказ."

Бомбели је увео и ознаку $\sqrt{-1}$: *più di meno*, док је $-\sqrt{-1}$ означавао као *meno di meno*. У једначинама је користио скраћенице: *p. di m.*.

Вијет и аналитичка вештина

Слика 24: Франсоа Вијет

Франсоа Вијет (1540–1603) био је правник по образовању, посланик у парламенту Бретање, а касније је радио као саветник краља Анрија IV. У рату против Шпаније прославио се „разбијањем” шифрованих порука противника. Математиком се бавио уз друге послове, али је и поред тога имао низ важних резултата.

Значајан је најпре због пропагирања децималног система у односу на сексагезимални. Писао је да шездесетице и слично треба користити што ређе или уопште не у математици. Преференцу треба давати десетинама, стотинама, хиљадама, као и десетим, стотим и хиљадитим деловима. Што се тиче записивања бројева, није увек био конзистентан. На пример, дужину полукружнице круга пречника 200 000 писао је као $314{,}159\frac{\mathbf{265{,}35}}{\mathbf{1{,}000{,}000}}$, као **314,159**,265,35, а понекад и као **314,159**|265,35.

Проблем са постојећом алгебарском нотацијом није био само у томе што је била компликована, што се разликовала у записима операција, квадрата, корена, једнакости, него и у томе што није постојао начин да се запишу опште квадратне, кубне и остале алгебарске једначине. Постојали су записи за непознату, али су коефицијенти увек били конкретни бројеви. Вијет предлаже да се самогласници користе за непознате величине, а сугласници за познате (односно задате) величине. На пример, општи облик квадратне једначине би тада могао да се записује овако: $BA^2+CA+D=0$, но Вијет, нажалост, није квадрат писао овако, па чак ни као AA, него A *quadratus*, а A^3 као A *cubus*. Он јесте користио немачке симболе + и − за сабирање и одузимање, али in за множење, а *ae* (од латинског *aequalis*) за једнакост, мада је Роберт Рекорд још 1551. у свом делу „Тоцило мудрости” увео (нешто продужен) знак једнакости $=$ уз образложење да „ништа не може бити више једнако од две паралелне праве”.

Вијету се није свиђао термин АЛГЕБРА, више је волео да користи термин АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА. Наиме, сматрао је да у тражењу непознатих величина, треба спровести анализу у духу грчких геометара попут Папуса (о коме ми нисмо причали, али знамо о чему је реч). На пример, ако бисмо користили савремене ознаке, при тражењу непознате x у једначини $x^2-5x+6=0$, ми бисмо претпоставили да она постоји (анализа проблема), добили бисмо да тада мора бити $(x-2)(x-3)=0$, те је $x-2=0$, или $x-3=0$, односно $x=2$ или $x=3$. Ово није довољно, јер сада треба спровести и синтезу – проверити да ли ово заиста јесу решења. Термин АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА је широко прихваћен међу математичарима. Савремени појам МАТЕМАТИЧКЕ АНАЛИЗЕ долази са Њутном када он показује да се и на бесконачне редове може применити АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА.

Вијет се доста бавио и тригонометријом, саставио је детаљне таблице за тригонометријске функције, за углове са прираштајем од једног минута. Користио је децимални запис за резултат, али је резултате изражавао у целим бројевима, тако што је радио са правоуглим троуглом чија је хипотенуза била дужине од $100\,000$ (синус и косинус би биле дужине одговарајућих катета). Тригонометријске функције су се у то време користиле и као претече логаритама у смислу да су се адиционе формуле користиле за претварање производа у збир (а и за претварање количника у разлику). На пример, уколико би било потребно наћи производ бројева 94476 и 65341, онда би се могла користити формула

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta),$$

тако што би се потражили у таблицама угао α такав да је $\cos\alpha=47328$ ($2\cos\alpha=94476$) и угао β за који је $\cos\beta=65341$ (рекосмо да су код Вијета у таблицама то били цели бројеви) и потом би се у таблицама видело колико је $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, те би се добијене вредности једноставно сабрале.

Од раније су биле познате тригонометријске функције двоструког и троструког угла, док је Вијет, користећи домишљате манипулације успео de facto да дође до формула којима се $\cos nx$ и $\sin nx$ изражавају у облику полинома по $\cos x$, $\sin x$:

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdots$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \cdots$$

То му је свакако помогло да реши проблем који је 1593. године као изазов француским математичарима поставио белгијски математичар ван Румен – решити једначину 45. степена:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 3795x^3 + 45x = K.$$

Вијет је приметио да та једначина одговара заправо развоју $K = \sin 45\theta$ у терминима $x = 2\sin\theta$ и тако је нашао све позитивне корене.

Оно што је занимљивије од овог трика је како је Вијет искористио тригонометрију да реши несводљиви случај кубне једначине. Приметио је да он одговара проблему трисекције угла. Погледајмо на примеру његов општи метод.

Код Кардана је, као што знамо, разматрана једначина

$$x^3 = 15x + 4.$$

Идеја Вијета се састоји да се искористи формула

$$\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta.$$

У ту сврху, искористимо смену $x = \frac{y}{m}$ где ћемо m погодно изабрати. Почетна једначина се своди на

$$y^3 = 15m^2 y + 4m^3.$$

Уколико желимо да је $y = \cos\theta$ решење једначине (за непознати угао θ), онда m бирамо тако да је

$$15m^2 = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad 4m^3 = \frac{1}{4}\cos 3\theta.$$

Дакле, $m^2 = \frac{1}{20}$ и $m = \frac{1}{4}\cos 3\theta$. За m можемо да узмемо да је $m = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, не тражимо све m који то задовољавају. Стога је $\cos 3\theta = \frac{2}{5\sqrt{5}}$. Дакле, имамо:

$$3\theta = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \quad \text{или} \quad 3\theta + 2\pi = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \quad \text{или} \quad 3\theta + 4\pi = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right).$$

Дакле, за θ имамо три могућности:

$$\theta_1 = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right), \quad \theta_2 = \frac{1}{3}\left(\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) - 2\pi\right), \quad \theta_3 = \frac{1}{3}\left(\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) - 4\pi\right).$$

Но, $y = \cos\theta$, а $x = (2\sqrt{5})y$, те тако добијамо сва три реална решења. Наравно, друго је питање како препознати да је једно од ових решења једнако 4, али свакако јасно видимо три реална решења.

За крај напоменимо да Вијет ипак није извео Вијетове формуле. Наиме, у томе га је спречило његово избегавање негативних коефицијената и негативних решења. Добио је неке парцијалне резултате. На пример, разматрао је једначину

$$x^3 + b = 3ax$$

и добио везе

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = b, \quad x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 3a,$$

где су x_1 и x_2 нека два решења ове једначине (остављамо за вежбу читаоцима да ово изведу, приметимо да се треће решење добија из преостала два). Тек је Албер Жирар 1629. године нашао опште формуле које су нам данас познате као Вијетове. Жирар није избегавао ни негативна ни комплексна решења.

Откриће логаритама

Као што смо видели, адиционе формуле за тригонометријске функције су се користиле и за олакшавање рачуна, свођењем рачунања производа на збир. Шкотски властелин Џон Непер (1550–1617) је био изумитељ, промовисао је протестантизам, а математиком се бавио аматерски у практичне сврхе.

Слика 25: Џон Непер

Немачки алгебриста Штифел је направио таблицу у којој је исписао степене двојке:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512. \end{array}$$

Може се приметити да операцији сабирања у горњем (аритметичком) низу одговара операција множења у доњем (геометријском) низу. Мана је наравно у томе што је „покупљено” сувише мало бројева степенима двојке, степени су „ретко” распоређени. Да би то поправио, Непер уместо 2 узима број близак јединици, заправо број $1-10^{-7}=0{,}9999999$. Посматра степене $(1-10^{-7})^L$ тог броја, а да би избегао превише децимала, множи их са 10^7, те заправо посматра бројеве

$$N = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^L.$$

Дакле, ако је дат број N, број L је тај ЛОГАРИТАМ броја N. Термин ЛОГАРИТАМ Непер је увео у свом делу „Опис чудесних правила логаритама” објављеном 1614. године. Логаритам је добијен као комбинација речи logos (разум, однос, реч) и arithmos (број).

Дакле, ако су нам дати бројеви

$$N_1 = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_1} \qquad \text{и} \qquad N_2 = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_2},$$

онда је

$$\frac{N_1\cdot N_2}{10^7} = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_1+L_2}.$$

Према томе, ако је $L=\text{„log”}(N)$, онда је

$$\text{„log”}\left(\frac{N_1\cdot N_2}{10^7}\right) = \text{„log”}(N_1)+\text{„log”}(N_2).$$

Дакле, не трансформише се баш производ у збир, али до на померање децималног зареза то ипак имамо.

Како се могу правити логаритамске таблице за овакве логаритме? Ако је $N_n = 10^7\left(1-10^{-7}\right)^n$, онда имамо да је

$$\begin{aligned} N_n &= 10^7\left(1-10^{-7}\right)^n \\ &= N_{n-1}(1-10^{-7}) \\ &= N_{n-1}-10^{-7}N_{n-1} \end{aligned}$$

Дакле, имамо рекурентну везу $N_n = N_{n-1}-10^{-7}N_{n-1}$.

$$\begin{aligned} N_0 &= 10^7 = 10\,000\,000 \\ N_1 &= N_0 - 10^{-7}10\,000\,000 = 9\,999\,999 \\ N_2 &= N_1 - 10^{-7}N_1 = 9\,999\,999 - 0{,}9\,999\,999 = 9\,999\,998{,}000\,000\,1 \\ N_3 &= N_2 - 10^{-7}N_2 = 9\,999\,998{,}000\,000\,1 - 0{,}999\,999\,800\,000\,01 \\ &= 9\,999\,997{,}000\,000\,299\,999\,99. \end{aligned}$$

Заправо би он ипак заокруживао резултат, те је $N_3 = 9999997{,}0000003$. Непер је написао да је на овом свом делу радио 20 година.

