Алгебра у ренесансној Италији; Вијет; откриће логаритама; Декарт

Зоран Петровић

2. април 2024. године

Лука Паћоли

Лука Паћоли (1445–1517)

Слика 1: Лука Паћоли

написао је значајно дело *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*. Оно је написано на италијанском, не на латинском, 1487. године, а штампано је у Венецији 1494. Он је користио напреднију алгебарску нотацију од Леонарда. То је опет варијанта скраћеничке алгебре. За квадратни корен је користио ознаку R (Radix), или $R2$, а за кубни $R3$. Четврти корен је био RR, или $R4$. Непозната у једначини се означавала са co. (cosa, ствар), њен квадрат са ce. (censo), куб са cu. (cubo), четврти степен са ce.ce.. Ако би постојала још једна непозната, она би се звала quantità. За сабирање се користила ознака p, а за одузимање m. На пример,

$$\sqrt[3]{34-\sqrt{12}}$$

би се писало као

$$R3V34\tilde{m}R12.$$

Ознака V показује да се корен односи на све иза њега (*V=U=Universale*) и од тог слова се развила ознака за корен:

$$R3V34\tilde{m}R12 \quad\rightarrow\quad \sqrt[3]{}\overline{34-\sqrt{12}} \quad\rightarrow\quad \sqrt[3]{34-\sqrt{12}}.$$

На крају књиге је написао да је за једначине у којима се појављују

numero, cosa e cubo;
numero, censo e cubo;
numero, cubo e censo de censo

за сада нико није успео да формира општа правила. Дакле, овде се ради о једначинама трећег и четвртог степена.

Решавање једначина трећег степена

Сваку једначину трећег степена

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

сменом $x=y-\frac{a}{3}$ сводимо на:

$$\left(y-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(y-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(y-\frac{a}{3}\right)+c=0,$$

односно на

$$y^3-3\cancel{y^2\frac{a}{3}}+3y\left(\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^3}{27}+\cancel{ay^2}-2\frac{a^2}{3}y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ab}{3}+c=0,$$

$$y^3+\left(b-\frac{1}{3}a^2\right)y+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0$$

дакле на једначину у којој нема квадратног члана. Ово је наравно било добро познато, те су се, с обзиром да се нису користили негативни коефицијенти, све једначине трећег степена сводиле на један од три типа:

(1) $x^3+px=q$,

(2) $x^3=px+q$,

(3) $x^3+q=px$,

где су, наравно, p, q позитивни бројеви. Први математичар који је нашао решење за једначину типа (1) био је Сципион дел Феро (1465–1526). Сматра се да је он до тог решења дошао око 1515. године. Био је професор у Болоњи и своје решење нигде није објавио, само га је на самрти саопштио свом зету Ханибалу Навеу и свом ученику Антонију Фјореу.

Дакле, и у то време, па и знатно касније, математичари нису увек желели да објаве своје резултате. Њихове позиције нису биле сигурне, морали су да се доказују. Једна од форми доказивања у ренесансној Италији била је у форми математичких двобоја. Николо Фонтана (1500–1557), познатији као Тарталља (Муцавац),

Слика 2: Николо Фонтана

био је самоук математичар. Рођен је у Бреши на северу Италије. Када је био мали, Французи су заузели Брешу и један француски војник га је ранио тако да је цео живот имао ожиљак на лицу и имао је проблема са говором. Тада му је и отац убијен. Мајка се трудила да га школује, али нису имали новца за то. Како пише у његовим биографијама, у школи је био две недеље, али је после задржао књигу коју је требало да врати и из ње научио да чита и пише. Касније је успео додатним школовањем да научи више, па је на крају успео да обезбеди позицију приватног учитеља рачуна. Био је и веома успешан у тим математичким двобојима.

Тартаљин пријатељ му је 1530. послао два проблема, који се своде на следеће:

1. Решити једначину $x^3 + 3x^2 = 5$.

2. Решити једначину $x(x+2)(x+4) = 1000$.

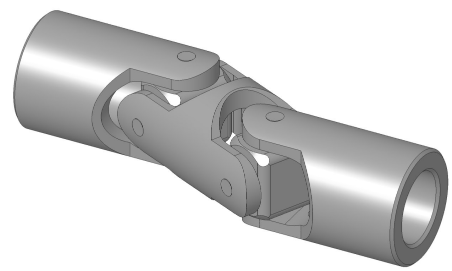
Тартаља се добро помучио и успео да реши ове задатке те је објавио да може да реши сваку једначину типа $x^3 + px^2 = q$.

Фјоре је сматрао да он блефира и 1535. га је изазвао на двобој. Свако од њих је задао другоме 30 задатака, а поражени је морао да плати 30 вечера за победника и његове пријатеље. Победник би био онај који реши више задатака за 50 дана. Тартаља је сазнао да се сви проблеми које је Фјоре саставио своде на решавање једначине типа (1). Стога се максимално потрудио да нађе решење за тај тип. Успео је у томе и све проблеме које му је Фјоре поставио решио је за неколико сати, док Фјоре није успео да реши већину проблема које је за њега саставио Тартаља (проблеми су били различитог типа, један је чак био скривено у вези са овим типом једначине и Тартаља га је поставио зато што је био убеђен да Фјоре не разуме суштински проблеме који се ту појављују). Наводно је Тартаља био толико задовољан својим тријумфом да је ослободио Фјореа обавезе да плати тражене вечере.

Тартаља је сада знао да решава једначине сва три типа и није имао намеру да објави ово решење. У причи се сада појављује Ђироламо Кардано (1501–1576) — лекар, изумитељ, астролог, математичар, шахиста, коцкар.

Слика 3: Ђироламо Кардано

Један од његових изума и сада се користи – „Карданова спојница" заиста носи име по њему. Написао је и књигу о игри коцком, то је можда и прва књига посвећена теорији вероватноће. Кардано је позвао Тартаљу да му открије своје решење. На крају је успео да га убеди да Тартаља дође код њега у Милано, где ће га Кардано упознати са војним заповедником Милана што је доста значило Тартаљи, јер је имао неке замисли у вези балистике, које је желео да покаже дотичном маркизу.



