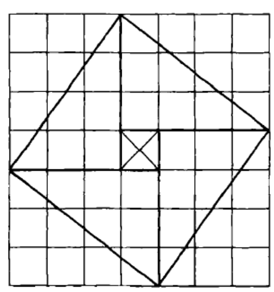
Кинеска математика. Исламска математика. Леонардо из Пизе

Зоран Петровић

26. март 2023.

Јасно је да је у долинама Жуте реке и реке Јангце, формирана цивилизација у приближно исто време када и цивилизације у Месопотамији и Египту, али хронолошки подаци о математици тих цивилизација су знатно мање поуздани него у наведена два претходна случаја. За најстарији математички класик се сматра „Џоу Би Суан Ђинг”, односно, „Аритметички класик о гномону и кружним небеским путањама”, али се процене о његовој старости разликују и за више од 1000 година. Неки наводе да се ту ради о запису кинеске математике из периода око 1200. г. п. н. е. док други сматрају да се пре ради о документу из првог века п. н. е. Највероватније је да се ту ипак ради о документу скупљеном из више периода. У овој књизи пре свега имамо астрономска израчунавања, али и својства правоуглих троуглова укључујући наравно и Питагорину теорему. Питагорина теорема је у кинеским класицима позната као гоугу теорема. Наиме, гу на кинеском представља вертикални штап на сунчаном сату, док је гоу сенка тог штапа.

У овом делу имамо познату кинеску илустрацију Питагорине теореме за троугао са страницама 3, 4 и 5.



Слика 1: Гоугу или Питагорина теорема

Најзначајнији кинески класик је свакако „Ђиу Џанг Суан Шу”, односно „Девет књига (глава) о математичкој вештини”. Највероватније је уобличен у време Еуклидових „Елемената”, али је уништен у великом паљењу књига 213. г. п. н. е. Заправо оно што данас имамо је коментар на то дело које је 263. године саставио значајни математичар Лиу Хуи.

Слика 2: Лиу Хуи

Он је својим коментарима, у којима имамо и доказе и додатна објашњења знатно проширио то дело. У VII веку је одлучено да то дело буде обавезна литература за образовање државних службеника. То је један од најстаријих штампаних уџбеника, пошто је штампан техником дрвених блокова 1089. године.

Девет књига нису теоријско дело попут *Елемената* него практични приручник са разним формулама за рачунање површина, запремина, али и пореза. Има и прецизних резултата, али и апроксимација. Посебно су занимљиве две теме.

Прва се тиче рачунања квадратних корена методом постепеног формирања цифара у декадном запису. Можете је наћи ако имате неки старији уџбеник или приручник из, рецимо, педесетих година прошлог века. Проблем 12 у четвртој књизи тражи да се нађе страница квадрата чија је површина 55225 (неких јединица, које нама нису битне). Дакле, тражи се $\sqrt{55255}$. Јасно је да је резултат троцифрен број (прецизније, знамо да је његов цео део троцифрен број). У ту сврху се цифре почетног броја групишу у групе од по две цифре почевши од цифара јединица: $5|52|25$. Посматрањем прве групе, која се састоји само од цифре 5 може се констатовати да је прва цифра траженог броја 2, јер је $2^2 \leqslant 5 < 3^2$. Сада квадрат те цифре, који је 4, одузимамо од 5 и „спуштамо” наредне две цифре. Посматрамо број 152. Треба нам цифра x тако да је квадрат броја $(2x)_{10} = 20 + x$ најбоља доња апроксимација за 552. Како је $(20+x)^2 = 400+40x+x^2$, а 400 смо већ одузели, питање се своди на налажење највеће цифре x за коју је $(4x)_{10} \cdot (x)_{10} \leqslant 152$. Јасно је да је то 3. Сада израчунамо $152 - 43 \cdot 3$, добијемо 23 и спустимо преостале две цифре 25, тј. посматрамо број 2325. Добили смо да су прве две цифре траженог корена 23. Стога сада тражимо највећу цифру x за коју је $(46x)_{10} \cdot (x)_{10} \leqslant 2325$. Но, видимо да је $465 \cdot 5 = 2325$, те смо заправо добили да је тражени број 235. Но, и да нисмо добили резултат, могли смо да наставимо даљим тражењем цифара, само бисмо сада додали децимални зарез, „спустили" две нуле и наставили. Дакле, поступак ради без обзира на чињеницу да је овде наведен пример у коме се добија баш цео број. Он се може мало средити, али то је у суштини то. Видимо да је суштина поступка у формули за квадрат бинома: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. За вежбу препоручујемо читаоцима да нађу $\sqrt{25281}$ (проблем 13), $\sqrt{71824}$ (проблем 14), $\sqrt{564752\frac{1}{4}}$ (проблем 15) и, када посебно буду расположени, $\sqrt{3972150625}$ (проблем 16). Наравно, радећи овако велике бројеве лако се можете убедити да метод ради без обзира на чињеницу да су то примери са правилним решењима.

Проблем 19 пак тражи да се израчуна страница коцке чија је запремина 1 860 867 (неких јединица). Дакле, тражи се $\sqrt[3]{1\,860\,867}$. Према томе, треба решити једначину

$$x^3 = 1\,860\,867.$$

Видимо да решење мора бити троцифрени број (као и горе – оно што заиста знамо је да је цео део решења троцифрен број) и видимо да је прва цифра једнака 1. Уведимо смену $x = y + 100$. Добијамо

$$y^3 + 300y^2 + 30\,000y + 1\,000\,000 = 1\,860\,867,$$

односно

$$y^3 + 300y^2 + 30\,000y = 860\,867.$$

Наравно сада је y двоцифрени број и видимо да је његова прва цифра једнака 2 (y је свакако мањи од 30, то се лако види). Сада уводимо смену $y = z + 20$. Добијамо

$$z^3 + 60z^2 + 1200z + 8000 + 300z^2 + 12\,000z + 120\,000 + 30\,000z + 600\,000 = 860867,$$

тј.

$$z^3 + 360z^2 + 43\,200z = 132\,867.$$

Број z једноцифрен и видимо да не може бити већи од 3. Но, заправо је

$$3^3 + 360 \cdot 3^2 + 43\,200 \cdot 3 = 132\,867,$$

те је тражено решење број 123.

За вежбу: $\sqrt[3]{1953\frac{1}{8}}$ (проблем 20), $\sqrt[3]{63401\frac{447}{512}}$ (проблем 21) и $\sqrt[3]{1937541\frac{17}{27}}$ (проблем 22).

Друга тема је заиста посебна. У *Девет књига* по први пут налазимо метод за решавање система линеарних једначина. Заправо је то суштински Гаусов метод, само са другачијим записом. Али се заиста појављује и матрица. Тај метод се илуструје у 18 проблема у осмој књизи. Један од проблема у коме се тражи да се одреде количине снопова жита три различита квалитета, своди се на решавање система линеарних једначина

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 39\\ 2x+3y+z &= 34\\ x+2y+3z &= 26. \end{aligned}$$

Наравно да се систем није овако исписивао, али су се штапићи за рачунање постављали на табли за рачунање на следећи начин:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Дакле, ништа друго до матрица система мало другачије написана. Рачунањем уз помоћ штапића ова се матрица свела на матрицу

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

а одговарајући систем

$$\begin{aligned} 3x+2y+z &= 39\\ 5y+z &= 24\\ 36z &= 99 \end{aligned}$$

се наравно лако решава.