Оксфордски професор Хенри Бригз (1561–1630) је 1615. године посетио Непера на његовом имању да продискутују и евентуално уведу нека побољшања. Сложили су се да је било добро да буде $\log 1 = 0$ и $\log 10 = 1$ (дакле, да то буде логаритам са основом 10). Неперов логаритам је заправо близак логаритму са основом e^{-1}, пошто је

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \sim e^{-1}$$

(како ми сада знамо). Непер је тада већ био старији, те је Бригз преузео тај задатак. Већ 1615. године, Бригз објављује „Логаритамске таблице" где су логаритми бројева од 1 до $20\,000$ и од $90\,000$ до $100\,000$ израчунати на 14 децимала. Холандски издавач Влак је допунио ове таблице 1618. године. Израчунао је логаритме за бројеве од $20\,000$ до $90\,000$ на 10 децимала, а наслов дела је био „Друго издање Бригзових таблица". Ове су таблице биле од великог значаја посебно за астрономе, јер су знатно скраћивале рачун.

Декарт

Слика 26: Рене Декарт (1596–1650)

Рене Декарт је рођен у градићу Ла Еј, који се налази око 300 километара југоисточно од Париза у провинцији Турен (данас се то место зове по њему). Отац му је био припадник нижег племства и обављао је дужност провинцијског судије. Са осам година Декарт је започео школовање у језуитској школи у Ла Флешу, где је првих пет година имао стандардне курсеве језика, класике, реторику, док су завршне три биле посвећене учењу логике, филозофије, физике и математике. Математика га је највише заинтересовала, пре свега због сигурности својих доказа. Он је од малена био осетљивог здравља и није се очекивало да ће дуго живети. Стога су му његови наставници у Ла Флешу дозвољавали да има неке привилегије које други ученици нису – могао је дуже да спава, није се очекивало да похађа сва предавања. Тај обичај дугог спавања задржао је целог живота.

По напуштању школе 1612. отишао је у Париз да ужива у друштвеном животу престонице. Но, брзо се тога заситио, посветио се изучавању математике. Мада није имао амбиција да има каријеру попут свог оца, ипак је уписао права на универзитету у Поатијеу 1616. Но, 1618. се, засићен учења, пријавио у војску као племић добровољац, најпре са холандским, а потом и са баварским трупама. Заправо и нема података о његовом стварном учешћу у ратовима, имао је и тада доста времена да се бави изучавањем онога што је желео. Године 1621. напушта војску и доста путује. Потом се настањује у Паризу, где 1628. довршава своје дело „Правила за изучавање духа", на латинском. Исте године одлази у Холандију и ту остаје да ствара наредних 20 година. Ту објављује и своја најзначајнија дела, од којих ће нама посебно бити важно чувено дело „Расправа о методу", односно трећи додатак тог дела – „Геометрија". Дело је објављено 1637. на француском и то је било помало неуобичајено, пошто је латински тада био универзални језик науке и филозофије. Заправо је у првом издању сама *Расправа* била на 78 страница, што је чинило једну шестину целе публикације. Ово је дело било врло популарно, донело је славу свом аутору, али не и зараду, пошто је Декарт, у накнаду за ауторска права тражио само 200 примерака да подели својим пријатељима. Но, штампарија је лепо зарадила.

Декартова филозофија систематске сумње, као што је овде изложена, доминира у његовој потрази за сигурним знањима. Сигурност у математичким извођењима га је, као што смо већ напоменули, одушевљавала и математика је, по њему, требала да буде модел за свако изучавање.

Дуги низ једноставног и лаког закључивања којима геометри долазе до њихових најтежих доказа ме је довела до тога да замислим да су све ствари, знање којих је доступно људском уму, међусобно повезане на исти начин и да нема ничег што је толико удаљено од нас да буде ван нашег домашаја, или тако сакривено да га не можемо открити, под условом да се уздржимо од прихватања погрешног за тачно и увек чувамо у нашим мислима ред неопходан за извођење једне истине из друге.

Декарта нису толико занимали математички резултати, но сам начин размишљања у математици. Почетна тачка је за њега била да открије најпростије идеје или принципе, оне у које се не може сумњати. Пошто је изгубио поверење у традиционална учења, Декарт жели да раскине са било каквим претходним ауторитетима у области науке и филозофије, да раскрсти са свим догмама и доктринама.

Сматрао сам да морам да одбацим као апсолутно погрешна сва мишљења у односу на која бих могао да имам и најмању сумњу да бих утврдио да ли после тога остаје ишта у мом веровању што је у потпуности неспорно.

Декарт је стога дошао до тврђења које је било толико чврсто да се не би могло довести у сумњу, до сигурности у сопствену егзистенцију. Наиме, сумња је сама по себи акт мисли, а мисли нема без мислиоца. Стога је он изрекао ту добро нам познату мисао: „Мислим, дакле јесам”. Потом је наставио да тражи друга тврђења која су такође очигледна и несумњива.

Никада не смемо дозволити да будемо убеђени у истинитост нечега сем на основу нашег разума.

Ово његово велико поверење у људски ум је покренуло велику расправу у Западном свету о односу вере и разума.

Расправа почиње кратким уводом.

Ако би се ова расправа учинила сувише дугом да се одмах прочита, може се поделити на шест делова. Тако ће се у првом делу наћи разноразна разматрања о наукама; у другом темељна правила методе коју је аутор истраживао; у трећем неколико правила о моралу до којих је аутор дошао помоћу ове методе; у четвртом разлози на темељу којих доказује постојање Бога и људске душе, а који чине основу његове метафизике; у петом низ питања из физике која је он истраживао и, посебно, објашњење о раду срца и неколико других проблема из области медицине, у шта спада и тумачење о разлици између наше и животињске душе, док ће у последњем наћи оно што аутор сматра потребним да би се у проучавању природе отишло корак даље, као, и на крају, разлоге који су га подстакли да пише.

Као што смо већ навели, постоје три додатка. Наведимо пар речи о прва два.

У „Оптици” се разматрају својства светлости, закон преламања светлости, анатомија људског ока, као и практична питања о облику сочива.

Други додатак „Метеорологија” је посвећен Декартовом објашњењу атмосферских појава, формирања снежних пахуља, величине и облика кишне капи, узроке грмљавине и муње, формирања дуге.

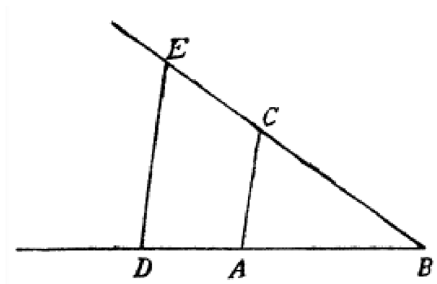
Трећи додатак „Геометрија” има три дела.

Први део носи наслов „Проблеми који се могу конструисати (решити) помоћу кругова и правих”.

Прва реченица гласи:

Сваки проблем у геометрији може се лако свести на такав облик да је познавање дужина неких дужи довољно за његову конструкцију (решење).

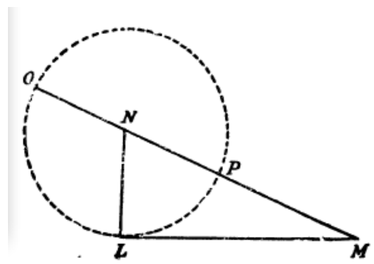
Декарт потом показује везу између аритметичких операција и геометријских конструкција. На пример, множење илуструје следећим цртежом.



Каже да се AB узима за јединицу (иначе наводи да се јединица може једном изабрати и то произвољно, после се све изводи на основу тог избора) и ако треба помножити BD са BC то ће се извести тако што само треба спојити A и C и нацртати DE паралелно са BC. Тада је BE производ BD и BC.

Као што видимо, он производ две дужи идентификује са дужи, не треба му правоугаоник за то. Стога он нема проблема са збиром $ab+c$, где су a, b и c дужи. Ипак, задржава у мислима и правило хомогености, па каже да сви изрази које сабирамо морају имати исту ‘димензију’, те ако имамо разлику $aabb-b$ онда морамо поделити $aabb$ јединичном дужином, а помножити b два пута јединичном дужином, дакле овде ипак своди све на три димензије. Но, и поред тога, велики је напредак да се дозвољава рачунање са различитим изразима, без обзира на ове додатне напомене, које и немају утицаја на сам рачун (можда је то стављено и због неке замишљене практичне примене где не можете сабирати квадратне и дужне метре, али није нам то важно).

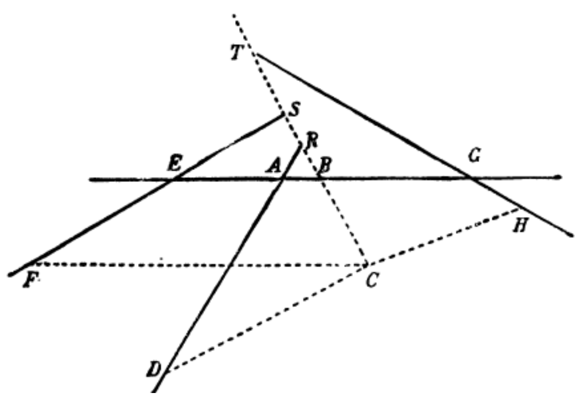
Приметили смо већ да није писао a^2, него aa, али јесте писао a^3. Још један пример његове симболике. Једнакост $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}=c$ би записао овако: $\sqrt{C.\, a^3-b^3+abb} \backpropto c.$ Дакле, кубни корен се означава са $C.$ унутар корена и нажалост не користи већ тада постојећи симбол за једнакост.



Објашњава геометријски како се решавају квадратне једначине. На пример, једначину $z^2 = az + b^2$, геометријски илуструје цртежом:

Овде је $ML = b$, а $OP = a$. Решење је $z = OM$. Игнорише негативно решење $-PM$.

Главна тема у овом делу је решавање Папусовог проблема о три, односно четири праве. Ради се о томе да се нађе геометријско место тачака за које је производ растојања (под одређеним углом) од две дате праве пропорционално квадрату растојања од треће, у случају да имамо три праве, односно пропорционално производу растојања од друге две. Ту видимо прави почетак аналитичке геометрије.



Декарт:

...покушаћу да дам доказ у неколико речи, пошто сам се већ уморио од толико писања (sic!).

Нека су AB, AD, EF, GH,... задате неке праве линије и нека се тражи да се нађе тачка C од које се друге праве линије CB, CD, CF, CH,... могу нацртати тако да формирају дате углове CBA, CDA, CFE, CHG... редом, са датим линијама и такве да је производ неких од њих једнак производу осталих, или бар тако да два производа имају задати однос, пошто овај услов не чини проблем ништа тежим.