Слика 4: Карданова спојница

У сваком случају, Кардано је успео да убеди Тартаљу да му открије свој метод. Обавезао се да неће то објавити пре него што га Тартаља сам објави. Тартаља је саопштио решење у облику песмице. Упутство је било једноставно: напиши q у облику $q = u - v$, при чему су u и v такви да је $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Тада је решење $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. У остала два случаја се бирају u и v тако да је $q = u + v$, $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ и решење је $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

Да проверимо:

$$\begin{aligned} x^3 + px &= (\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v})^3 + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= u - 3\sqrt[3]{u^2 v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= q - 3\sqrt[3]{uv}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= q - 3\frac{p}{3}(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) + p(\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}) \\ &= q. \end{aligned}$$

Наравно, и остали случајеви лако се провере.

Кардано и његов ученик Лодовико Ферари (1522–1565) даље су развијали овај метод. Ферари је чак успео да тако реши и једначину четвртог степена и они су желели да објаве те резултате, али их је обећање Тартаљи спречавало у томе. Но, сазнали су да је Сципион дел Феро имао решење и отишли су у Болоњу да то провере у његовој заоставштини. Када су сазнали да је то заиста тако, Кардано је сматрао да више није обавезан према Тартаљи и 1545. објављује дело

Ars Magna (*Велика вештина*). У том делу описује решавање једначина трећег и четвртог степена. Наводи да је метод за решење једначине трећег степена сазнао од Тартаље, а да је метод за решавање једначине четвртог степена развио Ферари. Тартаља је био огорчен због тога, кренула је бујица оптужби. Све се то завршило дуелом Тартаље и Фераријa у коме су они расправљали о математичким проблемима. Јасно је да је млађи Ферари био у великој предности у односу на старијег и нимало речитог Тартаљу, који је био поражен и понижен тим дуелом.

Слика 5: Лодовико Ферари

Ми се враћамо на тему како је Кардано приказао овај метод. Он је то мало модификовао. Ево како је то било на примеру из његове књиге. Посматра једначину

$$x^3 + 6x = 20. \tag{1}$$

Наравно, он користи реторичку алгебру, све се ово објашњава речима. Он мотивише све геометријским разматрањима у простору, одговарајућим коцкама, но ми ћемо то прескочити, пошто знамо да баратамо кубом бинома. Оно што је важно је да он тражи решење у облику $x = u - v$. Када се ово замени у горњу једначину добије се:

$$(u^3 - v^3) - (3uv - 6)(u - v) = 20.$$

Он сада тражи да је

$$u^3 - v^3 = 20$$

$$3uv = 6.$$

Добија систем

$$u^3 - v^3 = 20$$

$$u^3 v^3 = 8.$$

Тада је $u^3 = \sqrt{108} + 10$, а $v^3 = \sqrt{108} - 10$ и коначно

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Овде већ можемо да уочимо проблем. Знамо да једначина (1) има тачно једно позитивно реално решење. Но, лако се види да је то решење заправо $x = 2$. А ми смо добили веома сложен израз за то решење у коме је тешко препознати да је заиста $x = 2$. Тартаља је био свестан овог проблема, зато је и веровао да Фјоре суштински не разуме шта се ту све дешава. Но, ми можемо да се снађемо овде. Наиме, приметимо да је $108 = 4 \cdot 27$, те је $\sqrt{108} + 10 = 6\sqrt{3} + 10$. Да ли можемо да нађемо неки број чији је ово трећи степен? То заправо није тешко наћи:

$$(\sqrt{3} + 1)^3 = 3\sqrt{3} + 3 \cdot 3 + 3\sqrt{3} + 1 = 6\sqrt{3} + 10.$$

Но, тада је и $(\sqrt{3} - 1)^3 = 6\sqrt{3} - 10 = \sqrt{108} - 10$. Дакле, $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} = \sqrt{3} + 1$, $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{3} - 1$, те је заиста решење:

$$x = (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} - 1) = 2.$$

Наравно, нама сада не би било тешко да изведемо и опште решење, те да добијемо познате *Карданове формуле*, но уместо тога погледајмо још један пример. Посматрајмо једначину

$$x^3 = 15x + 4. \tag{2}$$

Ово је једначина другог типа и овде је згодно решење тражити у облику $x = u + v$. Дакле,

$$(u + v)^3 = 15(u + v) + 4.$$

$$u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 = 15(u + v) + 4.$$

$$3uv(u + v) + (u^3 + v^3) = 15(u + v) + 4.$$

Тражимо u и v тако да је $3uv = 15$, $u^3 + v^3 = 4$. Добијамо систем по u^3, v^3:

$$u^3 v^3 = 125$$

$$u^3 + v^3 = 4.$$

Овде је занимљиво да споменемо маестра Антонија из Фиренце (XIV век). Он је систем једначина

$$st = c$$

$$s + t = d$$

решавао тако што је решење тражио у облику $s = a + \sqrt{b}$, а $t = a - \sqrt{b}$. Наравно, ово је потпуно коректно, а и врло је згодан метод за решавање оваквог система. Искористимо га. Дакле, наш систем је

$$st = 125$$

$$s + t = 4.$$

Ако узмемо да је $s = a + \sqrt{b}$, а $t = a - \sqrt{b}$ добијамо да је $2a = 4$, тј. $a = 2$, док је $a^2 - b = 125$, тј. $b = -121$. Дакле, $u^3 = 2 + \sqrt{-121}$, а $v^3 = 2 - \sqrt{-121}$, те је

$$x = u + v = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Застанимо мало и погледајмо поново нашу почетну једначину. Није тешко видети да једначина $x^3 = 15x + 4$ има за решење $x = 4$ и да је то заправо једино позитивно реално решење. Осим тога, може се проверити да ова једначина има три различита реална решења. А ми добисмо нешто прилично компликовано! Ситуација је, да се тако изразимо, још гора него у претходном примеру, пошто смо добили квадратни корен из негативног броја. И сада имамо следеће: избегавали смо негативне бројеве уопште, а добили смо решење у коме се појављује чак и квадратни корен из негативног броја. Заправо, овако нешто ће се појавити увек у случају када једначина има три различита реална решења! То је такозвани *несводљив случај*.

Кардано је био свестан овог проблема и трудио се да га избегне у примерима које је дао у својој књизи. Ипак, на једном месту је допустио и корен из негативног броја. Разматрао је проблем растављања броја 10 на два дела чији је производ 40, односно систем једначина

$$x + y = 10$$

$$xy = 40.$$

Он је написао да је јасно да је то немогуће, али да ипак радимо. Добио је бројеве $5 + \sqrt{-15}$ и $5 - \sqrt{-15}$. Каже: „Ако оставимо по страни ментално мучење, када помножимо $5 + \sqrt{-15}$ и $5 - \sqrt{-15}$ добијамо 40. . . Ово је заиста софистика (мудровање).” По свему судећи, Кардано је био први математичар који је увео комплексне бројеве $a + \sqrt{-b}$, али се није осећао нимало пријатно у вези тога.