У току рачунања су се могли појављивати и негативни коефицијенти (мада су признавана само позитивна решења, јер су и проблеми тако постављани) и они су се означавали помоћу црних штапића, а позитивни помоћу црвених. Ово је прави тренутак да напишемо и како су се бројеви записивали помоћу система који је одговарао рачунању са штапићима.

Цифре су биле 𝍠, 𝍡, 𝍢, 𝍣, 𝍤, 𝍥, 𝍦, 𝍧, 𝍨, на позицијама јединица, стотина, десет хиљада, док су на позицијама десетица, хиљада коришћене ознаке 𝍩, 𝍪, 𝍫, 𝍬, 𝍭, 𝍮, 𝍯, 𝍰, 𝍱.

Дуго времена није постојала цифра за нулу, то је место остављано да буде празно. На пример, број 2021 би се овако записао:

$$= \quad = \mid$$

Знатно касније је уведен кружић за нулу, те је тада 2021:

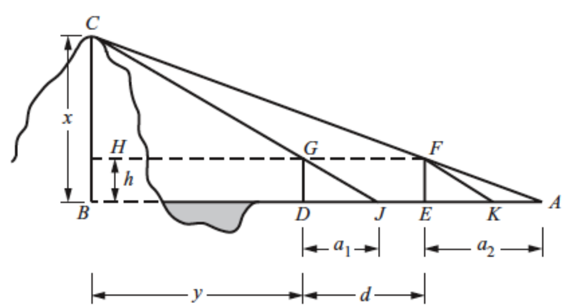
$$= \bigcirc = \mid$$

Као што је речено, у почетку су коришћене боје да означе позитивне и негативне коефицијенте, али се у XIII веку прешло на прецртавање цифре јединица да би се означио негативан коефицијент. На пример, број -437 би се записивао овако:

$$\mid\mid\mid\mid \equiv \cancel{\top\!\mid}.$$

Осим писања коментара на *Девет књига* Лиу Хуи је написао и краће дело, које је вероватно требало да послужи као додатак на девету књигу, која је била посвећена правоуглим троугловима, но ипак је издвојено као посебно дело. Садржи само девет практичних проблема и зове се „Математички приручник за острво на мору". Бави се одређивањем растојања међу недоступним тачкама коришћењем неколико посматрања. Проблем по коме је и дело добило име је следећи.

Имамо острво на мору које треба да измеримо. Два стуба висине по 30 стопа сваки, подигнута су на истом нивоу, а њихово растојање је 1000 корака (1 корак = 6 стопа) тако да су оба стуба у истој линији са острвом. Ако човек оде 123 корака од ближег стуба, највиша тачка на острву ће му таман постати видљива, а ако се помери 127 корака уназад од даљег стуба, поново ће му та највиша тачка бити таман видљива. Одредити висину највише тачке и растојање до ближег стуба.



Ево како је проблем решен у модерној нотацији. Приметимо да је овде $a_1 = 123$, $a_2 = 127$, $h = 5$ и $d = 1000$. Нека је $EK = DJ$, тако да је FK

паралелно са GJ. С обзиром да су троуглови $\triangle CHG$ и $\triangle FEK$ слични, као и троуглови $\triangle CGF$ и $\triangle FKA$, добијамо једнакости

$$\frac{CH}{FE} = \frac{HG}{EK} = \frac{CG}{FK} = \frac{GF}{AK}.$$

Добијамо

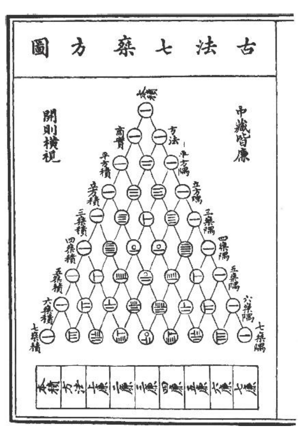
$$\frac{x-5}{5} = \frac{y}{123} = \frac{1000}{127-123},$$

одакле следи да је $x = 1255$ (корака), а $y = 30\,750$ (корака).

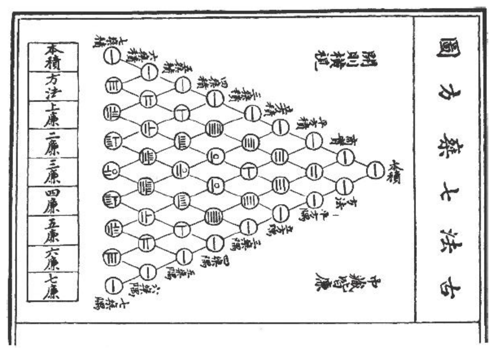
Наравно да не можемо исцрпно да анализирамо сва дела кинеске математике, но морамо споменути и дело „Драгоцено огледало од четири елемента” математичара Џу Шиђеа са краја XIII и почетка XIV

Слика 3: Џу Шиђе

века (четири елемента су небо, земља, човек и материја). Ово дело је објављено 1303. године. Погледајте насловну страну.



Заправо је можда боље видети је ротирану.



Није тешко уверити се да овде имамо познати нам Паскалов троугао (записан коришћењем добро нам познатих цифара уз кружић који означава нулу), значајно пре Паскала. Овде имамо биномне коефицијенте до осмог степена.

У овом делу имамо такође даље развијен метод за нумеричко решавање алгебарских једначина. Док у *Девет књига* имамо само једначине типа $x^2 = c$ и $x^3 = c$, овде имамо значајно сложеније случајеве, а метод је заправо разрада већ наведеног, а налази се и у ранијим делима других кинеских математичара. Енглески математичар Хорнер је 1819. године објавио дело „Нови метод за нумеричко решавање једначина свих редова помоћу непрекидне трансформације". Тај 'нови' метод је заправо већ одавно био познат кинеским математичарима, но на Западу је добио назив *Хорнеров метод.* Добро је позната изрека да је ново све што је добро заборављено. У вези са тим је занимљиво споменути да су се нека дела кинеских математичара изгубила у Кини, али су постала позната у Кореји и Јапану и извршила значајан утицај на развој математике у овим земљама.

Један од кинеских математичара који је описао овај нумерички метод био је и Ћин Ђушао (1202-1261)

Слика 4: Ћин Ђушао

у свом значајном делу „Математичка расправа у девет одељака” из 1247. године (XIII век је било златно доба кинеске математике). Сваки одељак садржи 9 проблема, дакле укупно је ту 81 проблем.

Оно што је посебно значајно за ово дело је да је ту дат de facto конструктиван доказ за Кинеску теорему о остацима. Прво спомињање ове теореме налази се у „Математичком класику Сун Цуа” чије се порекло процењује на IV век. Ту се налази овај проблем.

Имамо ствари за које не знамо колико их је; ако их бројимо по три, остатак је 2; ако их бројимо по пет, остатак је 3; ако их бројимо по седам, остатак је 2. Колико има ствари?