Најпре ћу претпоставити да је ствар урађена, и како је толико много линија збуњујуће, могу да поједноставим рад тако што ћу изабрати једну од датих линија и једну од оних које треба нацртати (на пример, AB и BC) као главне линије, помоћу којих ћу покушати да остале изразим. Означимо дуж AB са x, а дуж BC са y...

Дакле, идеја је да се све остале релевантне дужи изразе преко x и y и да се потом формира једначина. У случају три (четири) праве добија се крива другог реда, док се у случају више правих добијају криве виших редова. Одмах треба рећи да Декарт не говори експлицитно о координатама (које је касније увео Лајбниц), нити обавезно сматра да се ове изабране, главне праве, секу под правим углом. Осим тога, x и y су му увек позитивни бројева. Дакле, нема правоуглог координатног система код Декарта. Но, видимо претечу координатног система и доста тога што уз то долази.

Други део *Геометрије* има наслов „О природи кривих линија". У њему Декарт говори о геометријским и механичким кривама (односно, како их од Лајбница називамо, алгебарским и трансцендентним). Од допушта посматрање и других (алгебарских) кривих сем правих, кружница, конусних пресека, уколико су оне задате на прецизан начин. А под тим подразумева да се оне добијају у пресецима две праве које се паралелно померају са самерљивим брзинама (дакле, раније разматрана трисектриса отпада, а и ми знамо да то није алгебарска крива). На тај начин се добијају праве чија је једначина $f(x,y)=0$, где је $f(x,y)$ полиномна функција.

Декарт разматра проблем налажења нормале (а тиме и тангенте) на криву у задатој тачки.

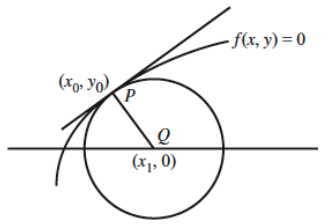
Овде ћу дати довољан увод у проучавање кривих када будем дао општи метод за цртање праве линије која заклапа праве углове са кривом у произвољној њеној тачки. И усуђујем се да кажем да је ово не само најкориснији и најопштији проблем у геометрији који ја знам, него и који икада желим да знам.

И поред похвалних речи о свом методу, ипак такво налажења нормала није најефикасније. Проблем је повезан са налажењем тангенте на криву у датој тачки, а метод за то је развио Ферма у отприлике исто време.

Позабавимо се Декартовим методом.

Нека је $f(x,y)=0$ једначина криве и нека се тражи нормала у тачки $P(x_0,y_0)$. Претпоставимо да је та нормала нацртана и нека сече изабрану x-осу у тачки $Q(x_1,0)$ (ми овде користимо наравно наше ознаке, укључујући и координате због лакшег записа). Једначина кружнице са центром у Q која пролази кроз P је

$$(x-x_1)^2+y^2=(x_0-x_1)^2+y_0^2.$$



Када елиминишемо y из ових једначина, добијамо једначину $g(x, x_1) = 0$ и бирамо x_1 тако да је x_0 двоструки корен ове једначине. Урадимо ово на примеру параболе $y^2 = ax$ у тачки (a, a). Једначина круга је

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (a - x_1)^2 + a^2.$$

Елиминисањем y из ове две једначине (постављањем $y^2 = ax$) добијамо

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (a - x_1)^2 + a^2,$$

односно

$$x^2 + (a - 2x_1)x + 2a(x_1 - a) = 0.$$

Како имамо двоструки корен, Декарт ову једначину изједначава са једначином $(x - r)^2 = 0$ за неко r (ми знамо да мора бити $r = x_0$). Стога мора бити

$$x^2 + (a - 2x_1)x + 2a(x_1 - a) = x^2 - 2rx + r^2,$$

те је $a - 2x_1 = -2r$, а $2a(x_1 - a) = r^2$. Но, како је $r = x_0 = a$, добијамо да је $x_1 = 3a/2$. Одавде се наравно лако добија једначина нормале, то је права кроз тачке (a, a) и $(3a/2, 0)$, а потом и једначина тангенте (права кроз (a, a) нормална на нормалу).

Ово је једноставан случај, али у случају сложенијих примера уочава се мана Декартовог метода који нема ефикасан општи начин за установљавање чињенице да ли полиномијална једначина

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

има двоструки корен r. Декарт то, у примерима у *Геометрији*, ради тако што горњи полином изједначи са полиномом

$$(x - r)^2 \left(b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n\right),$$

што доводи до доста рачунања. Ми данас знамо да је то повезано са првим изводом, но код Декарта тога нема.

Декарт у *Геометрији* изоставља многе ствари, не даје довољно објашњења. Стога је холандски математичар ван Схутен то дело превео на латински, додајући многа објашњења и оно је знатно обимније од оригиналног Декартовог дела. Било је више латинских издања овог дела. У издању 1659–1661. додат је погодан начин за одређивање двоструких корена који је развио ван Схутенов ученик Јоханеш Хаде (који је иначе био градоначелник Амстердама тридесетак година). Ево Хадеовог правила.

Уколико је r двоструки корен једначине

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n = 0,$$

онда је r такође корен једначине

$$a_0b_0x^n + a_1b_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_nb_n = 0,$$

где бројеви $b_0, b_1, \ldots, b_n$ чине аритметички низ. Остављамо читаоцима да провере да ли је ово тачно и ако јесте, зашто, а ми ћемо дати један пример. Посматрамо једначину

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

и узмимо аритметички низ $3, 2, 1, 0$. По Хадеу, ако је r корен ове кубне једначине, он је корен и једначине

$$3x^3 - 10x^2 + 8x = 0,$$

односно квадратне једначине

$$3x^2 - 10x + 8 = 0,$$

пошто је јасно да 0 није корен кубне. Један корен ове квадратне једначине је 2, а онда се може проверити да је он и корен кубне једначине, те је то заиста двоструки корен на основу Хадеовог правила.

Трећи део *Геометрије* носи наслов „О решавању просторних и натпросторних проблема”. Овај део је алгебарског карактера и тиче се решавањем алгебарских једначина трећег и виших редова.

Ту Декарт примећује да је $x = a$, корен једначине $f(x) = 0$, где је $f(x)$ полином, ако и само ако $x - a$ дели $f(x)$. Занимљиво је да негативне корене назива 'лажним' коренима („мање од ничега”). Истиче да горенаведена једначина може имати највише онолико решења колики је степен полинома $f(x)$, али каже да не морају сва решења бити реална, нека су „имагинарна”.

Овде налазимо и експлицитно формулисано правило знака (касније названо Декартово правило знака), то је раније било имплицитно (рецимо код Кардана). Наиме, ако имамо полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где је $a_0 > 0$, онда је број позитивних реалних корена једначине $f(x) = 0$ највише једнак броју промене знака чланова низа $a_0, a_1, \ldots, a_n$. На пример, код једначине

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

имамо коефицијенте $1, -4, -19, 106, -120$, чији су знаци $+, -, -, +, -$, те имамо три промене знака и закључујемо да имамо највише три позитивна корена. Декарт каже да једначина може имати највише онолико 'лажних' (негативних) корена, колико се пута појављују парови $+, +$ и $-, -$. У нашем случају, имамо једно појављивање, те имамо највише једна негативан корен. Заправо, овде су позитивни корени 2, 3 и 4, док је негативан корен -5.

Касније су му неки замерали да је тврдио да се тако тачно одређује број позитивних, односно негативних корена, но идеја је ипак да се да процена. Тачно је да има највише толико, а може да има паран број пута мање него што је број промене знака.

Разматра и одређивање рационалних нула и показује како се може смањити степен једначине. На пример, за једначину

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

примећује да је последњи, како каже, члан 64, дељив са $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$, те стога треба проверити да ли је тај полином дељив са $y^2 - 1$, $y^2 + 1$, y^2-2, y^2+2, y^2-4, итд. Открива да је дељив са y^2-16 и добија количник $y^4 + 8y^2 + 4$ (описујући детаљно поступак дељења).

Посебно је занимљив његов метод решавања једначине четвртог степена. Најпре наравно провери да ли можда може да је сведе на једначину нижег степена, тако што одреди неки корен, а ако не може, онда је редукује на облик у коме нема члана уз трећи степен (елиминише, како каже, други члан). И онда

... Уместо

$$+x^4.pxx.qx.r = 0$$

пишемо

$$+y^6.2py^4 + (pp.4r)yy - qq = 0.$$

О чему се овде ради? Наравно, он уместо, на пример x^2 пише xx и то смо оставили, знак једнакости који користи смо осавременили, а тачкица му означава знак, данас бисмо ту писали $\pm$. Но, одакле му та нова једначина? Ево у чему се ради.

Покушајмо да факторишемо $x^4 + px^2 + qx + r$ као производ два тринома

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + yx + m)(x^2 - yx + n).$$

Ово се може покушати зато што је коефицијент уз x^3 једнак нули. Добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} p &= n - y^2 + m \\ q &= yn - ym \\ r &= mn. \end{aligned}$$

Наравно, ако би имали $y = 0$, било би и $q = 0$, те би почетни полином био квадратни по x^2 (биквадратни како данас кажемо) и лако бисмо га факторисали. Стога, нека је $y \neq 0$. Из прве две једначиен добијамо

$$\begin{aligned} n + m &= y^2 + p && (10) \\ n - m &= \frac{q}{y}. && (11) \end{aligned}$$

Стога је

$$\begin{aligned} 2n &= y^2 + p + \frac{q}{y} && (12) \\ 2m &= y^2 + p - \frac{q}{y} && (13) \end{aligned}$$

, те је

$$4r = 4mn = 2m \cdot 2n = \left(y^2 + p + \frac{q}{y}\right)\left(y^2 + p - \frac{q}{y}\right) = y^4 + 2py^2 + p^2 - \frac{q^2}{y^2}.$$

Множењем са y^2 и сређивањем, добијамо једначину

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

Дакле, на тај начин се добија та помоћна једначина. То је кубна једначина по y^2 и ако можемо да нађемо неко њено решење, онда можемо да извршимо и тражену факторизацију. Погледајмо следећи пример.