Рафаел Бомбели се позабавио овим проблемом и то ћемо размотрити нешто касније.

Решавање једначина четвртог степена

Општа једначина четвртог степена

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

може се сменом $x = y - \frac{a}{4}$ свести на једначину у којој недостаје кубни члан. Наравно, с обзиром на избегавање негативних бројева, за математичаре у Италији у XVI веку било је више случајева. Основна идеја Ферарijевог метода је да се додавањем погодних израза једначина сведе на облик

$$(x^2 + e)^2 = (fx + g)^2.$$

Размотрићемо пример из Карданове књиге:

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x. \tag{3}$$

Да би добио потпун квадрат са леве стране, додаје $6x^2$ на обе стране:

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x,$$

тј.

$$(x^2 + 6)^2 = 6x^2 + 60x.$$

Кардано наводи следећу формулу коју детаљно образлаже геометријски, али ми ћемо прескочити то образложење:

$$(x^2 + a + b)^2 = (x^2 + a)^2 + 2x^2b + 2ab + b^2.$$

У нашем случају је

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (x^2 + 6)^2 + 2x^2b + 12b + b^2.$$

Дакле, на обе стране једначине (3) додаје се $2bx^2 + 12b + b^2$. Добијамо

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (6x^2 + 60x) + (2bx^2 + 12b + b^2),$$

односно

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (2b + 6)x^2 + 60x + (b^2 + 12b). \tag{4}$$

Да би квадратни бином са десне стране био потпун квадрат, потребно је и довољно да је

$$4(2b + 6)(b^2 + 12b) = 60^2,$$

односно

$$b^3 + 15b^2 + 36b = 450.$$

Дакле, решавање једначине четвртог степена своди се на решавање помоћне једначине трећег степена. Та помоћна једначина се назива и *разрешавајућа кубика.* Смена $b = c - 5$ кубну једначину своди на

$$c^3 = 39c + 390.$$

Метод који смо приказали раније даје:

$$c = \sqrt[3]{190 + \sqrt{33903}} + \sqrt[3]{190 - \sqrt{33903}},$$

а одатле се добија и b. Једначина (4) сада је облика

$$(x^2 + 6 + b)^2 = (2b + 6)\left(x + \frac{15}{b+3}\right)^2$$

и она се лако решава. Наравно, резултат не изгледа 'лепо', но то не може ни да се очекује.

Рафаел Бомбели

Рафаел Бомбели (1526–1572) написао је значајну књигу *L'Algebra*.

Слика 6: Рафаел Бомбели

Рођен је у Болоњи и није имао формално математичко образовање, а по професији је био архитектонски инжењер. Био је веома импресиониран Кардановим делом, но сматрао је да Кардано није увек био јасан у својим објашњењима и стога је решио да сам напише књигу из које би почетници могли да овладају алгебром без помоћи других књига. Но, тај посао је потрајао, јер је у међувремену у његов посед дошао грчки рукопис Диофантове *Аритметике* и он је био толико одушевљен тим делом да је решио да га преведе. На крају је текст његове *Algebre* штампан у Венецији непосредно пред његову смрт 1572. године и касније у Болоњи 1579.

У свом делу позабавио се и апроксимацијама квадратних ирационалности верижним разломцима. Да би изразио $\sqrt{2}$, он је записао

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{y}. \tag{5}$$

Одавде добија да је $y = 1 + \sqrt{2}$. Додавањем 1 на обе стране једнакости (5) добија:

$$y = 2 + \frac{1}{y} \tag{6}$$

Заменом (6) у (5) добија

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}.$$

Следећа замена даје

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{y}}}.$$

Занемарујући $\frac{1}{y}$ добија апроксимације за $\sqrt{2}$: $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$ итд. Разматрао је и развоје за друге квадратне ирационалности.

Оно што нас највише занима је његова дискусија о горенаведеном примеру код Кардана. Он каже да су заиста корени из негативних бројева софистички, али да сама једначина није спорна, јер има решење $x = 4$. Стога он каже да се можда $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ може изразити у погодном облику:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = u + \sqrt{-v}.$$

Заправо, он наводи да важи једнакост

$$\sqrt[3]{m \mp \sqrt{-n}} = u \mp \sqrt{-v}, \text{ ако је } u^2 + v = \sqrt[3]{m^2 + n} \text{ и } u^3 - 3uv = m.$$

Дакле, у нашој данашњој терминологији, он наводи да трећи корен из комплексног броја постоји и да је то комплексни број. Затим анализира конкретну ситуацију и добија да се за u може узети 2, а за v јединица. Заиста је $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$. Тако да добија да је

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + \sqrt{-121}) + (2 - \sqrt{-121}) = 4$$

и са задовољством констатује: „У почетку ми се чинило да је цела ствар више базирана на софизму него на истини, али трагао сам док нисам нашао доказ."

Бомбели је увео и ознаку $\sqrt{-1}$: *più di meno*, док је $-\sqrt{-1}$ означавао као *meno di meno*. У једначинама је користио скраћенице: *p. di m.*.

Вијет и аналитичка вештина

Слика 7: Франсоа Вијет

Франсоа Вијет (1540–1603) био је правник по образовању, посланик у парламенту Бретање, а касније је радио као саветник краља Анрија IV. У рату против Шпаније прославио се „разбијањем” шифрованих порука противника. Математиком се бавио уз друге послове, али је и поред тога имао низ важних резултата.

Значајан је најпре због пропагирања децималног система у односу на сексагезимални. Писао је да шездесетице и слично треба користити што ређе или уопште не у математици. Преференцу треба давати десетинама, стотинама, хиљадама, као и десетим, стотим и хиљадитим деловима. Што се тиче записивања бројева, није увек био конзистентан. На пример, дужину полукружнице круга пречника 200 000 писао је као $314{,}159\frac{265{,}35}{1{,}000{,}000}$, као $\mathbf{314,159}$,265,35, а понекад и као $\mathbf{314,159}$|265,35.