Јасно је да се овде тражи да се реши систем конгруенција:

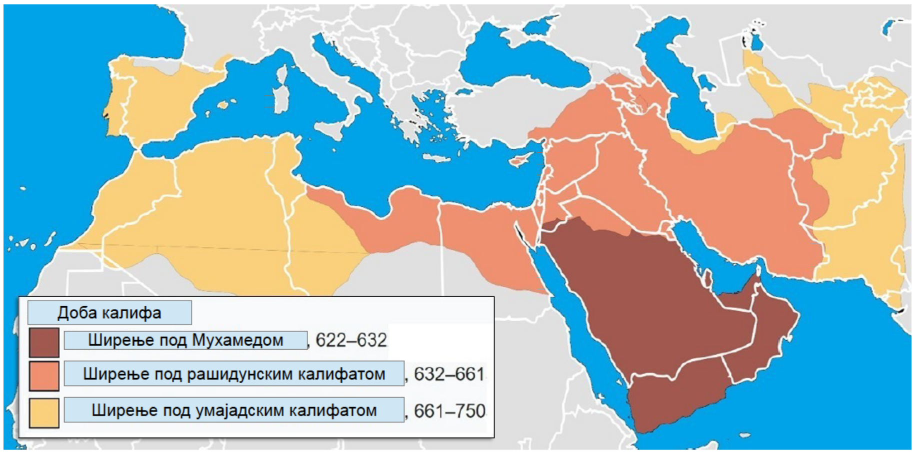
$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod 7 \end{aligned}$$

и дато је решење $x = 23$. Наравно, ово је једноставан проблем. Ћин је заправо описао налажење решења у општем случају, чак и када модули нису узајамно прости (наравно, решење тада не постоји увек, али се установљава и када оно постоји). То је велики скок од тог једног једноставног проблема из давних времена. Сам Ћин свакако није био оличење врлине. Није презао ни од тога да отрује оне који му се нису свиђали, а и позиције администратора је користио за пљачку и лично богаћење. Изузетни резултати у науци не морају бити дела узорних људи.

Исламска математика

Појава ислама у трећој деценији VII века довела је до великих арапских освајања. Дамаск је освојен 635. године, Јерусалим 637. док је освајање Египта завршено 642. године. Револуцијом међу исламским вођама на власт 660. године долази династија Умајада. Освојена је цела Северна Африка и Арапи су прешли на тле данашње Шпаније 711. године. Њихова освајања на западу Европе заустављена су у бици код Пуатјеа 732. године. Покушај освајања Византије сломљен је у бици код Константинопоља 717. На истоку је арапска војска освојила Сирију, Персију и стигла и до Индије. Године 750. долази до нове револуције и на власт долази династија Абасида на истоку арапске државе. Умајаде су остале на власти у данашњој Шпанији у форми Кордопског калифата.

Године 762. престоница се из Дамаска сели у новоизграђени град на реци Тигар – Багдад. Багдад постаје велики трговачки и културни центар и његова популација у IX веку достиже 800,000 што га чини у



Слика 5: Ширење ислама

то време већим и од Константинопоља. Освојене територије су биле сигурне наредних 300 година на истоку и 600 година у Шпанији. Наступио је период мира и културног развоја. Владари Абасида Харун ел Рашид (владао у периоду 786–809) и његов син Абу Џафар ел Мамун (813–833) били су велики покровитељи културе и науке. Основана је Кућа мудрости, која је била пандан Библиотеци у Александрији.

Слика 6: Кућа мудрости у Багдаду

Тај научни процват у Багдаду, посебно у математици, свакако се може повезати и са чињеницом да је у то време и у Византији дошло до сличног развоја. Значајна личност у Византији у том смислу био је Лав Математичар (или Лав Филозоф) (око 790–869).

Рођен је у Тесалији и сматра се да је, бар делимично, био јерменског порекла. Образовао се у Константинопољу, али је потом отишао

Слика 7: Лав Математичар

на острво Андрос где је математику учио од једног старог монаха. По повратку у Константинопољ издржавао се држећи приватне часове. Постоји легенда о томе да је један од његових ученика био заробљен у борби против Арапа и да је ел Мамун био толико импресиониран знањем тог студента да је изразио жељу да Лава доведе у Багдад и да му је понудио велику плату. Лав то није прихватио, али је ту ситуацију искористио да поправи свој положај и од византијског цара Теофила добио одобрење да оснује своју школу. Лав је заслужан за преписе многих значајних дела грчке математике. Дела Еуклида, Архимеда, Прокла, Аполонија и других математичара и филозофа била су у његовој библиотеци и арапски научници су имали прилику да та дела преведу на арапски језик. Постоје индиције да је Лав поправио Диофантову скраћеничку алгебру увођењем боље симболике, али то није имало даљег утицаја.

Ел Хорезми

Мухамед бен Муса ел Хорезми (око 780–850), пореклом је, како му само име каже, из Хорезма (данашња Хива) у области која се налази на територији данашњег Узбекистана, па се може наћи да се он води и као узбечки математичар.

Но, негде се наводи да је он заправо рођен у околини Багдада, а да су му преци из Хорезма. У сваком случају, за време владавине ел Мамуна, он је био члан Куће мудрости. Значајна су два његова дела. Прво дело је сачувано само у преводу на латински језик: *Algoritmi de numerum indorum* („Ел Хорезми о индијским бројевима”) у коме описује декадни систем који је развијен у Индији. Као што смо напоменули, постојало је 9 цифара, али у овом раду ел Хорезми сугерише да се за недостајуће место стави мали кружић — претеча нуле. Санскритска реч *сунја* (празно) је на арапски преведено као *сифр*. Потом на

Слика 8: Поштанска марка у СССР-у посвећена Ел Хорезмију

латински као *zephyrum* и одатле имамо и *zero* и *цифру*. У овом делу је он описао рачунање у декадном систему, те је латинизована верзија његовог имена почела да означава најпре тај поступак, а потом и било коју процедуру у коначно много корака за решавање неког проблема.

Другим делом ћемо се више позабавити. Кратко се наводи као *Хисаб ал-џабр в'ал мукабала*, а превод целог наслова би могао да буде *Сажета књига о рачунању по правилима комплетирања и редуковања.* Ради се о решавању алгебарских (заправо само квадратних) једначина и правила се односе на трансформацију израза – ал-џабр се односи на додавање позитивних израза на обе стране једначине да би се елиминисали негативни изрази, а ал-мукабала на редукцију чланова истог типа. О томе смо већ раније писали. Малом променом од ал-џабр долази се до термина *алгебра*. Овде је можда забавно рећи да се у време Дон Кихота (или, ако се тако некоме више допада, у време Мигуела Сервантеса) у Шпанији на вратима многих берберница могао наћи натпис *Algebrista y Sangradoe* (*Намештање костију и пуштање крви*), тако би *алгебриста* могло да се преведе и као *костоломац*.

Алгебра ел Хорезмија је реторичког типа, ту нема симболике, све се описује речима. Он у свом уводу јасно наводи да је имао намеру да напише кратак приручник за решавање конкретних проблема који се тичу наслеђивања, подела, трговине, премеравања и сличним питањима. Дакле, његово дело није теоријског типа, но је мотивисано праксом. Код њега је присутна доза отклона од грчке геометрије. На пример, једног значајног арапског аутора који је био нешто старији од њега (да не наводимо сада његово име, није нам од значаја за касније), а који је био велики заговорник усвајања грчке математике у Багдаду, он уопште не наводи. Он избегава спомињање Еуклида, мада, као што ћемо видети, он користи геометрију да оправда своје алгебарске трансформације. Касније је, као неку врсту одговора на то, значајни геометар Табит бен Кура, показивао да је то што су радили 'алгебристи' заправо већ садржано код Еуклида.

Код ел Хорезмија нема негативних бројева, чак ни као коефицијената, те је он све линеарне и квадратне једначине свео на шест случајева.

1. $ax^2 = bx$
2. $ax^2 = b$
3. $ax = b$
4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$
6. $ax^2 = bx + c$

где су a, b, c дати позитивни рационални бројеви. Речима би, рецимо, случај 4. описао као корени и квадрати једнаки бројевима. Дакле, за њега је x био *корен*, а не *линија, дуж* као код Грка. На прва три случаја се врло кратко задржава, при чему увек најпре своди задати проблем на проблем у коме је коефицијент уз x^2 јединица, било дељењем било множењем одговарајућим бројем. То ради и за остале случајеве, које назива сложеним, те заправо имамо следеће 'сложене' случајеве.