Решити једначину

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0.$$

Помоћна једначина је

$$y^6 - 34y^4 + ((-17)^2 - 4(-6)) - (-20)^2 = 0,$$

односно

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0.$$

Посматрањем делиоца броја 400, добија се да бином $y^2 - 16$ дели горенаведени полином шестог степена, те заправо можемо за y узети $y = 4$ (нама треба једно y, не морамо тражити све могућности). Одатле добијамо $m = 2$ и $n = -3$. Стога имамо факторизацију

$$x^2 - 17x^2 - 20x - 6 = (x^2 + 4x + 2)(x^2 - 4x - 3),$$

а одавде и

$$x^2 - 17x^2 - 20x - 6 = (x+2-\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2})(x+2-\sqrt{7})(x+2+\sqrt{7}).$$

За вежбу препоручујемо читаоцима да реше једначину

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$$

овим методом.

Декарт је постао познат широм Европе и 1649. млада шведска краљица Кристина позвала га је да је учи филозофију. Такође је навела да би јој користила његова помоћ у формирању академије наука која би била конкурентна најбољим академијама у Европи. Он је на крају ипак прихватио њен позив, мада је дуго о томе размишљао, и на крају се то ипак показало као погубно по њега. Краљица је навикла да устаје рано, у 5 сати и тада је тражила да буду часови са њим. Осим тога, осећала је презир према хладноћи и просторије, у којима је Декарт у рано јутро, када није навикао да ради, с њом радио, нису биле ни грејане. Почетком фебруара 1650. године добио је прехладу, која се развила у упалу плућа и преминуо је после десетак дана.

Његове идеје из физике нису одговарале физичкој стварности, мада су у Француској покушавали да их одрже живим још неких педесетак година због националног поноса. Но, временом су, чак и у Француској, Њутнове идеје однеле примат.

Ферма

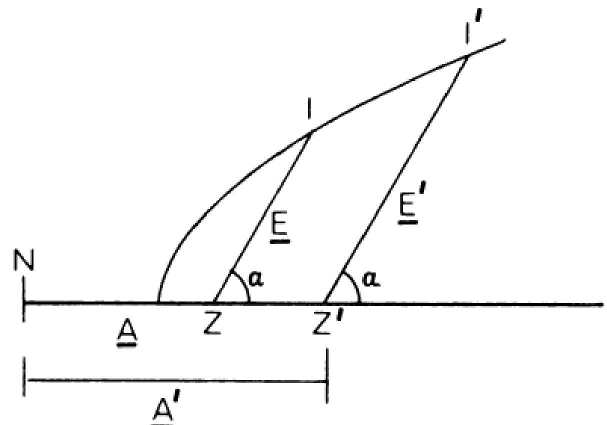
Пјер (де) Ферма (1601–1665) био је правник по образовању и имао је позицију саветника у Тулузу. По добијању позиције саветника, стекао је право да свом презимену дода „де”. Математиком се бавио уз своју професију. За Декарта је био „хвалисавац”, за Паскала „највећи математичар у целој Европи”, за Мерсена „учени саветник из Тулуза”, а за Валиса „тај проклети Француз”. Практично ништа није објављивао, но водио је интензивну кореспонденцију са многим математичарима, а и бележио своје идеје. Кореспонденција и ти његови записи су објављени касније.

Природно је да после Декарта говоримо о Фермау. Наиме, и Ферма је развио верзију аналитичке геометрије, чак и пре Декарта, но како знамо да није објављивао, то је имало мањег утицаја. Његове амбиције су биле мање, али је зато то урадио темељније. Посебно је, за разлику од Декарта, истицао да једначине одређују геометријско место тачака:

Сваки пут када се у завршној једначини нађу две непознате величине, имамо locus, чији крајеви описују линију, праву или криву.

Слика 27: Пјер (де) Ферма

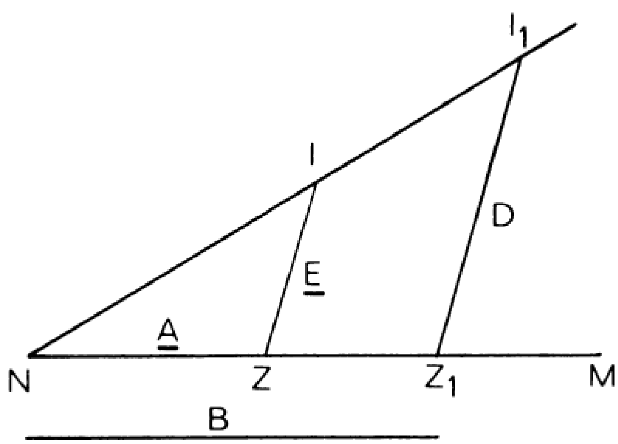
Ферма је ово разматрао са идејом да реконструише шта је то Аполоније могао урадити у свом делу „Раванска геометријска места тачака” на основу коментара Папуса (ово Аполонијево дело није сачувано). Ферма је то презентовао у краткој расправи „Увод у раванске и просторне locuse (геометријска места тачака)”. Био је под утицајем Вијета и користио је његову нотацију.



Слика 28: Крива задата једначином

На овој слици је мало модернизована верзија тога што је радио. На њој имамо представљено геометријско место тачака задато једначином $f(A,E)=C$, где је C Вијетова хомогена координата. Дакле, овде можемо N сматрати за координатни почетак, док би дужина дужи NZ ($\underline{A}$) одговарала x координати. Одмах напоменимо да је Ферма разматрао само позитивне координате. Од Z се повлачи дуж до позиције I и дужина дужи ZI ($\underline{E}$) би одговарало y координати. Ферма каже да $\underline{E}$ меримо од те прве фиксиране праве (заправо полуправе) под одређеним углом, за који ћемо најчешће узимати да је прав. Овде тај угао α није прав. Паралелним померањем дужи ZI и продужењем (као што овде имамо $Z'I'$) крајеви дужи I описују ту криву.

Следећа слика представља праву задату једначином, коју Ферма у Вијетовом стилу описује са $D\ in\,A\ ae\,B\ in\,E$ (за нас $Dx=By$, присетимо се да in означава множење, а ae једнакост): Он показује да крајеви



Слика 29: Права задата једначином

дужи ZI заиста описују праву, наравно на основу сличности троуглова, јер је $D:B=E:A$. Locus за општију линеарну једначину (сада ћемо ипак прећи на модерне ознаке) $ax+by=c^2$ скицира у 'првом квадранту' као дуж. Он истиче да је овако решио следећи проблем.

Ако је дат ма који број фиксираних правих у равни, locus тачака таквих да је сума дужина одсечака нацртаних под датим угловима до тачака на тим правама константна, јесте права линија.

Наравно, то нам је једноставно, добија се линеарна једначина и она представља праву линију.

У овој расправи је показао да једначина $xy=k^2$ даје хиперболу, да се једначина облика $xy+a^2=bx+cy$ може свести на претходну. За њега једначина $x^2=y^2$ представља једну праву (не узима негативне координате), заправо полуправу (опет — нема негативних координата). Показује да је $a^2 \pm x^2 = by$ парабола, да је $x^2+y^2+2ax+2by=c^2$ круг, $a^2-x^2=ky^2$ елипса и да је $a^2+x^2=ky^2$ хипербола за коју даје обе гране. После свега, истиче следећи став.

Ако је дат ма који број фиксираних правих у равни, locus тачака таквих да је сума квадрата одсечака нацртаних под датим угловима до тачака на тим правама константна јесте просторни locus.

Просторни locus је, наравно, конусни пресек. И ово наравно директно следи из његових анализа квадратних једначина. Као што смо и рекли, Ферма се бави једноставним проблемима, у односу на Декарта, који је био мотивисан тежим Аполонијевим проблемом, али више истиче то да једначина са две непознате одређује геометријско место тачака. У додатку свог „Увода” показује да се кубне и једначине четвртог степена (са једном непознатом наравно) могу решавати помоћу конусних пресека, што је добро нам позната тема.

Ово његово дело није објављено за његовог живота и стога је Декартова „Геометрија” била оно дело за које се сматра да је увело аналитичку геометрију. Фермаово дело, мада је објављено тек 1679. у „Varia opera mathematica”, а написано пре Декартовог, ипак је кружило као рукопис. Ферма је био свестан могућности аналитичке геометрије и за више од две димензије. Ево његових мисли о томе.

Постоје извесни проблеми који укључују само једну непознату и који се могу звати одређени, да би се разликовали од проблема locusa. Постоје други који укључују две непознате и који се никада не могу редуковати на једну непознату; то су проблеми locusa. У првим проблемима тражимо тачку, у другим криву. Али, ако предложени проблем укључује три непознате, онда треба наћи не тачку или криву, но целу површ. На тај начин се појављују површински locusi, итд.

У овом „итд.” постоји наговештај вишедимензионалне геометрије, али ако је Ферма заиста на то мислио, није се тиме нигде бавио. Заправо и тродимензиона геометрија је била прерана за то време, тек је озбиљно развијена у XVIII веку.

Неколико година касније, тридесетих година XVII века, Ферма се позабавио проблемом налажења (локалног) максимума, односно минимума. У делу „Метода налажења максимума и минимума”, које је објављено после његове смрти, он образлаже свој метод.

Уколико је x тачка локалног максимума или минимума, онда се вредности $f(x)$ и $f(x+E)$ за E мало, веома мало, разликују, дакле имамо да је $f(x+E) \approx f(x)$. Када скратимо исте чланове са обе стране, поделимо са E, потом поставимо да је $E=0$ и изједначимо леву страну са нулом, добијамо једначину која нам одређује ту тачку x. Овде практично имамо ситуацију да се у

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E},$$

поставља да је $E=0$, тј. да се тражи

$$\lim_{E\to 0}\frac{f(x+E)-f(x)}{E},$$

и потом то изједначава са нулом. Дакле, тражи се нула првог извода (подсетите се како гласи Фермаова теорема из Анализе 1). Но, ту ипак треба рећи две ствари. Најпре, наравно да појам лимеса није постојао, а осим тога, Ферма је говорио да треба онолико пута делити са E док E не нестане бар из једног члана. Дакле, није он баш био сигуран да је дељење само са E довољно. За пример је узео једноставан проблем: наћи тачку на дужи тако да правоугаоник формиран од дужи на које та тачка дели дату дуж има максималну површину. Заправо је посматрао максимум функције $f(x)=x(a-x)$. Дакле,

$$\begin{aligned}
f(x+E) &\approx f(x)\\
(x+E)(a-x-E) &\approx x(a-x)\\
x(a-x)+E(a-x)-xE-E^2 &\approx x(a-x)\\
E(a-x)-xE-E^2 &\approx 0\\
a-x-x-E &\approx 0\\
a-2x &= 0,
\end{aligned}$$

те наравно добијамо да је $x=a/2$ и решење је квадрат. Разматрао је и друге примере.