Проблем са постојећом алгебарском нотацијом није био само у томе што је била компликована, што се разликовала у записима операција, квадрата, корена, једнакости, него и у томе што није постојао начин да се запишу опште квадратне, кубне и остале алгебарске једначине. Постојали су записи за непознату, али су коефицијенти увек били конкретни бројеви. Вијет предлаже да се самогласници користе за непознате величине, а сугласници за познате (односно задате) величине. На пример, општи облик квадратне једначине би тада могао да се записује овако: $BA^2 + CA + D = 0$, но Вијет, нажалост, није квадрат писао овако, па чак ни као AA, него A *quadratus*, а A^3 као A *cubus*. Он јесте користио немачке симболе $+$ и $-$ за сабирање и одузимање, али in за множење, а *ae* (од латинског *aequalis*) за једнакост, мада је Роберт Рекорд још 1551. у свом делу „Тоцило мудрости” увео (нешто продужен) знак једнакости $=$ уз образложење да „ништа не може бити више једнако од две паралелне праве”.

Вијету се није свиђао термин АЛГЕБРА, више је волео да користи термин АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА. Наиме, сматрао је да у тражењу непознатих величина, треба спровести анализу у духу грчких геометара попут Папуса (о коме ми нисмо причали, али знамо о чему је реч). На пример, ако бисмо користили савремене ознаке, при тражењу непознате x у једначини $x^2-5x+6=0$, ми бисмо претпоставили да она постоји (анализа проблема), добили бисмо да тада мора бити $(x-2)(x-3)=0$, те је $x-2=0$, или $x-3=0$, односно $x=2$ или $x=3$. Ово није довољно, јер сада треба спровести и синтезу – проверити да ли ово заиста јесу решења. Термин АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА је широко прихваћен међу математичарима. Савремени појам МАТЕМАТИЧКЕ АНАЛИЗЕ долази са Њутном када он показује да се и на бесконачне редове може применити АНАЛИТИЧКА ВЕШТИНА.

Вијет се доста бавио и тригонометријом, саставио је детаљне таблице за тригонометријске функције, за углове са прираштајем од једног минута. Користио је децимални запис за резултат, али је резултате изражавао у целим бројевима, тако што је радио са правоуглим троуглом чија је хипотенуза била дужине од $100\,000$ (синус и косинус би биле дужине одговарајућих катета). Тригонометријске функције су се у то време користиле и као претече логаритама у смислу да су се адиционе формуле користиле за претварање производа у збир (а и за претварање количника у разлику). На пример, уколико би било потребно наћи производ бројева 94476 и 65341, онда би се могла користити формула

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta),$$

тако што би се потражили у таблицама угао α такав да је $\cos\alpha = 47328$ ($2\cos\alpha = 94476$) и угао β за који је $\cos\beta = 65341$ (рекосмо да су код Вијета у таблицама то били цели бројеви) и потом би се у таблицама видело колико је $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$, те би се добијене вредности једноставно сабрале.

Од раније су биле познате тригонометријске функције двоструког и троструког угла, док је Вијет, користећи домишљате манипулације успео de facto да дође до формула којима се $\cos nx$ и $\sin nx$ изражавају у облику полинома по $\cos x$, $\sin x$:

$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - \cdots$$

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} x \sin^3 x + \cdots$$

То му је свакако помогло да реши проблем који је 1593. године као изазов француским математичарима поставио белгијски математичар ван Румен – решити једначину 45. степена:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 3795x^3 + 45x = K.$$

Вијет је приметио да та једначина одговара заправо развоју $K = \sin 45\theta$ у терминима $x = 2\sin\theta$ и тако је нашао све позитивне корене.

Оно што је занимљивије од овог трика је како је Вијет искористио тригонометрију да реши несводљиви случај кубне једначине. Приметио је да он одговара проблему трисекције угла. Погледајмо на примеру његов општи метод.

Код Кардана је, као што знамо, разматрана једначина

$$x^3 = 15x + 4.$$

Идеја Вијета се састоји да се искористи формула

$$\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta.$$

У ту сврху, искористимо смену $x = \frac{y}{m}$ где ћемо m погодно изабрати. Почетна једначина се своди на

$$y^3 = 15m^2 y + 4m^3.$$

Уколико желимо да је $y = \cos\theta$ решење једначине (за непознати угао θ), онда m бирамо тако да је

$$15m^2 = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad 4m^3 = \frac{1}{4}\cos 3\theta.$$

Дакле, $m^2 = \frac{1}{20}$ и $m = \frac{5}{4}\cos 3\theta$. За m можемо да узмемо да је $m = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, не тражимо све m који то задовољавају. Стога је $\cos 3\theta = \frac{2}{5\sqrt{5}}$. Дакле, имамо:

$$3\theta = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \quad \text{или} \quad 3\theta + 2\pi = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) \quad \text{или} \quad 3\theta + 4\pi = \arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right).$$

Дакле, за θ имамо три могућности:

$$\theta_1 = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right), \quad \theta_2 = \frac{1}{3}\left(\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) - 2\pi\right), \quad \theta_3 = \frac{1}{3}\left(\arccos\left(\frac{2}{5\sqrt{5}}\right) - 4\pi\right).$$

Но, $y = \cos\theta$, а $x = (2\sqrt{5})y$, те тако добијамо сва три реална решења.

За крај напоменимо да Вијет ипак није извео Вијетове формуле. Наиме, у томе га је спречило његово избегавање негативних коефицијената и негативних решења. Добио је неке парцијалне резултате. На пример, разматрао је једначину

$$x^3 + b = 3ax$$

и добио везе

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = b, \quad x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 3a,$$

где су x_1 и x_2 нека два решења ове једначине (остављамо за вежбу читаоцима да ово изведу, приметимо да се треће решење добија из преостала два). Тек је Албер Жирар 1629. године нашао опште формуле које су нам данас познате као Вијетове. Жирар није избегавао ни негативна ни комплексна решења.

Откриће логаритама

Као што смо видели, адиционе формуле за тригонометријске функције су се користиле и за олакшавање рачуна, свођењем рачунања производа на збир. Шкотски властелин Џон Непер (1550–1617) је био изумитељ, промовисао је протестантизам, а математиком се бавио аматерски у практичне сврхе.