1. $x^2 + px = q$
2. $x^2 + q = px$
3. $x^2 = px + q$

Он најпре даје опис поступака за решавање свих ових случајева, уз конкретан пример, а затим геометријски образлаже зашто је поступак добар. Подсетимо се, он пише приручник, не научно дело.

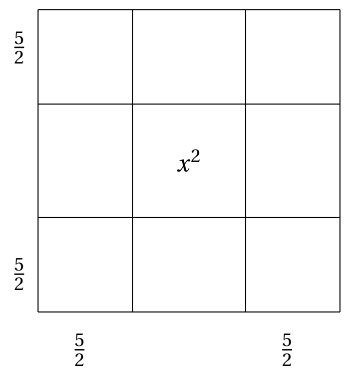
Ево како образлаже први случај (пример који користи је $x^2 + 10x = 39$):

Решење је ово: преполовите број корена, што у овом случају даје пет. То помножите са самим собом; производ је двадесет пет. Додајте то на тридесет девет; сума је шездесет четири. Сада нађите корен из овога, што је осам и одузмите од њега половину броја корена, што је пет; остатак је три. Ово је корен квадрата који сте тражили, сам квадрат је девет.

Занимљиво је да је њему непозната квадрат. Он заправо описује следећу формулу:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}.$$

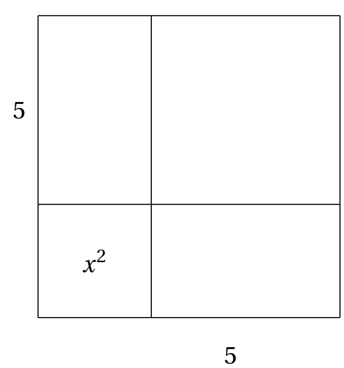
Ово оправдава комплетирањем квадрата и то на два начина.



Наравно, код њега нема свих ових ознака, означена су поједина темена и образложено је шта се ради. Формира се непознати квадрат (x^2) и на њега са стране 'накаче' четири правоугаоника чија је друга страница $\frac{5}{2}$. Тако добијамо четири правоугаоника укупне површине $4 \cdot \frac{5}{2}x = 10x$. Та централна фигура се онда допуни малим квадратима укупне површине $4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$ до пуног квадрата који је странице 8. Стога је страница непознатог квадрата $x = 3$. Дакле, овде имамо класично (и буквално) комплетирање квадрата. Формулама би то оправдали овако:

$$\begin{aligned}
x^2 + 10x &= 39 \\
x^2 + 10x + 25 &= 39 + 25 \\
(x+5)^2 &= 8^2 \\
x + 5 &= 8 \\
x &= 3.
\end{aligned}$$

Други цртеж је убедљивији, свакако је једноставнији.

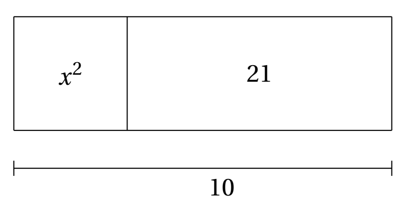


Дакле на непознати квадрат смо ‘накачили’ два правоугаоника чије су друге странице 5. Укупна површина тог објекта је x^2+10x. Он се комплетира до квадрата додајући квадрат странице 5. Тако се добија велики квадрат површине $39+25=64$ и то је то. Заправо је онај први цртеж непотребан, ово друго је јасније и директније образложење. Занимљиво је да се овај конкретан пример после вековима провлачио кроз разне касније уџбенике алгебре.

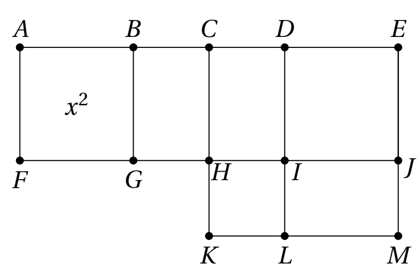
Други случај одговара формули

$$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Дакле, овде имамо два случаја и ел Хорезми указује на то. Посебно истиче да решење постоји само ако $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ није мање од q и да је решење баш $\frac{p}{2}$ уколико је $q=\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Пример $x^2+21=10x$ илуструје на следећи начин. Ми ћемо додати цртеж који означава поставку проблема.



Дакле, на непознати квадрат додајемо правоугаоник површине 21, чија је једна страница непознати корен. Заједно добијамо правоугаоник чија је једна страница непознати корен, а друга је једнака 10. Ево и комплетног цртежа.

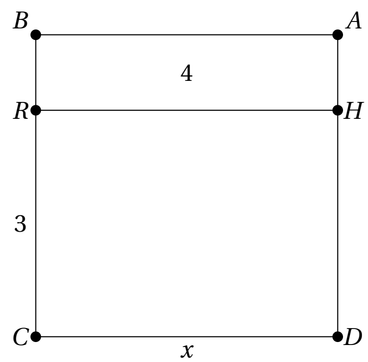


У средишту C дужи AE повлачимо нормалу CK и формирамо квадрат $CEMK$. Тачка H је пресечна тачка те нормале и FJ. Формирамо нови квадрат $HILK$. Ел Хорезми објашњава зашто су правогаоници $BCHG$ и $IJLM$ једнаки (подударни) и онда се може закључити да је 'гномон' $CHILME$ исте површине као и правоугаоник $BEJG$ за који знамо да је површине 21. Квадрат $CEMK$ је површине 25, а квадрат $HILK$ комплетира гномон $CHILME$ до тог квадрата. Стога је $HI = 2$. Но, и $DEJI$ је квадрат, а његова страница је x. Како је $HJ = 5$, добија се да је $x = 5 - 2 = 3$. Ел Хорезми објашњава да је друго решење $x = 5 + 2 = 7$.

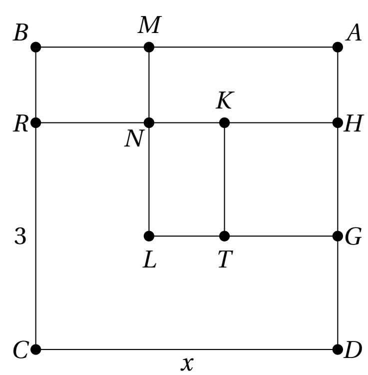
За последњи случај „корени и бројеви једнаки квадрату", тј. за једначину облика $x^2 = px + q$, ел Хорезми даје решење:

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} + \frac{p}{2}.$$

Геометријски то појашњава на примеру $x^2 = 3x + 4$. Најпре поставка проблема.



Дакле, имамо непознати квадрат странице x и њега поделимо на два правоугаоника – један је површине 4, са једном од страница x, док једна страница другог 3, а друга x. Ево решења.



Тачка G је средиште дужи DH. Формира се квадрат $HGTK$. Формира се и квадрат $AGLM$. С обзиром на избор ових тачака, имамо да је $MN =$

$ML-LN=NH-HK=NK$. Такође је $RN=RH-NH=AD-AG=GD=HG=NL$. Стога су правоугаоници $BMNR$ и $NKTL$ подударни. Према томе, површина гномона $AHKTLM$ једнака је површини правоугаоника $BAHR$, тј. једнака је 4. Тај гномон се квадратом $HKTG$, чија је страница $\frac{3}{2}$ допуњава до квадрата странице AG. Дакле,

$$AG=\sqrt{4+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}.$$

Тада је $x=AD=AG+GD=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$ (G је средиште дужи DH).