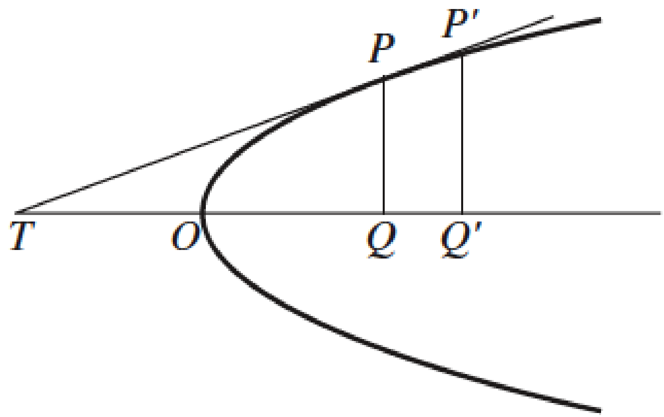
Тесно повезан са овим је и проблем налажења тангенте.

Ако је P тачка на кривој $y=f(x)$ (наравно користимо модерне ознаке) у којој се тражи тангента и ако су њене координате $(a,f(a))$, онда су координате тачке P' на кривој близу овој $(a+E,f(a+E))$ и та тачка је тако близу тангенти да се може сматрати да лежи на њој. Стога се може сматрати да су троуглови $\triangle TQP$ и $\triangle TQ'P'$ слични те је (овде је $c=TQ$):

$$\frac{f(a)}{c}\approx\frac{f(a+E)}{c+E}.$$

После унакрсног множења, скраћивања истих чланова, дељења са E и изједначавања E са нулом, налазимо c, а тиме и тангенту. На пример, ако имамо функцију $f(x)=-x^2+4x+7$ и тражимо тангенту у тачки са координатама $(1,10)$, добијамо

$$\frac{10}{c}\approx\frac{-(1+E)^2+4(1+E)+7}{c+E}.$$



Слика 30: Налажење тангенте на криву

После даљег сређивања добијамо

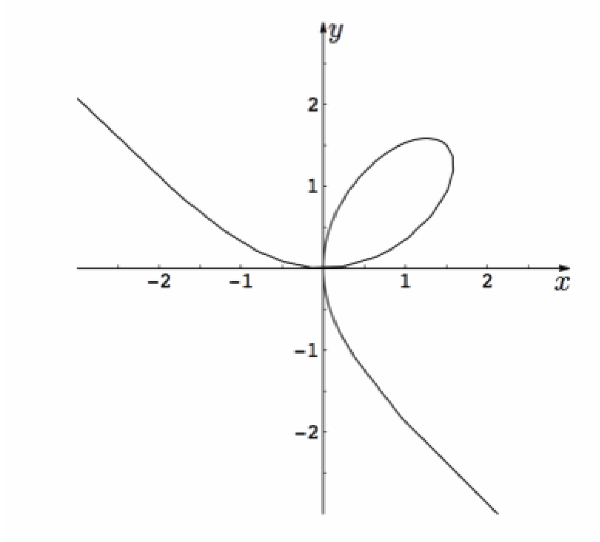
$$\begin{array}{rcl} 10c+10E & \approx & c(-1-2E-E^2+4+4E+7), \\ 10E & \approx & 2cE-cE^2 \\ 10 & \approx & 2c-cE \\ 10 & = & 2c, \end{array}$$

те је $c=5$.

Рене Декарт је за метод чуо од Мерсена 1638. године

Слика 31: Марин Мерсен

и сматрао је да не функционише за сложеније криве, на пример за криву која сада носи име по њему, а чија је једначина $x^3 + y^3 = 3axy$ („Декартов лист”).



Слика 32: Декартов лист

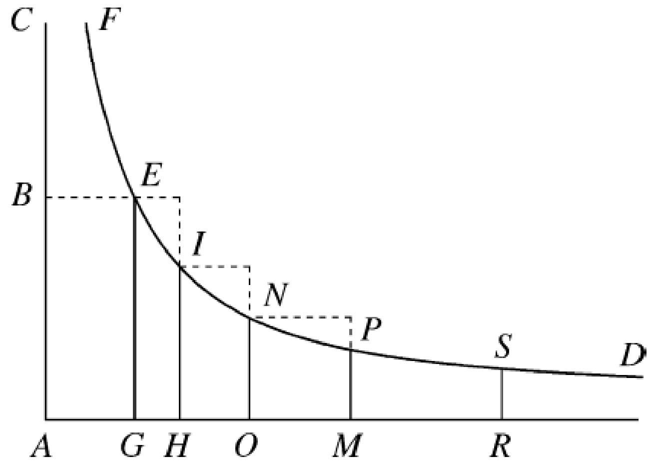
Но, Ферма је успео да и за тај случај покаже како се његовим методом може наћи тангента.

Он се интересовао и за проблем квадратуре, односно за налажење површине одређене неком кривом. На основу посредних доказа, може се закључити да је те резултате имао пре 1650. али их није објавио. Био је мотивисан да крајем педесетих година XVII века напише расправу о томе пошто се 1658. године појавила „Arithmetica infinitorum” Џона Валиса. У њој се може наћи и формула за налажење површине испод криве $y = x^{\frac{p}{q}}$, где је p/q рационалан број различит од -1. Ферма је у својој расправи објаснио како је он дошао до тог резултата и изнео неке критике Валисових резултата.

Ферма на почетку говори о методу који користи.

Архимед је користио геометријски низ само за квадратуру параболе... Ја сам препознао и показао да је оваква врста низа веома корисна за квадратуре и драге воље саопштавам модерним геометрима свој изум, који изводи квадратуре парабола и хипербола на сасвим сличан начин.

Он најпре показује како се може извести квадратура хиперболе $x^2y = 1$ (заправо он ради за било коју константу, ми ћемо, једноставности ради ставити да је то 1), потом параболе $x = y^2$ и коначно објашњава како се то може генералисати за било коју криву одређену једначином $x^m y^n = 1$, где су m, n цели бројеви, различити од 0 и нису оба једнаки 1. Ми ћемо детаљно показати како је он то извео за тај први случај.



Слика 33: Фермаова квадратура хиперболе

Ферма:

Размотримо хиперболу задату својством

$$\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{EG}{HI} \quad \text{и} \quad \frac{AO^2}{AH^2} = \frac{HI}{NO}, \text{ итд.} \tag{14}$$

Тврдим да је бесконачан простор чија је база EG и једна од страна крива ES, а друга је бесконачна асимптота GOR једнак датој правоугаоној површини.

Та дата „правоугаона површина” је површина правоугаоника $AGEB$. Најпре ћемо ово показати савременом нотацијом и ознакама, а онда Фермаову реализацију.

Нека је $a = AG$. Узмимо неки број $r > 1$ и тачке $G, H, O, M, \ldots$ чије су апсцисе, редом, $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$. Тада је $GH = ar - a$, $HO = ar^2 - ar$, $OM = ar^3 - ar^2$, …, док је

$$EG = \frac{1}{a^2}, \quad HI = \frac{1}{a^2 r^2}, \quad ON = \frac{1}{a^2 r^4}, \quad MP = \frac{1}{a^2 r^6}, \ldots$$

Збир површина означених правоугаоника је тада

$$EG \cdot GH + IH \cdot HO + NO \cdot OM + \cdots,$$

тј.

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}\cdot a(r-1)+\frac{1}{a^2r^2}\cdot ar(r-1)+\frac{1}{a^2r^4}\cdot ar^2(r-1)+\cdots &= \frac{r-1}{a}\left(1+\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\cdots\right)\\ &= \frac{r-1}{a}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{r}}=\frac{r}{a}.\end{aligned}$$

Но, када се r све више смањује ка 1, збир тих површина се сви више приближава површини испод криве. Уколико поставимо да је $r=1$, добијамо да је површина испод криве једнака $1/a$, док је површина правоугаоника $AGEB$ једнака

$$AG\cdot EG = a\cdot\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a},$$

тј. оно што је и тврђено.

Ево како је Ферма то заиста урадио. Он бира тачке $G,H,O,M\ldots$ тако да $AG,AH,AO,AM,\ldots$ чине геометријски низ што наводи овако:

$$\frac{AG}{AH}=\frac{AH}{AO}=\frac{AO}{AM}=\cdots \tag{15}$$

и каже да је то еквивалентно са

$$\frac{AG}{AH}=\frac{GH}{HO}=\frac{HO}{OM}=\cdots$$

(наравно, знамо да је $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ако и само ако је $\frac{a}{b}=\frac{c-a}{d-b}$). Ферма затим пореди односе површина правоугаоника:

$$\frac{EG\cdot GH}{HI\cdot HO}=\frac{EG}{HI}\cdot\frac{GH}{GO}=\frac{EG}{HI}\cdot\frac{AG}{AH}.$$

Но, с обзиром на својства хиперболе (14) и чињеницу да је $AH^2=AG\cdot AO$ (види (15))

$$\frac{EG}{HI}=\frac{AH^2}{AG^2}=\frac{AO}{AG}.$$

Стога је

$$\frac{EG\cdot GH}{HI\cdot HO}=\frac{AO}{AG}\cdot\frac{AG}{AH}=\frac{AO}{AH}=\frac{AH}{AG}.$$

Зато закључује да површине правоугаоника означених на слици такође представљају геометријски низ са количником $\frac{AH}{AG}$. Уместо да сумира геометријски низ по познатој му формули (познатој и Вијету, чија је дела пажљиво читао), он наводи следеће правило.

Уколико је дат геометријски низ чији чланови бесконачно опадају, разлика два узастопна члана овог низа се односни према мањем од њих исто као што се највећи члан низа односи према суми свих осталих.

Дакле, он каже да, ако је $a_1, a_2, a_3, \ldots$ опадајући геометријски низ, онда је $(a_1 - a_2) : a_2 = a_1 : (a_2 + a_3 + \cdots)$. Проверите ово. Ако суму целог низа површина означимо са S, онда по овом правилу имамо да је

$$\frac{EG \cdot GH - HI \cdot HO}{HI \cdot HO} = \frac{EG \cdot GH}{S - EG \cdot GH}.$$

Но,

$$\frac{EG \cdot GH - HI \cdot HO}{HI \cdot HO} = \frac{EG \cdot GH}{HI \cdot HO} - 1 = \frac{AH}{AG} - 1 = \frac{GH}{AG} = \frac{EG \cdot GH}{EG \cdot AG}.$$

Дакле, добијамо да је

$$S - EG \cdot GH = EG \cdot AG.$$

Но, када се однос $AH : AG$ чини све више близу 1, дакле када правоугаоници постају све ужи, тада се S приближава површини испод криве почев од тачке G, а површина $EG \cdot GH$ постаје све ближа нули (јер је GH све ближе нули). Стога је површина испод криве једнака површини правоугаоника $AGEB$.