Слика 8: Џон Непер

Немачки алгебриста Штифел је направио таблицу у којој је исписао степене двојке:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & 512. \end{array}$$

Може се приметити да операцији сабирања у горњем (аритметичком) низу одговара операција множења у доњем (геометријском) низу. Мана је наравно у томе што је „покупљено” сувише мало бројева степенима двојке, степени су „ретко” распоређени. Да би то поправио, Непер уместо 2 узима број близак јединици, заправо број $1-10^{-7}=0,9999999$. Посматра степене $(1-10^{-7})^L$ тог броја, а да би избегао превише децимала, множи их са 10^7, те заправо посматра бројеве

$$N=10^7\left(1-10^{-7}\right)^L.$$

Дакле, ако је дат број N, број L је тај логаритам броја N. Термин логаритам Непер је увео у свом делу „Опис чудесних правила логаритама” објављеном 1614. године. Логаритам је добијен као комбинација речи logos (разум, однос, реч) и arithmos (број).

Дакле, ако су нам дати бројеви

$$N_1=10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_1} \qquad \text{и} \qquad N_2=10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_2},$$

онда је

$$\frac{N_1\cdot N_2}{10^7}=10^7\left(1-10^{-7}\right)^{L_1+L_2}.$$

Према томе, ако је $L=$ „log”(N), онда је

$$\text{„log”}\left(\frac{N_1\cdot N_2}{10^7}\right)=\text{„log”}(N_1)+\text{„log”}(N_2).$$

Дакле, не трансформише се баш производ у збир, али до на померање децималног зареза то ипак имамо.

Како се могу правити таблице за овакве логаритме? Ако је $N_n=10^7\left(1-10^{-7}\right)^n$, онда имамо да је

$$\begin{aligned} N_n &= 10^7\left(1-10^{-7}\right)^n \\ &= N_{n-1}(1-10^{-7}) \\ &= N_{n-1}-10^{-7}N_{n-1} \end{aligned}$$

Дакле, имамо рекурентну везу $N_n=N_{n-1}-10^{-7}N_{n-1}$.

$$\begin{aligned} N_0 &= 10^7=10\,000\,000 \\ N_1 &= N_0-10^{-7}10\,000\,000=9\,999\,999 \\ N_2 &= N_1-10^{-7}N_1=9\,999\,999-0,9\,999\,999=9\,999\,998,000\,000\,1 \\ N_3 &= N_2-10^{-7}N_2=9\,999\,998,000\,000\,1-0,999\,999\,800\,000\,01 \\ &= 9\,999\,997,000\,000\,299\,999\,99. \end{aligned}$$

Заправо би он ипак заокруживао резултат, те је $N_3 = 9999997{,}0000003$. Непер је написао да је на овом свом делу радио 20 година.

Оксфордски професор Хенри Бригз (1561–1630) је 1615. године посетио Непера на његовом имању да продискутују и евентуално уведу нека побољшања. Сложили су се да би било добро да буде $\log 1 = 0$ и $\log 10 = 1$ (дакле, да то буде логаритам са основом 10). Неперов логаритам је заправо близак логаритму са основом e^{-1}, пошто је

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \sim e^{-1}$$

(како ми сада знамо). Непер је тада већ био старији, те је Бригз преузео тај задатак. Већ 1615. године, Бригз објављује „Логаритамске таблице” где су логаритми бројева од 1 до $20\,000$ и од $90\,000$ до $100\,000$ израчунати на 14 децимала. Холандски издавач Влак је допунио ове таблице 1618. године. Израчунао је логаритме за бројеве од $20\,000$ до $90\,000$ на 10 децимала, а наслов дела је био „Друго издање Бригзових таблица”. Ове су таблице биле од великог значаја посебно за астрономе, јер су знатно скраћивале рачун.

Рене Декарт (1596–1650)

Слика 9: Рене Декарт

Рене Декарт је рођен у градићу Ла Еј, који се налази око 300 километара југоисточно од Париза у провинцији Турен (данас се то место зове по њему). Отац му је био припадник нижег племства и обављао је дужност провинцијског судије. Са осам година Декарт је започео школовање у језуитској школи у Ла Флешу, где је првих пет година имао стандардне курсеве језика, класике, реторику, док су завршне три биле посвећене учењу логике, филозофије, физике и математике. Математика га је највише заинтересовала, пре свега због сигурности својих доказа. Он је од малена био осетљивог здравља и није се очекивало да ће дуго живети. Стога су му његови наставници у Ла Флешу дозвољавали да има неке привилегије које други ученици нису – могао је дуже да спава, није се очекивало да похађа сва предавања. Тај обичај дугог спавања задржао је целог живота.

По напуштању школе 1612. отишао је у Париз да ужива у друштвеном животу престонице. Но, брзо се тога заситио, посветио се изучавању математике. Мада није имао амбиција да има каријеру попут свог оца, ипак је уписао права на универзитету у Поатијеу 1616. Но, 1618. се, засићен учења, пријавио у војску као племић добровољац, најпре са холандским, а потом и са баварским трупама. Заправо и нема података о његовом стварном учешћу у ратовима, имао је и тада доста времена да се бави изучавањем онога што је желео. Године 1621. напушта војску и доста путује. Потом се настањује у Паризу, где 1628. довршава своје дело „Правила за изучавање духа", на латинском. Исте године одлази у Холандију и ту остаје да ствара наредних 20 година. Ту објављује и своја најзначајнија дела, од којих ће нама посебно бити важно чувено дело „Расправа о методу", односно трећи додатак тог дела – „Геометрија". Дело је објављено 1637. на француском и то је било помало неуобичајено, пошто је латински тада био универзални језик науке и филозофије. Заправо је у првом издању сама *Расправа* била на 78 страница, што је чинило једну шестину целе публикације. Ово је дело било врло популарно, донело је славу свом аутору, али не и зараду, пошто је Декарт, у накнаду за ауторска права тражио само 200 примерака да подели својим пријатељима. Но, штампарија је лепо зарадила.

Декартова филозофија систематске сумње, као што је овде изложена, доминира у његовој потрази за сигурним знањима. Сигурност у математичким извођењима га је, као што смо већ напоменули, одушевљавала и математика је, по њему, требала да буде модел за свако изучавање.

Дуги низ једноставног и лаког закључивања којима геометри долазе до њихових најтежих доказа ме је довела до тога да замислим да су све ствари, знање којих је доступно људском уму, međусобно повезане на исти начин и да нема ничег што је толико удаљено од нас да буде ван нашег домашаја, или тако сакривено да га не можемо открити, под условом да се уздржимо од прихватања погрешног за тачно и увек чувамо у нашим мислима ред неопходан за извођење једне истине из друге.