У даљем тексту, ел Хорезми објашњава како се множе биноми, тј. правила за рачунање производа облика $(ax\pm b)(d\pm cx)$ и потом ради разне примере једначина које настају из неких проблема. У делу *Мерење* налазимо разне формуле за рачунање површина и запремина. Нема ту ништа ново, за π предлаже три, добро нам познате, апроксимације: $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$, $\frac{62832}{20000}$.

Значајан део рада посвећен је практичним питањима наследства, поделе имовине и сличним проблемима. Наравно, тај нам део није занимљив.

Абу Камил

Абу Камил (око 850–930), познат и као „рачунџија из Египта” написао је своју *Алгебру*, која је заправо проширење ел Хорезмијеве

Слика 9: Абу Камил из Египта

књиге. У њој има 69 проблема (код ел Хорезмија има 40). Многи су преузети, али има и нових, као и других метода за решавање. Ево једног примера.

Проблем број 8, речима изражава захтев да се 10 подели на два дела, тако да збир количника тих делова даје $4\frac{1}{4}$. Дакле, ради се о систему једначина:

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x} &= 4\tfrac{1}{4}, \end{aligned}$$

где је x мањи део. Друга једначина се своди на

$$x^2+y^2=4\tfrac{1}{4}xy. \tag{1}$$

Абу Камил решава овај проблем на два начина. Најпре користи метод ел Хорезмија. Из прве једначине изражава $y=10-x$ и убацује у (1). Добија једначину

$$6\tfrac{1}{4}x^2+100=62\tfrac{1}{2}x,$$

односно

$$x^2+16=10x,$$

која има решење $x=2$, те је $y=8$. Друго решење користи идеју старе месопотамске математике — уводи се нова непозната z са:

$$x=5-z, \quad y=5+z.$$

Када се то замени у (1), добија се

$$50+2z^2=4\tfrac{1}{4}(25-z^2),$$

одакле се лако добија $z^2=9$, те је $z=3$ и потом се добијају и x и y.

Абу Камил је развио и рачун са коренима, па је користио и формулу

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm2\sqrt{ab}}.$$

Посебно је занимљиво да се код њега, по први пут, појављује решавање проблема у којима одговарајуће једначине имају и ирационалне коефицијенте. На пример, у проблему 53, добија се једначина

$$(x+\sqrt{3})(x+\sqrt{2})=20.$$

Абу Камил решење даје у облику

$$x=\sqrt{21\tfrac{1}{4}-\sqrt{6}+\sqrt{1\tfrac{1}{2}}}-\sqrt{\tfrac{3}{4}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Уверите се да је решење заиста добро, мада је можда, за нас, необично записано.

Абу Камилова *Алгебра* има посебан значај, јер је извршила велики утицај на Леонарда из Пизе (Фибоначија) који је у својој *Књизи о абакусу* из 1202. пренео 29 проблема од Абу Камила (уз неке мале измене).

Табит бен Кура

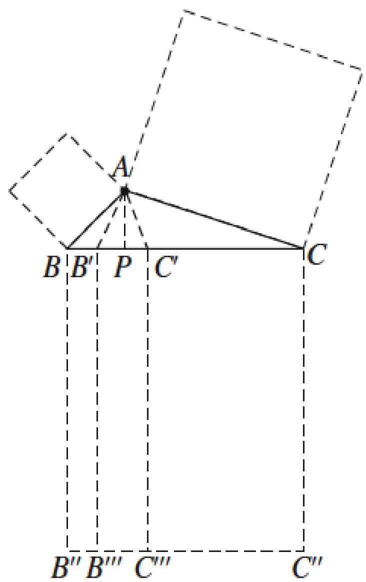
Табит бен Кура ел Харани (836–901) био је сабејац из Харана.

Слика 10: Табит бен Кура

Заправо, како историчари наводе, сабејци из Харана су били 'лажни сабејци'. Прави сабејци су били религиозна група коју је, уз хришћане и јевреје, Куран признавао као „људе од Књиге" и они су уживали сву верску толеранцију у оквиру муслиманске државе. Но, људи из Харана су били хеленизовани Сирijци, који су следили неопитагорејску филозофију и начин живота. Легенда каже да је Калиф ел Мамун предводећи једном приликом војску ка Византији свратио у Харан и питао тамошње становништво да ли су они хришћани на шта су му они одговорили да нису. Питао их је да ли су јевреји. Рекли су да нису ни јевреји. На питање да ли имају свету књигу или пророка, нису јасно одговорили. Када је то све чуо, ел Мамун им је рекао да ће морати или да пређу у ислам или у хришћанство или у јудаизам или ће их све побити када се буде враћао. Они су потражили савет од једног искусног шеика (и добро му платили за то) и он им је рекао да кажу да су они сабејци. И тако се они спасоше. У сваком случају, чињеница да су следили неопитагорејску филозофију је довела до тога да је међу њима било значајних математичара и астронома. Рецимо и ел Батани, о коме нећемо даље писати, је био сабејац.

Табит бен Кура је писао на свом језику, сиријском (то је језик који данас више не постоји, а у истој је групи као и арамејски којим је говорио Исус Христ), преводио са тог и других језика на арапски. Био је геометар по уверењу, промовисао је грчку геометрију, па је написао и кратку расправу *О верификацији алгебарских проблема геометријским доказима* у којој је показивао да се све што су радили алгебристи при решавању квадратних једначина може већ наћи код Еуклида, заједно са коректним доказима. Очигледно да то није било јасно свима, чим је он осетио потребу да напише то дело. Табит је, дакле, представљао ту другу струју у исламској математици, која се наслањала најпре на грчку математику са јаком теоријском подлогом, а не на рачунску традицију Месопотамије и Индије.

Табит је имао и значајних резултата. Наведимо његову генерализацију Питагорине теореме за било који троугао.



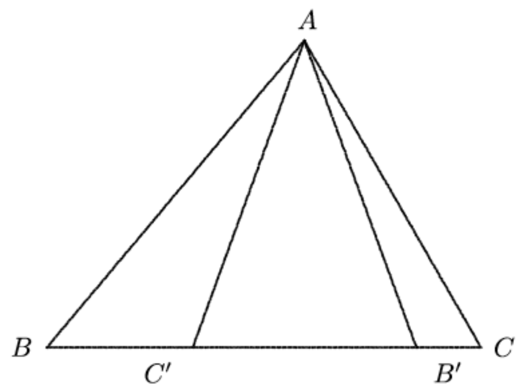
Слика 11: Уопштење Питагорине теореме

Дакле, дат је произвољни троугао $\triangle ABC$ и на страници BC изабране су тачке B' и C' такве да је $\measuredangle AB'B \cong \measuredangle BAC \cong \measuredangle AC'C$. Тада је

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BB' + CC').$$

На слици је нацртан квадрат $BCC"B"$ и уочавамо и два правоугаоника $BB'B'''B''$, $CC''C'''C$. Тврђење заправо каже да је збир (површина) квадрата над страницама AB и AC једнак збиру (површина) та два правоугаоника. Табит не даје доказ, само наводи да се лако може извести помоћу Еуклидових резултата (и то оних који заправо представљају формулације косинусне теореме, а о којима смо раније писали). Но, може се то добити на разне начине. Ако се присетимо Еуклидовог доказа Питагорине теореме, у њему се показује једнакост површина тих квадрата и површина одговарајућих правоугаоника. То имамо и овде, само та два правоугаоника у овом случају (када је угао код темена A туп) не покривају цео квадрат над BC.