Занимљиво је да, упркос чињеници да се бавио и питањем тангенте и питањем квадратуре, Ферма није експлицитно повезао те проблеме, тј. никада није указао на резултат попут Њутн-Лајбницове формуле.

Оно по чему је он сигурно данас познатији је по својим резултатима и хипотезама из теорије бројева. Сви његови резултати из ове области су наведени или на маргинама његовог примерка Диофантове „Аритметике" или у преписци са другим математичарима. Но, како његов примерак наведене књиге није сачуван (највероватније га је уништио његов син припремајући Фермаово дело за објављивање), остаје нам његова преписка по којој можемо проценити развој његових резултата из теорије бројева. Природно је ту преписку поделити у четири периода.

Први период се састоји искључиво од писама у години 1636. и састоји се од 10 писама. Но, разматра се ту само један резултат који заиста припада теорији бројева и наведен је у писму Робервалу. Састоји се у томе да се покаже да ако је x корен једначине $x^2 + 2(a+b)x = a^2 + b^2$, онда је x АПОТОМА(термин из Еуклидових „Елемената"), тј. разлика два броја који су несамерљиви. Видимо да се проблем лако своди (размотрите решење ове квадратне једначине) на питање да ли је неки рационалан број квадрат рационалног броја. Наравно, тога су били свесни и Ферма и Роберваl. Дакле, можемо да закључимо да се око године 1636. Ферма интересовао за врло елементарне проблеме у вези теорије бројева.

Други период односи се на године 1638–1644. Ово је, без сумње, био најплодоноснији период. Састоји се од 28 писама. Почиње писмом упућеном Мерсену, а намењеном заправо Сен-Кроау. У овом писму су наведени следећи ставови

1. Површина правоуглог троугла не може бити квадрат.

2. Једначине $x^4 + y^4 = z^4$ и $x^3 + y^3 = z^3$ су немогуће за рационалне бројеве, као ни систем $x^2 + y^2 = z^2$, $z^2 + y^2 = l^2$.

3. Сваки број је сума три троугаона броја, четири квадрата, пет петоугаоних бројева, итд.

4. Ниједан број облика $8k-1$ није квадрат, нити је сума два квадрата или три квадрата.

Кратак коментар је на месту. Наравно, у случају првог проблема мисли се на правоугли троугао чије су странице рационални (заправо можемо сматрати да су и цели) бројеви. За други проблем заправо Ферма не тврди експлицитно да су то нерешиве једначине, него их више поставља као изазов Сен-Кроау.

Видимо огромну разлику у нивоу проблема у размаку од само 18 месеци (од краја 1636. године). По свему судећи је Ферма до 1638. године открио метод бесконачног спуштања. Та идеја је постојала и раније, али ју је он довео да озбиљног метода. Укратко, она се састоји у томе да се покаже да не постоји природан број са неким својством тако што се из претпоставке да он постоји, закључује да онда мора постојати и мањи од њега са тим истим својством. Како не можемо имати бесконачан опадајући низ природних бројева, добијамо контрадикцију.

Илуструјмо то на једном једноставном примеру — покажимо да $\sqrt{3}$ није рационалан број (наравно да нам тај метод за ово свакако није потребан). Претпоставимо да је

$$\sqrt{3} = \frac{a_1}{b_1},$$

где су a_1 и b_1 позитивни и узајамно прости природни бројеви. Приметимо да важи једнакост

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Добијамо

$$\frac{1}{\frac{a_1}{b_1}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

те је

$$\sqrt{3} = \frac{2}{\frac{a_1}{b_1}-1} - 1 = \frac{2b_1}{a_1-b_1} - 1 = \frac{3b_1-a_1}{a_1-b_1}.$$

Нека је $a_2 = 3b_1 - a_1$, а $b_2 = a_1 - b_1$. Како је свакако $a_1 > b_1$ и $a_1 < 2b_1$, то су и a_2 и b_2 природни бројеви. Приметимо да је

$$a_2 < a_1 \text{ акко } 3b_1 - a_1 < a_1 \text{ акко } 3b_1 < 2a_1 \text{ акко } \frac{a_1}{b_1} > \frac{3}{2} \text{ акко } 3 > \frac{9}{4} \text{ акко } 12 > 9,$$

а

$$b_2 < b_1 \text{ акко } a_1 - b_1 < b_1 \text{ акко } a_1 < 2b_1,$$

те је $a_2 < a_1$ и $b_2 < b_1$. Тако добијамо опадајуће низове природних бројева и закључујемо да $\sqrt{3}$ није рационалан број.

У писму нумерисаном под бројем XL, упућеном Мерсену највероватније у јуну 1640. године налазимо формулацију (у специјалном облику) става, који данас знамо као Мала Фермаова теорема. Наиме, Ферма наводи да је открио три лепа резултат (не без труда). Најпре да је $2^n - 1$ сложен број уколико је n сложен, да је $2^n - 1$ конгшруентан са 1 по модулу $2n$ уколико је n прост и да су у том случају прости делитељи броја $2^n - 1$ облика $2nk + 1$. На пример, $2^{11} - 1 = 2047$ и $89 \mid 2047$, при чему је 89 прост број облика $2 \cdot 11 \cdot 4 + 1$. Такође је навео да је открио да је број $2^{37} - 1 = 137\,438\,953\,471$ дељив простим бројем $223 = 2 \cdot 37 \cdot 3 + 1$.

Његов почетак бављења квадратним формама може се приметити такође у писмима Робервалу и Мерсену исте године. Он ту наводи да је показао да ако је $n = p^2 + q^2$, где су p и q природни бројеви, онда n нема прости делилац облика $4k - 1$.

У писму XLIII намењеном Френиклу, највероватније из августа 1640. пише:

Готово сам уверен да је $2^{2^n} + 1$ прост број за сваки број n. Још немам доказ за то, али сам искључио велики број делилаца ...

Ојлер је касније показао да $641 \mid 2^{2^5} + 1$, тако да ова Фермаова слутња није била добра. Прости бројеви овог облика се називају Фермаови прости бројеви, но сем оних који се добијају за $n = 0, 1, 2, 3, 4$, други нису познати. Они се појављују у разматрању проблема конструкције правилних n-тоуглова помоћу лењира и шестара.

Уследио је период од 10 година без размене резултата из теорије бројева. Трећи период се односи само на август и септембар 1654. године (није лоше споменути да је 1653. године Ферма преживео кугу, да је чак погрешно јављано и о његовој смрти) и два писма Паскалу. Поново истиче да је уверен да су бројеви облика $2^{2^n} + 1$ прости, но у другом писму најављује и следеће резултате/проблеме.

1. Сваки број је састављен од три троугаона, четири квадратна, пет петоугаоних и шест шестоугаоних бројева (ово је теорема из 1638. године).

2. Да би се добила претходна теорема, треба показати да је сваки прост број облика $4k + 1$ збир два квадрата.

3. За дати број наведеног облика, наћи квадрате на које се раставља.
4. Сваки прост број облика $3k+1$ је облика x^2+3y^2.
5. Сваки прост број облика $8k-1$ или $8k+3$ је облика x^2+2y^2.
6. Не постоји троугао чије су странице цели бројеви, а чија је површина потпун квадрат.

Четврти период почиње писмом од 3. јануара 1657. године. Оно је упућено једном париском математичару, али је намењено да се упути другим математичарима и у другим земљама. Састоји се од два проблема.

1. Наћи такав куб који додат збиру свих својих правих делилаца даје потпун квадрат. На пример, $343 = 7^3$, сви прави делиоци од 343 су 1, 7 и 49, а $343+1+7+49 = 400 = 20^2$. Наћи остале кубове који ово задовољавају.
2. Наћи све квадрате који додати свим својим правим делиоцима чине куб.

Посебно је изазов упућен Џону Валису у Енглеску, али он није показао интерес за то. Сматрао је да се ради о појединачном проблему иза кога не стоји нека озбиљна теорија.

Најзначајније писмо из овог периода је упућено Каравију у августу 1659, а заправо је намењено Хајгенсу. У њему се наводе неки проблеми од раније, али и нова два.

1. Показати да једначина $y^2+2 = x^3$ нема других решења до $x = 3, y = 5$.
2. Показати да једначина $y^2+4 = x^3$ нема других решења до $x = 2, y = 3$ и $x = 5, y = 11$.

У овом писму Ферма поново говори о проблему да се покаже да се сваки прост број облика $4k+1$ може приказати као збир два квадрата. Говори да је то показао методом бесконачног спуштања — да је из претпоставке да постоји неки прост број који је тог облика, а није сума два квадрата, он успео да нађе мањи такав, те се на крају то своди да најмањи такав број, тј. 5 није сума два квадрата, што он очигледно јесте. Но, није дао никакву назнаку о томе како се конструише такав мањи прост број.

Прегледом Фермаове кореспонденције може се констатовати да ни у једном писму он није споменуо да има решење проблема, који је постао познат као Фермаов последњи проблем, или Велика Фермаова теорема: не постоје позитивни цели бројеви x, y, z такви да је $x^n+y^n = z^n$

ни за једно $n \geqslant 5$. Навео је на више места да ти бројеви не постоје за $n=3$ и $n=4$, али никада, сем на маргинама свог примерка Диофантове „Аритметике” није писао о том општем проблему. На маргинама је написао да има изванредно решење, али да су маргине мале да га испише. Тако да се може са великом сигурношћу констатовати да није имао решење овог проблема ни за једно $n>4$.

Главни метод који је Ферма користио у свом раду на проблемима из теорије бројева је био метод бесконачног спуштања. Покажимо како је он тај метод применио да покаже да једначина

$$x^4 + y^4 = z^2$$

нема решење у природним бројевима (из чега следи и Велика Фермаова теорема за $n=4$).