Декарта нису толико занимали математички резултати, но сам начин размишљања у математици. Почетна тачка је за њега била да открије најпростије идеје или принципе, оне у које се не може сумњати. Пошто је изгубио поверење у традиционална учења, Декарт жели да раскине са било каквим претходним ауторитетима у области науке и филозофије, да раскрсти са свим догмама и доктринама.

Сматрао сам да морам да одбацим као апсолутно погрешна сва мишљења у односу на која бих могао да имам и најмању сумњу да бих утврдио да ли после тога остаје ишта у мом веровању што је у потпуности неспорно.

Декарт је стога дошао до тврђења које је било толико чврсто да се не би могло довести у сумњу, до сигурности у сопствену егзистенцију. Наиме, сумња је сама по себи акт мисли, а мисли нема без мислиоца. Стога је он изрекао ту добро нам познату мисао: „Мислим, дакле јесам". Потом је наставио да тражи друга тврђења која су такође очигледна и несумњива.

Никада не смемо дозволити да будемо убеђени у истинитост нечега сем на основу нашег разума.

Ово његово велико поверење у људски ум је покренуло велику расправу у Западном свету о односу вере и разума.

Расправа почиње кратким уводом.

Ако би се ова расправа учинила сувише дугом да се одмах прочита, може се поделити на шест делова. Тако ће се у првом делу наћи разноразна разматрања о наукама; у другом темељна правила методе коју је аутор истраживао; у трећем неколико правила о моралу до којих је аутор дошао помоћу ове методе; у четвртом разлози на темељу којих доказује постојање Бога и људске душе, а који чине основу његове метафизике; у петом низ питања из физике која је он истраживао и, посебно, објашњење о раду срца и неколико других проблема из области медицине, у шта спада и тумачење о разлици између наше и животињске душе, док ће у последњем наћи оно што аутор сматра потребним да би се у проучавању природе отишло корак даље, као, и на крају, разлоге који су га подстакли да пише.

Као што смо већ навели, постоје три додатка. Наведимо пар речи о прва два.

У „Оптици" се разматрају својства светлости, закон преламања светлости, анатомија људског ока, као и практична питања о облику сочива.

Други додатак „Метеорологија" је посвећен Декартовом објашњењу атмосферских појава, формирања снежних пахуља, величине и облика кишне капи, узроке грмљавине и муње, формирања дуге.

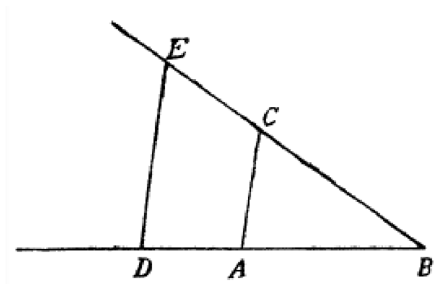
Трећи додатак „Геометрија” има три дела.

Први део носи наслов „Проблеми који се могу конструисати (решити) помоћу кругова и правих”.

Прва реченица гласи:

Сваки проблем у геометрији може се лако свести на такав облик да је познавање дужина неких дужи довољно за његову конструкцију (решење).

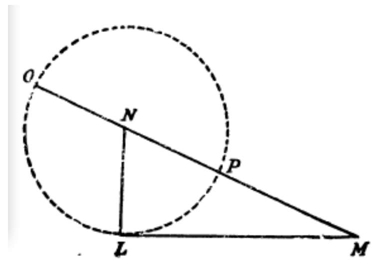
Декарт потом показује везу између аритметичких операција и геометријских конструкција. На пример, множење илуструје следећим цртежом.



Каже да се AB узима за јединицу (иначе наводи да се јединица може једном изабрати и то произвољно, после се све изводи на основу тог избора) и ако треба помножити BD са BC то ће се извести тако што само треба спојити A и C и нацртати DE паралелно са BC. Тада је BE производ BD и BC.

Као што видимо, он производ две дужи идентификује са дужи, не треба му правоугаоник за то. Стога он нема проблема са збиром $ab+c$, где су a, b и c дужи. Ипак, задржава у мислима и правило хомогености, па каже да сви изрази које сабирамо морају имати исту ‘димензију’, те ако имамо разлику $aabb-b$ онда морамо поделити $aabb$ јединичном дужином, а помножити b два пута јединичном дужином, дакле овде ипак своди све на три димензије. Но, и поред тога, велики је напредак да се дозвољава рачунање са различитим изразима, без обзира на ове додатне напомене, које и немају утицаја на сам рачун (можда је то стављено и због неке замишљене практичне примене где не можете сабирати квадратне и дужне метре, али није нам то важно).

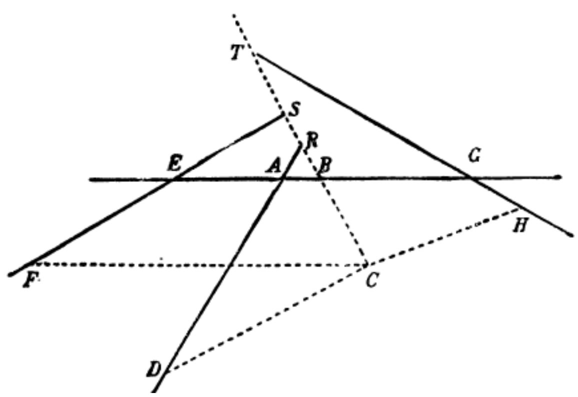
Приметили смо већ да није писао a^2, него aa, али јесте писао a^3. Још један пример његове симболике. Једнакост $\sqrt[3]{a^3-b^3+ab^2}=c$ би записао овако: $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb} \propto c$. Дакле, кубни корен се означава са $C.$ унутар корена и нажалост не користи већ тада постојећи симбол за једнакост.



Објашњава геометријски како се решавају квадратне једначине. На пример, једначину $z^2 = az + b^2$, геометријски илуструје цртежом:

Овде је $ML = b$, а $OP = a$. Решење је $z = OM$. Игнорише негативно решење $-PM$.

Главна тема у овом делу је решавање Папусовог проблема о три, односно четири праве. Ради се о томе да се нађе геометријско место тачака за које је производ растојања (под одређеним углом) од две дате праве пропорционално квадрату растојања од треће, у случају да имамо три праве, односно пропорционално производу растојања од друге две. Ту видимо прави почетак аналитичке геометрије.