У случају када је угао код темена A оштар, збир њихових површина је већи од тог квадрата



Доцртајте одговарајуће квадрате и правоугаонике – приметимо да је распоред тачака B' и C' сада другачији тако да се ти правоугаоници сада преклапају.

Његова *Књига о одређивању пријатељских бројева* садржи врло леп резултат из теорије бројева. Бројеви a и b су пријатељски уколико је сваки од њих једнак збиру правих делилаца оног другог. На пример, пријатељски су бројеви $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ и $284 = 2^2 \cdot 71$:

$$1 + 2 + 5 + 11 + 2^2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 11 + 5 \cdot 11 + 2 \cdot 5 \cdot 11 + 2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 11 = 284,$$

$$1 + 2 + 71 + 2^2 + 2 \cdot 71 = 220.$$

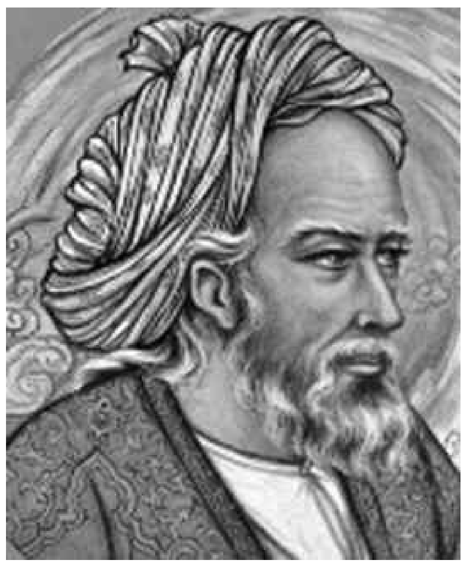
Ево Табитовог правила: ако су $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ и $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ прости бројеви, онда су бројеви $M = 2^n pq$ и $N = 2^n r$ пријатељски бројеви. Управо горенаведени пар пријатељских бројева добијамо за случај $n = 2$: $p = 11 (= 3 \cdot 2^2 - 1)$, $q = 5 (= 3 \cdot 2^{2-1} - 1)$ и $r = 71 (= 9 \cdot 2^3 - 1)$.

И други се парови пријатељских бројева могу добити помоћу Табитовог правила. На пример, пар бројева 17296 и 18416 добио је Ферма из Табитовог правила за $n = 4$, док је Декарт добио пар бројева 9363584 и 9437056 за $n = 7$. Ојлер је написао три рада о пријатељским бројевима. Доказао је исправност Табитовог правила и навео листу од чак 62 пара пријатељских бројева (они нису сви добијени овим правилом).

Омер Хајам

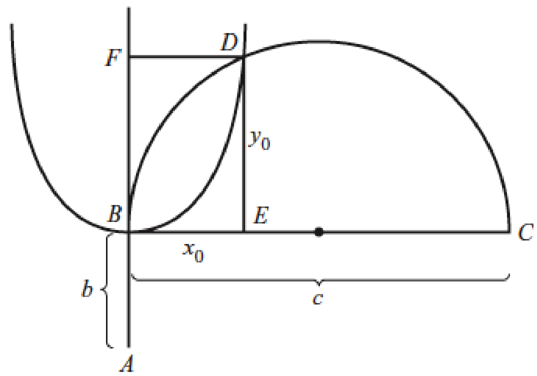
Само један хлебац од чисте пшенице,
један крчаг вина, комад печенице,
и ја покрај тебе пусте сред равнице, —
шта су спрам те сласти султанске границе?!

Омер Хајам (1050–1123) значајни персијски математичар, астроном, филозоф и песник, познат по својим хедонистичким стиховима, писао је своја математичка дела на арапском, а песме на персијском језику.



Слика 12: Омер Хајам

Његово најзначајније математичко дело је, кратко, *Алгебра* и у њему се бавио геометријским решавањем кубних једначина. Он је истакао да се кубна једначина не може решавати лењиром и шестаром, него су за то потребни конусни пресеци. С обзиром да је и он искључивао негативне коефицијенте (а и корене), морао је да разматра 14 типова кубних једначина. Метод решавања је био да се једначина геометријски реши помоћу пресека две криве другог реда, на пример хиперболе и кружнице, или параболе и хиперболе. Треба имати у виду да је он на располагању имао реторичку алгебру и да је све то било знатно сложеније него нама данас. Ево једног његовог решења.



Слика 13: Геометријско решавање кубних једначина

Овде је приказано његово геометријско решење једначине $x^3 + b^2 x = b^2 c$, где се решење добија у пресеку параболе $x^2 = by$ и полукруга са центром у $(c/2, 0)$ полупречника $c/2$. Разлог зашто су коефицијенти овако одабрани је у његовој жељи да сви коефицијенти буду 'просторни'. У својим разматрањима игнорисао је случај када постоји двоструки корен, а није открио ни случај у коме постоје три различита решења. Такође је сматрао да кубне једначине немају алгебарско решење. Но, без обзира на то, његово дело било је веома значајан напредак, јер мада он разматра питање геометријски, он заправо решава једначине. Мали корак ка алгебарској геометрији.

Други његов значајан рад тиче се покушаја доказивања Еуклидовог петог постулата. Већ раније се тиме бавио бен ел Хајтам који је разматрао четвороугао, који има три права угла (он је данас познат као Ламбертов четвороугао) и покушао је да докаже да и четврти угао мора бити прав. Хајам критикује његов доказ, који јесте био погрешан и сам разматра четвороугао који је једнакокраки трапез са два права угла на основици (данас познат као Сакеријев четвороугао). И он је погрешно доказао да је то обавезно правоугаоник. У сваком случају, Сакери је био упознат са преводом Хајамовог дела и могао је да гради даљу теорију уз коришћење Хајамових идеја.

Ел Каши

Џамшид ел Каши (око 1380–1429) припада већ периоду заласка ис-

Слика 14: Са иранске поштанске марке

ламске математике. Он је такође био персијски математичар који је радио у Самарканду (сада град у Узбекистану), који је тада био престоница Улуг Бега, унука чувеног Тамерлана (победника над султаном Бајазитом у бици 1402. године код Ангоре, тј. данашње Анкаре). Улуг Бег је и сам био одличан астроном и математичар, но стога не баш и успешан владар, те га је син срушио са престола и наручио потом и његово убиство док је овај одлазио у Меку после пораза.

Ел Каши је био без премца у вештини рачунања. Рачунао је користећи и сексагезималне и децималне записе. Знао је да одређује нумеричка решења алгебарских једначина методом који се сада назива Хорнеров метод и који је базиран на постепеном формирању одговарајућег записа траженог броја. На пример, израчунао је шести корен броја који је у основи 60 записан као $34,59,1,7,14,54,23,3,47,37;40$ што заиста делује скоро нестварно. Изразио је и 2π у децималном запису: $6,2831853071795865$, што је апроксимација која је остала ненадмашена све до краја шеснаестог века (можда је ово прави тренутак да наведемо занимљив метод за памћење децималног записа броја π

– ако запишете број слова у следећем исказу, добићете π на 16 децимала: ЈОШ И ГРЦИ И СТАРИ ВАВИЛОНЦИ СУ КАЗАЛИ — ОБИМЕ КАД ДЕЛИШ КРУГОВИМ ПРЕЧНИКОМ ДОБИЈАШ НЕОПХОДНИ НАМ ПИ). Ел Каши је направио и одличне тригонометријске таблице за опсерваторију у Самарканду, а код њега се појављује и Паскалов троугао (који се у Кини разматрао још раније, а у Европи тек један век после њега).