Претпоставимо да решење постоји и да је z најмањи број чији се квадрат разлаже на суму два четврта степена. Јасно је да су тада x, y, z пар по пар узајамно прости бројеви. Од старих времена је познато правило за Питагорине тројке. Сигурно је један од бројева x, y паран. Наиме, ако би оба били непарни, онда би број x^4+y^4 био паран број који није дељив са 4, а такав број не може бити потпун квадрат. Уколико претпоставимо да је y паран, добијамо да је, за неке бројеве A, B:

$$x^2 = A^2 - B^2, \quad y^2 = 2AB, \quad z = A^2 + B^2.$$

Како су x и y узајамно прости, то су и A и B узајамно прости. Претпоставимо да је B паран. Тада мора бити $A=a^2, B=2b^2$ за неке a, b. Добијамо

$$x^2 + (2b^2)^2 = A^2 - B^2 + B^2 = A^2 = a^4.$$

Ако сада на Питагорину тројку $(x, 2b^2, a^2)$ применимо горенаведени резултат, добијамо да постоје узајамно прости C и D такви да је

$$2b^2 = 2CD, \quad a^2 = C^2 + D^2.$$

Из чињенице да је CD потпун квадрат и да су C и D узајамно прости, следи да је $C=c^2$ и $D=d^2$ за неке c, d. Тада је

$$c^4 + d^4 = a^2.$$

Но, јасно је да је $a<z$:

$$z = a^4 + (2b^2)^2 > a^4 \geqslant a.$$

На основу принципа бесконачног спуштања резултат следи.

Ферма свакако није био професионални математичар, а ни његови манири нису били такви. Јесте желео признање, али није желео да објављује радове, није желео да их сређује да буду до краја прецизни и да се могу објавити и издржати критику. Но, и поред тога, за његове резултате се не може рећи да су аматерски ако под тим подразумевамо да су произвољни, слаби и нејасни. Имао је и грешака, али то је нормално. Свакако је утицао у значајној мери на развој математике. Сам Фермаов последњи проблем је био велики мотив за развој теорије бројева. Ендрју Вајлс га је решио 1994. године и доказао да је Фермаова претпоставка била тачна.

Ка Calculusu

Инфинитезимални методи до Њутна и Лајбница

Мертоновско правило, ширина форме

У средњем веку можемо да истакнемо идеје „ширине форме” као претечу и координатног система и Calculusa. Схоластички филозофи су дискутовали могућност квантификације форми, што је Аристотелов концепт, који практично одговара појму функције. Наиме, то је квалитет (нечега) који је променљив, као што су то брзина, температура, густина. Разматрано је питање повећавања и смањивања (intensio и remissio) интензитета форми. Интензитет форме се разликује од њене екстензије: брзина, температура, густина су интензитети, док су пређени пут, топлота, маса – екстензије.

Група филозофа схоластичара у XIV веку на Мертон Колеџу у Оксфорду

Слика 34: Мертон Колеџ

разматрала је степен промене, као и степен промене степена промене форми, наравно без формула, вербално, уз дозу не само филозофије, него и мистицизма. Сва кретања се деле на равномерна (униформна)

у којима се у сваком делу времена исто растојање пређе

и неравномерна („диформна”)

Неравномерно кретање је оно у коме се више растојања пређе у неком делу времена, а мање у неком другом.

Осим тога, неравномерна кретања су класификована у равномерно неравномерна и неравномерно неравномерна, а наравно тако се може и даље ићи.

Неко кретање је равномерно убрзано уколико у истим деловима времена постиже исто повећање брзине.

Установљено је „мертоновско правило”:

Кад год постоји равномеран раст локалног кретања, локално кретање је равномерно неравномерно кретање. Како оно по свом резултату одговара средњој вредности, очигледно је да се исти пут може прећи равномерним кретањем у средњој вредности као и равномерно неравномерним кретањем.

Наравно, ово нам каже да, ако је v_p почетна, а v_z завршна брзина, онда се исти пут прелази уколико се све време иде средњом брзином $v_s = \frac{v_p + v_z}{2}$. Навођено је више доказа, неки су укључивали и рад са бесконачним редовима!

У Паризу се овим питањима бавио Никола Орезм (око 1323–1382).

Графички приказ функције се први пут појављује у делу Ђованија ди Касала 1346, али Орезм је то значајно озбиљније урадио. Ево шта он говори.

(а) У вези квалитета се две ствари могу представити, наиме *intensio per gradum* и *extensio per subjectum* и стога се квалитет може видети у две димензије.

Из ових разлога се понекад каже да квалитет има дужину и ширину уместо интензитет и екстензију.

(б) Квалитет се може замислити да припада тачки или недељивом субјекту, као што је душа, али такође и линији и чак и површи и телу.

Закључак 1: Квалитет тачке или недељивог објекта може се представити линијом, пошто има само једну димензију, наиме интензитет. Одавде следи да такав квалитет као што је знање или врлина, не може бити униформно или диформно, као што се и за линију не каже да је униформна или диформна. Такође следи да се не може позивати на ширину знања или врлине, пошто јој се не може придружити дужина, јер свака ширина претпоставља и дужину.

Слика 35: Никола Орезм

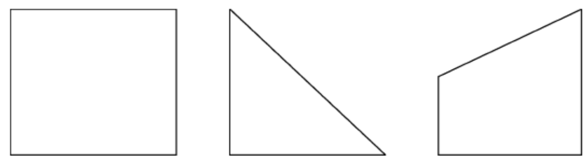
Закључак 2: Квалитет линије се може представити помоћу површи, чија је дужина праволинијска екстензија субјекта, а ширина је интензитет, који је представљен нормалама подигнутим на линију субјекта.

Закључак 3: Слично се квалитет површи може представити телом ...

Но, некоме може бити сумњиво: ако се квалитет линије овде представља помоћу површи, а квалитет површи помоћу тела које има три димензије, квалитет тела ће, без сумње, бити представљен нечим што има четири димензије...

Он затим тврди како није потребно уводити четири димензије, позивајући се на неке Аристотелове расправе. У сваком случају, видимо идеју графика функције једне и две променљиве, и назнаку графика функције и три променљиве. Видимо да је постојао велики отпор разматрању више од три димензије и то је потрајало још вековима.

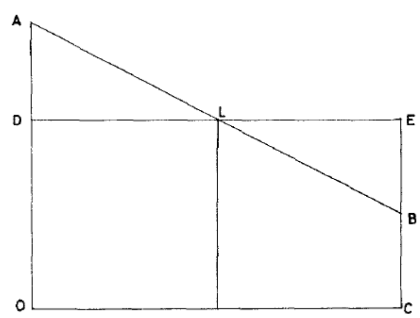
Орезм графички показује разлику између униформних форми, које су представљене правоугаоницима и униформно диформних форми које су представљене правоуглим троугловима (ако се, на пример, представља равномерно убрзано кретање почев од мировања или које представља равномерно успорено кретање до заустављања) или трапезима.



Слика 36: Униформне и униформно диформне форме

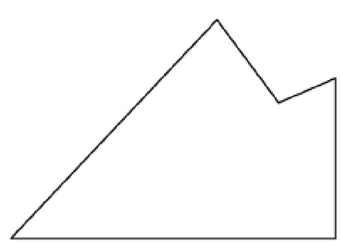
Његов *Закључак* 5 је заправо мертоновско правило.

Закључак 5: На основу претходног се може доказати да је униформно диформан квалитет једнак средњем степену, тј. подједнако је велики као што би униформан квалитет био у средњој тачки и ово се може овако показати.



Слика 37: Мертоновско правило код Орезма

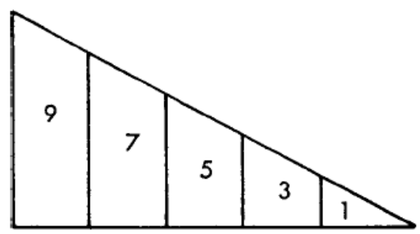
Илуструје и диформно диформне квалитете:



У делу „Питања о Еуклидовој геометрије", у којима се могу наћи и претходна разматрања, у оквиру 14. питања, он заправо показује да је пређени пут при равномерно убрзаном кретању пропорционалан квадрату времена (дакле, пре Галилеја). Он ту говори о 'квалитетима', али се то наравно може пренети на закључак који смо навели.

> ... сваки униформно диформни квалитет ... за чији субјект замислимо да је подељен на неки број делова треба означити квадратом броја који представља број делова на који је субјект подељен.

И илуструје то овако (примећује да је збир $1+3+5+7+9=5^2$, а лако се можемо уверити, рецимо дељењем на троуглове подударне најмањем троуглу, да је однос ових површина заиста као на слици):



Слика 38: Пређени пут по равномерно убрзаном кретању је пропорционалан квадрату протеклог времена

Орезм се бавио и сумирањем редова. На пример, у делу „Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum" геометријски је показао да је

$$1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 3+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdot n+\cdots=4.$$

На другом месту је показао да хармонијски ред

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

нема коначну суму. Наиме, груписао је чланове на погодан начин: трећи и четврти су у збиру $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$, а то је веће од $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. Збир следећа четири је такође већи од $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$. Тим груписањем се показује неограниченост суме. Заправо такав доказ и данас користимо.

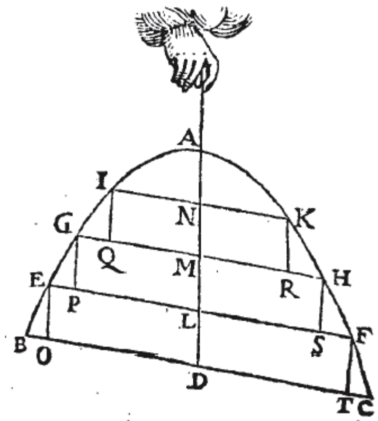
Стевин

Слика 39: Статуа Симона Стевина у Брижу

Са Симоном Стевином (1548–1620) заиста почињу примене метода које су водиле ка Calculusu и које су представљале напредак од Архимедових резултата. То се постигло и тако што се мање инсистирало на строгости. По свему судећи, то је био једини начин да се некако крене даље и то је на крају и довело до значајних резултата који су најзад добро засновани тек крајем XIX veka.

Стевин је био фламански инжењер и математичар из Брижа. Путовао је по Европи, а радио је и у другим градовима садашње Белгије и Холандије. Овде ћемо приказати како је показао да се тежиште параболе налази на дијаметру параболе (који садржи тачку у којој је тангента паралелна тетиви – подсетите се квадратуре параболе код Архимеда).