Декарт:

...покушаћу да дам доказ у неколико речи, пошто сам се већ уморио од толико писања (sic!).

Нека су AB, AD, EF, GH,... задате неке праве линије и нека се тражи да се нађе тачка C од које се друге праве линије CB, CD, CF, CH,... могу нацртати тако да формирају дате углове CBA, CDA, CFE, CHG... редом, са датим линијама и такве да је производ неких од њих једнак производу осталих, или бар тако да два производа имају задати однос, пошто овај услов не чини проблем ништа тежим.

Најпре ћу претпоставити да је ствар урађена, и како је толико много линија збуњујуће, могу да поједноставим рад тако што ћу изабрати једну од датих линија и једну од оних које треба нацртати (на пример, AB и BC) као главне линије, помоћу којих ћу покушати да остале изразим. Означимо дуж AB са x, а дуж BC са y...

Дакле, идеја је да се све остале релевантне дужи изразе преко x и y и да се потом формира једначина. У случају три (четири) праве добија се крива другог реда, док се у случају више правих добијају криве виших редова. Одмах треба рећи да Декарт не говори експлицитно о координатама (које је касније увео Лајбниц), нити обавезно сматра да се ове изабране, главне праве, секу под правим углом. Осим тога, x и y су му увек позитивни бројева. Дакле, нема правоуглог координатног система код Декарта. Но, видимо претечу координатног система и доста тога што уз то долази.

Други део *Геометрије* има наслов „О природи кривих линија". У њему Декарт говори о геометријским и механичким кривама (односно, како их од Лајбница називамо, алгебарским и трансцендентним). Од допушта посматрање и других (алгебарских) кривих сем правих, кружница, конусних пресека, уколико су оне задате на прецизан начин. А под тим подразумева да се оне добијају у пресецима две праве које се паралелно померају са самерљивим брзинама (дакле, раније разматрана трисектриса отпада, а и ми знамо да то није алгебарска крива). На тај начин се добијају криве чије су једначине облика $f(x,y)=0$, где је $f(x,y)$ полиномна функција.

Декарт разматра проблем налажења нормале (а тиме и тангенте) на криву у задатој тачки.

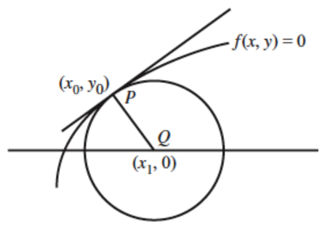
Овде ћу дати довољан увод у проучавање кривих када будем дао општи метод за цртање праве линије која заклапа праве углове са кривом у произвољној њеној тачки. И усуђујем се да кажем да је ово не само најкориснији и најопштији проблем у геометрији који ја знам, него и који икада желим да знам.

И поред похвалних речи о свом методу, ипак такво налажења нормала није најефикасније. Проблем је повезан са налажењем тангенте на криву у датој тачки, а метод за то је развио Ферма у отприлике исто време.

Позабавимо се Декартовим методом.

Нека је $f(x,y)=0$ једначина криве и нека се тражи нормала у тачки $P(x_0,y_0)$. Претпоставимо да је та нормала нацртана и нека сече изабрану x-осу у тачки $Q(x_1,0)$ (ми овде користимо наравно наше ознаке, укључујући и координате због лакшег записа). Једначина кружнице са центром у Q која пролази кроз P је

$$(x-x_1)^2+y^2=(x_0-x_1)^2+y_0^2.$$



Када елиминишемо y из ових једначина, добијамо једначину $g(x, x_1) = 0$ и бирамо x_1 тако да је x_0 двоструки корен ове једначине. Урадимо ово на примеру параболе $y^2 = ax$ у тачки (a, a). Једначина круга је

$$(x - x_1)^2 + y^2 = (a - x_1)^2 + a^2.$$

Елиминисањем y из ове две једначине (постављањем $y^2 = ax$) добијамо

$$(x - x_1)^2 + ax = (a - x_1)^2 + a^2,$$

односно

$$x^2 + (a - 2x_1)x + 2a(x_1 - a) = 0.$$

Како тражимо двоструки корен, Декарт ову једначину изједначава са једначином $(x - r)^2 = 0$ за неко r (ми знамо да мора бити $r = x_0$). Стога мора бити

$$x^2 + (a - 2x_1)x + 2a(x_1 - a) = x^2 - 2rx + r^2,$$

те је $a - 2x_1 = -2r$, а $2a(x_1 - a) = r^2$. Но, како је $r = x_0 = a$, добијамо да је $x_1 = 3a/2$. Одавде се наравно лако добија једначина нормале, то је права кроз тачке (a, a) и $(3a/2, 0)$, а потом и једначина тангенте (права кроз (a, a) нормална на нормалу).

Ово је једноставан случај, али у случају сложенијих примера уочава се мана Декартовог метода који нема ефикасан општи начин за установљавање чињенице да ли полиномијална једначина

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

има двоструки корен r. Декарт то, у примерима у *Геометрији*, ради тако што горњи полином изједначи са полиномом

$$(x - r)^2 \left(b_2x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_n\right),$$

што доводи до доста рачунања. Ми данас знамо да је то повезано са првим изводом, но код Декарта тога нема.

Декарт у *Геометрији* изоставља многе ствари, не даје довољно објашњења. Стога је холандски математичар ван Схутен то дело превео на латински, додајући многа објашњења и оно је знатно обимније од оригиналног Декартовог дела. Било је више латинских издања овог дела. У издању 1659–1661. додат је погодан начин за одређивање двоструких корена који је развио ван Схутенов ученик Јоханеш Хаде (који је иначе био градоначелник Амстердама тридесетак година). Ево Хадеовог правила.

Уколико је r двоструки корен једначине

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots a_{n-1}x + a_n = 0,$$

онда је r такође корен једначине

$$a_0b_0x^n + a_1b_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_{n-1}x + a_nb_n = 0,$$

где бројеви $b_0, b_1, \ldots, b_n$ чине аритметички низ. Остављамо читаоцима да провере да ли је ово тачно и ако јесте, зашто, а ми ћемо дати један пример. Посматрамо једначину

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

и узмимо аритметички низ $3, 2, 1, 0$. По Хадеу, ако је r корен ове кубне једначине, он је корен и једначине

$$3x^3 - 10x^2 + 8x = 0,$$

односно квадратне једначине

$$3x^2 - 10x + 8 = 0,$$

пошто је јасно да 0 није корен кубне. Један корен ове квадратне једначине је 2, а онда се може проверити да је он и корен кубне једначине, те је то заиста двоструки корен на основу Хадеовог правила.