Можда је најбоље овај део предавања о историји математике завршити преводом увода у уџбеник алгебарске геометрије *Алгебарски варијетети* значајног америчког математичара Џорџа Кемпфа.

Алгебарска геометрија је мешавина идеја две медитеранске културе. Она је надградња арапске науке брзог рачунања решења једначина над грчком вештином о положају и облику. Овај гоблен је оригинално извезен на европском тлу и још увек се профињује под утицајем међународне моде. Алгебарска геометрија проучава деликатан баланс између геометријски уверљивог и алгебарски могућег. Кад год једна страна ове математичке клацкалице превагне над другом, човек одмах губи интерес и бежи у потрагу за узбудљивијом разонодом.

Леонардо из Пизе

Леонардо из Пизе (око 1170–1240) рођен је у граду-држави Пиза. Његов отац звао се Гиљермо, а Леонардо је наводио да је потомак

Слика 15: Фибоначи

Боначија, који је највероватније био неки давни предак. У то време је позивање на познате претке било правило у Италији. Он је сам себе називао Леонардо Пизански Биголо и када је 1240. године добио званичне почасти од града Пизе за службу као финансијски саветник, у том документу је баш то стајало. Било је много покушаја да се објасни то име Биголо, али није нам то много важно. Но, надимак Фибоначи (што долази од ‘син Боначија’) по свему судећи потиче од једног историчара математике из 1838. године. Нема никаквих доказа да је сам Леонардо икада користио то име, али ето то је остало и под тим надимком је и најпознатији.

Више италијанских градова-држава у то време је имало веома развијену трговину са исламским светом и Пиза је била један од њих. Леонардов отац је добио важну позицију у једном граду у садашњем Алжиру 1192. године и повео је свог сина са собом да изучи трговачке вештине. Добио је одличну подуку из математике и тамо је научио рачун помоћу индо-арапских цифара. Писао је да му се то веома допало и да је наставио са изучавањем математике и у даљим путовањима по Египту, Сирији, Византији, Сицилији и Провансi.

Леонардо се у Пизу вратио 1200. године и у наредних 25 година написао неколико дела. Она која су остала сачувана су

1. *Liber abbaci* (1202, редиговано 1228),
2. *Practica geometriae* (1220),
3. *Flos* (1225).
4. Писмо филозофу Теодорусу, који је живео на Сицилији на двору Фридриха II, цара Светог римског царства,
5. *Liber quadratorum* (1225).

Даћемо кратак преглед неких од ових дела. Почнимо од најчувенијег и најобимнијег ***Liber abbaci***, тј. *Књиге о рачунању*. Ова књига има 15 глава.

Првих 7 глава књиге посвећено је рачунању у декадном систему базираном на индо-арапским цифрама уз додати знак 0 за нулу. Велики број примера, детаљно описаних речима може се ту наћи. Ево, на пример, како Леонардо описује дељење броја 9000 бројем 7. Он све описује речима, а ми ћемо приказати поступак симболима. Најпре каже да се 7 испише испод прве нуле:

$$\begin{array}{llll} 9 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 7 \end{array}$$

Затим каже да се 9 дели са 7; количник је 1, а остатак 2 и стога 1 треба писати испод 9, а 2 изнад 9:

$$\begin{array}{llll} 2 & & & \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 7 \\ 1 & & & \end{array}$$

Сада се та двојка споји са нулом која је иза 9, те се тако добијен број 20 дели са 7. Количник је 2, а остатак 6. Знамо већ где их пишемо.

26
9000
   7
12

Настављамо поступак.

264
9000
   7
128

Најзад, 40 при дељењу са 5 даље количник 5, који се пише испод одговарајуће нуле

264
9000
   7
1285

док се остатак 5 пише изнад разломачке црте над 7. И тако се добија резултат: $\frac{5}{7}1285$. Да? Није грешка, Леонардо овако пише мешовити број, најпре разломљени део, а после цео део. То је сигурно под утицајем арапског писма које се пише здесна улево.

Дакле, имамо заиста разломачку црту, разломке, но Леонардо има и овакве записе:

$$\frac{2\ 4\ 4}{3\ 5\ 5}9.$$

Шта је сада ово? Можда ће јасније бити када на овакав начин напишемо, на пример, број $2{,}3478$:

$$\frac{8\ \ 7\ \ 4\ \ 3}{10\ 10\ 10\ 10}2.$$

Дакле:

$$2{,}3478 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{10\cdot 10} + \frac{7}{10\cdot 10\cdot 10} + \frac{8}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10},$$

а

$$\frac{2\ 4\ 4}{3\ 5\ 5}9 = 9 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5\cdot 5} + \frac{2}{5\cdot 5\cdot 3}.$$

Чему служе ови сложени разломци, каква је то 'егзотика'? Но, главе 8–11 садрже проблеме који се тичу трговине, а разне мерне јединице, укључујући новчане, нису биле тако правилне као данас. Уосталом, и сада имамо тај англосаксонски систем:

1 лига = 3 миље; 1 миља = 8 фурлонга; 1 фурлонг = 10 ланаца; 1 ланац = 22 јарде; 1 јард = 3 стопе; 1 стопа = 12 инча. [1]

Добро, лига се више не користи (мада се спомиње у добро познатој књизи „Господар прстенова”, на пример), а и постоји сада 1000ти део инча, но...

Дакле, 3 лиге, 2 миље, 4 фурлонга, 6 ланаца, 11 јарди, 2 стопе и 5 инча је, по Леонардовом запису:

$$\frac{5\ \ 2\ \ 11\ \ 6\ 4\ 2}{12\ 3\ 22\ 10\ 8\ 3}\,3\text{ лиге} \qquad ☺.$$

Ако читате старије књиге, онда можете да погледате и како је било са новчаним јединицама. Код Леонарда има велики број задатака који се тичу трампе, конверзије валута и слично. Уз коришћење оваквих записа.

У главама 12 и 13 има више забавних проблема, али је наслов главе 13 посебно занимљив:

> Овде почиње глава тринаест о методу елшатајм и како се њим скоро сви проблеми у математици решавају.

Добро, шта је тај метод? Назив потиче из арапског и значи две грешке. Идеја је да се при решавању једначине $f(x) = c$ израчунају вредности функције f у неке две тачке a и b (то су те две 'грешке'), да се постави права кроз те две тачке и тако се одреди приближно решење. Прецизније, ако желимо да решимо једначину

$$f(x) = c,$$

онда је њено приближно решење x' дато са:

$$\frac{x' - a}{b - a} = \frac{c - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Дакле, ради се о линеарној интерполацији. Још у египатској математици је, за решавање линеарних једначина $ax = b$ коришћена метода (једне) погрешне претпоставке, где се за x узима нека погодна вредност, па се онда она поправља. Метода две погрешне претпоставке је дуго времена коришћена за решавање једначина облика $ax + b = c$. Нама то сада изгледа крајње необично, али тако је било. Наравно у овом случају се добија тачно решење пошто се ради о правој. У случају полинома добија се приближно решење.

[1] За љубитеље фудбала (и геометрије) наведимо да је ширина гола 8 јарди, висина 8 стопа, да је „петерац” правоугаоник страница 20 и 6 јарди, да је „шеснаестерац” правоугаоник страница 44 и 18 јарди, да је „једанаестерац” на 12 јарди, док је растојање при извођењу слободног ударца 10 јарди — лук који се налази на врху казненог простора је онај део лука круга полупречника 10 јарди са центром у тачки за извођење „пенала”, који се не налази у казненом простору.