Најпре да наведемо да је раније констатовао да је, ако фигура има центар симетрије, то уједно и њено тежиште. Стога зна где се налази тежиште једнакостраничног троугла, паралелограма. Касније је показао за било који троугао, а доказ је врло сличан овоме који следи.



Слика 40: Стевиново одређивање тежишта параболе

Дакле, он најпре подели AD на четири једнака дела AN, NM, ML, LD. Постави паралеле тетиви BC кроз тачке N, M, L и онда кроз добијене пресеке са параболом постави паралеле дијаметру AD. Тако добије фигуру коју чине три паралелограма са слике: $EFTO$, $GHSP$ и $IKRQ$. Како зна да тежиште паралелограма $EFTO$ лежи на LD, тежиште $GHSP$ на ML и тежиште $IKRQ$ на NM, констатује да тежиште те фигуре лежи на AD. Потом примећује да може даље да дели AD, тако да сваки од већ постојећих дужи дели на пола и формира нову фигуру од нових паралелограма. Но, види се да се та фигура све више и више поклапа са одсечком параболе, односно да се остатак може учинити произвољно малим ако се процес настави. Резонује на следећи начин.

А. Поред ма којих различитих тежина може се ставити тежина мања од њихове разлике.

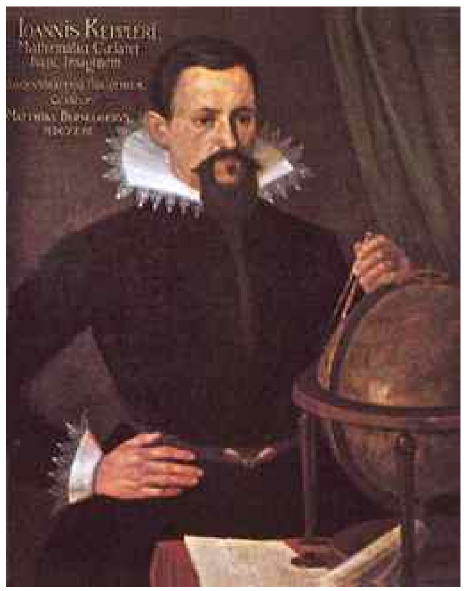
О. Поред наведених тежина ADC и ADB не може се ставити тежина мања од њихове разлике.

О. Стога се ове тежине ADC и ADB не разликују.

Видимо да је закључивање формирао у облику силогизма. Дакле, уместо да иде на доказ свођењем на апсурд као код Архимеда, он овако закључује. Дакле, пошто делови ADC и ADB имају исту тежину, закључује да је AD вертикална дуж ако се фигура „окачи” о A, те је тежиште негде на AD. Даље он установљава и где се налази тежиште (оно дели AD у односу $3:2$). Овде се нисмо бавили неким додатним разматрањима у његовом доказивању, само смо се фокусирали на главну идеју. Овај метод он примењује у низу извођења. Свакако је желео да истакне да је оно што ради ваљано са логичке тачке гледишта, мада није као код Архимеда. Присетимо се да Архимедов „Метод” у коме је он показивао како је користио механичке аргументе за доказ геометријских чињеница, у то време није био доступан.

Кеплер

Јохан Кеплер (1571–1630)



Слика 41: Јохан Кеплер

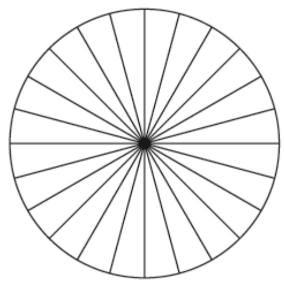
нам је, наравно, највише познат као астроном. Но, питања којима се бавио у астрономији захтевала су и математику. Имао је занимљиву идеју у вези конусних пресека. Он је сматрао да има пет врста коника, које су све припадале истом роду. У свом раду из оптике из 1604. истакао је принцип непрекидности. Наиме, од конусног пресека који се састоји од две праве које се секу и у којој се жиже поклапају у тачки пресека, постепено, преко бесконачно много хипербола у којима се жиже све више и више раздвајају, долазимо до параболе за коју је такође сматрао да има две жиже, али једну од њих у бесконачности. Потом се жиже преко фамилије елипси поново приближавају једна другој док се на крају не идентификују када се добије круг. Та његова идеја о тачки у бесконачности касније је боље реализована у Дезарговој геометрији.

Кеплер је нашао и примене за бесконачно мале у својој астрономији. У делу „Нова астрономија” навео је своја прва два закона.

1. Планете се крећу око Сунца по орбити која је елипса и у којој се Сунце налази у једној од жижа.

2. Радијус вектор који спаја Сунце и планету пребрише једнаке површине за једнако време.

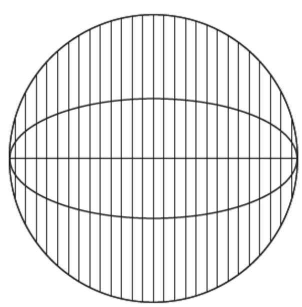
Дакле, овде му је било потребно разматрање површина и о њима је мислио као о бесконачном броју троуглова чије је једно теме у жижи, а друга два су бесконачно блиска на елипси. Тако он изводи и површину круга.



Слика 42: Површина круга по Кеплеру

Ако рачунамо површину малих криволинијских троуглова као $\frac{1}{2}r \cdot l_i$, где је l_i дужина тих малих лукова, онда када саберемо све површине, уз констатацију да је збир тих лукова једнак обиму круга, добијамо да је површина $\frac{1}{2}rO$, где је O обим круга.

Да би показао да је површина елипсе једнака πab, где су a и b полуосе, он, у духу Орезма, посматра круг као унију вертикалних дужи, сабирањем чијих се дужина добија површина. Но, елипса се добија 'сабијањем' круга дуж ординате у односу $b : a$



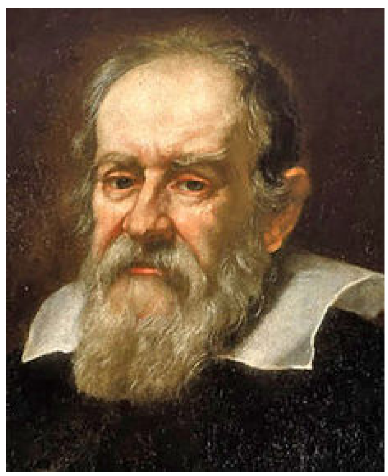
Слика 43: Површина елипсе по Кеплеру

те се тако добија да је површина елипсе чије су полуосе a и b једнака

πab (површина круга је πaa, а онда имамо промену једне осе). Јасно да су ова размишљања далеко од коректних, али већ смо рекли да је то било неопходно да би развој математике пошао даље.

Кеплер се, осим посла дворског астронома, бавио и другим пословима. Наравно да је састављао и хороскоп, а године 1615. је издао дело у коме се бавио запреминама разних тела (мотивисан питањима запремине винских бачви). То су била тела која су настајала разним ротацијама око разних оса конусних пресека, чак 92 тела су ту разматрана. Назив дела је био „Нова стереометрија винских бачви". Разматрања су била попут претходних и те идеје су систематски унапређене 1635. у значајној књизи „Геометрија недељивих" Галилејевог ученика Бонавентуре Кавалијерија.

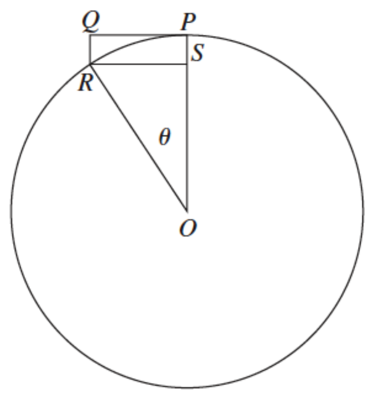
Галилеј



Галилео Галилеј (1564–1642) није био математичар per se, али је у својим делима користио математику, па и идеје бесконачно малог и бесконачно великог. Прво његово значајно дело „Два главна система" објављено је 1632. на италијанском и посвећено је астрономији. Написано је у форми разговора три човека – Салвијатија (научник, практично представља Галилеја), Сагреда (образовани аматер) и Симплиција (или Симпликија, што је правилнији изговор) (филозоф који је чврсто бранио Аристотелов поглед на свет), а бавило се Птолемајевим и Коперниковим погледом на Сунчев систем. Друго дело, „Две нове науке" објављено је 1638. такође на италијанском и оно је било посвећено физици, конкретно динамици и јачини материјала. Исти ликови су се и овде појавили и разговарали о тим темама.

Галилеј је показао да је путања пројектила парабола, растављајући његово кретање на две компоненте – хоризонталну и вертикалну, узроковану гравитацијом. Но, Галилеј је мислио да је и ланчаница (крива коју обликује ланац или канап када се окачи о две тачке) такође парабола (касније је утврђено да се ради о функцији косинус хиперболички). Бавио се и проблемом одређивања површине испод једног лука циклоиде, али није успео да дође до резултата.

У делу „Два главна система" појављује се дискусија о бесконачно малим величинама различитих редова. Наиме, Симпликије је као аргумент који се противи Земљиној ротацији тврдио да ће тела у том случају бити избачена са Земље у правцу тангенте на ротациону путању, а Салвијати је објашњавао да се ту ради о бесконачно малим величинама различитог реда.



Слика 44: Бесконачно мале величине код ротације Земље

Наиме, када се изврши ротација за (бесконачно) мали угао θ, онда је потребно да тело „падне" за QR да би остало на Земљи, а то је бесконачно мала величина вишег реда у односу на лук $\widehat{PR}$ (или на PQ). Ми сада можемо да се лако уверимо у то: $OS = OR\cos\theta$, $PQ = OR\sin\theta$, је $QR = OR(1-\cos\theta)$, те $\frac{QR}{PQ} \to 0$, када $\theta \to 0$.

У делу „Две нове науке" појављује се и резултат који говори да постоји бијекција између свих природних бројева и свих бројева који су потпуни квадрати. Нажалост, Салвијати (што значи Галилеј) није у стању да савлада проблем у коме се чини да је део једнак целини, но разрешава проблем тако што каже да појмови 'веће', 'мање', 'једнако' немају смисла за бесконачне скупове. Чак не дозвољава да се они упоређују са коначним скуповима. Требало је више векова да се ово ваљано разреши у оквиру теорије скупова.