Трећи део *Геометрије* носи наслов „О решавању просторних и натпросторних проблема”. Овај део је алгебарског карактера и тиче се решавањем алгебарских једначина трећег и виших редова.

Ту Декарт примећује да је $x = a$, корен једначине $f(x) = 0$, где је $f(x)$ полином, ако и само ако $x - a$ дели $f(x)$. Занимљиво је да негативне корене назива 'лажним' коренима („мање од ничега”). Истиче да горенаведена једначина може имати највише онолико решења колики је степен полинома $f(x)$, али каже да не морају сва решења бити реална, нека су „имагинарна”.

Овде налазимо и експлицитно формулисано правило знака (касније названо Декартово правило знака), то је раније било имплицитно (рецимо код Кардана). Наиме, ако имамо полином $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, где је $a_0 \neq 0$, онда је број позитивних реалних корена једначине $f(x) = 0$ највише једнак броју промене знака ненула чланова низа $a_0, a_1, \ldots, a_n$. На пример, код једначине

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0,$$

имамо коефицијенте $1, -4, -19, 106, -120$, чији су знаци $+, -, -, +, -$, те имамо три промене знака и закључујемо да имамо највише три позитивна корена. Декарт каже да једначина може имати највише онолико 'лажних' (негативних) корена, колико се пута појављују парови $+, +$ и $-, -$. У нашем случају, имамо једно појављивање, те имамо највише једна негативан корен. Заправо, овде су позитивни корени 2, 3 и 4, док је негативан корен -5.

Касније су му неки замерали да је тврдио да се тако тачно одређује број позитивних, односно негативних корена, но идеја је ипак да се да процена. Тачно је да има највише толико, а може да има паран број пута мање него што је број промене знака.

Разматра и одређивање рационалних нула и показује како се може смањити степен једначине. На пример, за једначину

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0,$$

примећује да је последњи, како каже, члан 64, дељив са $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$, те стога треба проверити да ли је тај полином дељив са $y^2 - 1$, $y^2 + 1$, $y^2 - 2$, $y^2 + 2$, $y^2 - 4$, итд. Открива да је дељив са $y^2 - 16$ и добија количник $y^4 + 8y^2 + 4$ (описујући детаљно поступак дељења).

Посебно је занимљив његов метод решавања једначине четвртог степена. Најпре наравно провери да ли можда може да је сведе на једначину нижег степена, тако што одреди неки корен, а ако не може, онда је редукује на облик у коме нема члана уз трећи степен (елиминише, како каже, други члан). И онда

...Уместо

$$+x^4 . pxx . qx . r = 0$$

пишемо

$$+y^6 . 2py^4 + (pp.4r)yy - qq = 0.$$

О чему се овде ради? Наравно, он уместо, на пример x^2 пише xx и то смо оставили, знак једнакости који користи смо осавременили, а тачкица му означава знак, данас бисмо ту писали $\pm$. Но, одакле му та нова једначина? Ево у чему се ради.

Покушајмо да факторишемо $x^4 + px^2 + qx + r$ као производ два тринома

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + yx + m)(x^2 - yx + n).$$

Ово се може покушати зато што је коефицијент уз x^3 једнак нули. Добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} p &= n - y^2 + m \\ q &= yn - ym \\ r &= mn. \end{aligned}$$

Наравно, ако би имали $y = 0$, било би и $q = 0$, те би почетни полином био квадратни по x^2 (биквадратни како данас кажемо) и лако бисмо га факторисали. Стога, нека је $y \neq 0$. Из прве две једначине добијамо

$$\begin{aligned} n + m &= y^2 + p && (7) \\ n - m &= \frac{q}{y}. && (8) \end{aligned}$$

Стога је

$$\begin{aligned} 2n &= y^2 + p + \frac{q}{y} && (9) \\ 2m &= y^2 + p - \frac{q}{y}, && (10) \end{aligned}$$

те је

$$4r = 4mn = 2m \cdot 2n = \left(y^2 + p + \frac{q}{y}\right)\left(y^2 + p - \frac{q}{y}\right) = y^4 + 2py^2 + p^2 - \frac{q^2}{y^2}.$$

Множењем са y^2 и сређивањем, добијамо једначину

$$y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0.$$

Дакле, на тај начин се добија та помоћна једначина. То је кубна једначина по y^2 и ако можемо да нађемо неко њено решење, онда можемо да извршимо и тражену факторизацију. Погледајмо следећи пример.

Решити једначину

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0.$$

Помоћна једначина је

$$y^6 - 34y^4 + ((-17)^2 - 4(-6)) - (-20)^2 = 0,$$

односно

$$y^6 - 34y^4 + 313y^2 - 400 = 0.$$

Посматрањем делиоца броја 400, добија се да бином $y^2 - 16$ дели горенаведени полином шестог степена, те заправо можемо за y узети $y = 4$ (нама треба једно y, не морамо тражити све могућности). Одатле добијамо $m = 2$ и $n = -3$. Стога имамо факторизацију

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = (x^2 + 4x + 2)(x^2 - 4x - 3),$$

а одавде и

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = (x + 2 - \sqrt{2})(x + 2 + \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{7})(x + 2 + \sqrt{7}).$$

За вежбу препоручујемо читаоцима да реше једначину

$$x^4 - 4x^2 - 8x + 35 = 0$$

овим методом.

Декарт је постао познат широм Европе и 1649. млада шведска краљица Кристина позвала га је да је учи филозофију. Такође је навела да би јој користила његова помоћ у формирању академије наука која би била конкурентна најбољим академијама у Европи. Он је на крају ипак прихватио њен позив, мада је дуго о томе размишљао, и на крају се то ипак показало као погубно по њега. Краљица је навикла да устаје рано, у 5 сати и тада је тражила да буду часови са њим. Осим тога, осећала је презир према хладноћи и просторије, у којима је Декарт у рано јутро, када није навикао да ради, с њом радио, нису биле ни грејане. Почетком фебруара 1650. године добио је прехладу, која се развила у упалу плућа и преминуо је после десетак дана.

Његове идеје из физике нису одговарале физичкој стварности, мада су у Француској покушавали да их одрже живим још неких педесетак година због националног поноса. Но, временом су, чак и у Француској, Њутнове идеје однеле примат.