У глави 14, Леонардо се бави рачунањем квадратних и кубних корена. За квадратне корене користи добро познату апроксимацију:

$$\sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r}{2a},$$

док за кубне корене користи две апроксимације. Најпре

$$\sqrt[3]{a^3+r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^3 - a^3} = a_1,$$

док је друга апроксимација:

$$a_2 = a_1 + \frac{a - a_1^3}{3a_1(a+1)}.$$

Заправо, као што се можете лако уверити, прва апроксимација је добијена методом две грешке (решава се једначина $x^3 = a^3 + r$ и рачунају вредности x^3 за $x = a$ и $x = a+1$) и ово је било навођено у делима исламских математичара, док за другу апроксимацију Леонардо каже: „Ја сам изумео овај начин за налажење корена."

Глава 15 је посвећена проблемима у којима се појављују линеарне и квадратне једначине, као и оне које се своде на такве. Наведимо само један пример система једначина који се разматра:

$$y = \frac{10}{x}$$

$$z = \frac{y^2}{x}$$

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Овај систем се своди на квадратну једначину по x^4:

$$x^8 + 100x^4 = 10000.$$

Кратко дело ***Flos*** (*Цвет*) Леонардо је саставио и послао Фридриху II, који је био велики покровитељ науке и уметности. У њему су између осталог, одговори на нека питања која је, као изазов, Леонарду поставио Ђовани из Палерма, који је био математичар на двору цара Фридриха II, који је тада столовао на Сицилији. Два су питања посебно занимљива.

Први проблем је био да се нађе (рационалан и позитиван) број x такав да су и x^2+5 и x^2-5 потпуни квадрати. Леонардо је, без образложења поступка дао пример: $x = \frac{5}{12}3$:

$$\left(\frac{5}{12}3\right)^2 + 5 = \left(\frac{1}{12}4\right)^2, \quad \left(\frac{5}{12}3\right)^2 - 5 = \left(\frac{7}{12}2\right)^2.$$

Метод је образложен у књизи *Liber quadratorum*.

Други проблем се састојао у решавању кубне једначине:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Леонардо је показао да ниједан рационалан број није решење ове једначине, а нису то ни квадратне ирационалности које је разматрао Еуклид у својим *Елементима*. Дакле, ни бројеви облика $\sqrt{a}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, где су a и b позитивни рационални бројеви, нису решења ове једначине. И онда је написао, отприлике, да пошто решења нису бројеви овог типа, он даје приближно решење. Изражено у сексагезималном систему решење које је дао је:

$$1;22,7,42,33,4,40.$$

Он није дао никакво објашњење како је дошао до овог решења. А приближно решење које је дао је изванредно добро. Заправо је развој у сексагезималном систему:

$$1;22,7,42,33,4,38,30,50\ldots$$

Постављају се два питања овде. Како је дошао до овог приближног решења? Зашто је последњи члан у развоју 40? Зашто није 38 или 39, ако је већ решио да заокружи резултат.

Постоје два начина на који је Леонардо могао да дође до овог резултата. Један је метод, који је био познат још одавно у Кини, а који је данас познат као Хорнеров метод за налажење корена оваквих једначина (опет нам се овај метод појављује у причи), а други је „метод двоструке грешке”, за који смо видели да га је детаљно разматрао у свом делу *Liber abbaci*.

Прикажимо сада шта је то Хорнеров метод за решавање једначина. Приказаћемо га на наведеном примеру, али ћемо ипак рачунати у децималном систему, јер нам је тако лакше. Метод се састоји у томе да се постепено формира децимални развој за тражено решење. Приметимо најпре да једначина

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

има само једно позитивно реално решење. Ми то сада знамо лако да покажемо: функција f задата са $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$ има извод $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ и он је позитиван за све вредности $x > 0$. Дакле, функција расте. Како је $f(0) = -20 < 0$ и како f неограничено расте, то ће једначина $f(x) = 0$ имати тачно једно позитивно решење. Но, Леонардо је и разматрао само позитивна решења.

Како је $f(1) = -7 < 0$, а $f(2) = 16 > 0$, решење се налази између 1 и 2. Дакле, решење је 1,…. Направимо смену: $x = y+1$. Добијамо једначину по y:

$$y^3 + 5y^2 + 17y = 7$$

и знамо да је решење између 0 и 1, тј. да је облика $0,y_1y_2\ldots$. Да бисмо нашли y_1 помножимо једначину са 10^3:

$$(10y)^3+50(10y)^2+1700\cdot(10y)=7000.$$

Смена $z=10y$ даје нову једначину:

$$z^3+50z^2+1700z=7000$$

и знамо да је решење између 0 и 10. Провером установљавамо да је решење између 3 и 4 (било би погодно применити Хорнерову схему за рачунање ових вредности, но није нам то сада много важно, јер нису компликовани полиноми којима баратамо). Дакле, решење је $z=3,\ldots$, те је решење почетне једначине: $x=1,3\ldots$. Да бисмо добили следећу цифру, радимо смену $z=u+3$ и скалирамо:

$$u^3+59u^2+2027u=1423,$$

$$(10u)^3+590(10u)^2+202700\cdot(10u)=1423000.$$

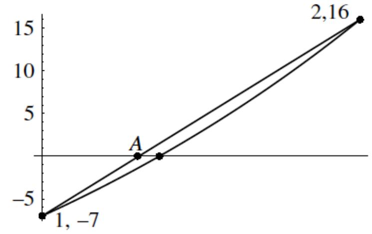
Смена $v=10u$ даје нову једначину

$$v^3+590v^2+202700v=1423000.$$

Није тешко видети да је решење између 6 и 7, те је почетно решење $x=1,36\ldots$.

Мада се бројеви повећавају, јасно је да можемо овако да наставимо док имамо стрпљења, оловке и папира.

Који је метод користио Леонардо? Наравно, немогуће је са сигурношћу одговорити на ово питање, но других метода није било, а он нигде у својим другим делима није користио овај метод, те су истраживачи у области историје математике склони томе да закључе да је користио тај метод „двоструке грешке" коме је посветио значајан део *Liber abbaci*. С обзиром да је функција $f(x)=x^3+2x^2+10x-20$ конвексна, сечица је изнад криве и стога разумне процене позиције корена и итериране апроксимације увек 'подбацују', а Леонардово решење 'пребацује'.



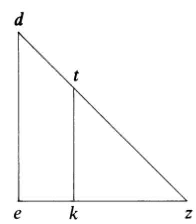
Стога је једна од сугестија истраживача да је он намерно навео тако ту погрешну последњу цифру да не ода метод. Рецимо, баш споменутом Ђованију из Палерма. У то време је било важно неке методе чувати за себе и обезбедити подршку владара или богатих мецена.

Књига *Liber quadratorum* (*Књига о квадратима*) посвећена је проблема представљања бројева у облику сума квадрата, испитивању када су бројеви неког облика квадрати и слично.

Урадимо за почетак један једноставан пример да видимо како је он то радио и које је ознаке користио. Ради се о петом проблему.

Наћи два броја тако да сума њихових квадрата чини квадрат формиран од суме квадрата друга два дата броја.

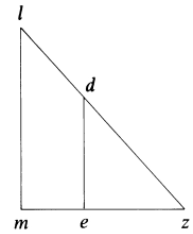
Нека су два броја $.a.$ и $.b.$ дата тако да сума њихових квадрата чини квадратни број $.g.$. Узмимо нека друга два броја чија сума квадрата јесте квадрат. Та два броја су представљена дужима $.de.$ и $.ez.$ и постављени су под правим углом, углом $.dez.$.



Квадрат над дужи $.dz.$ је једнак броју $.g.$ или није. Најпре, ако јесте, онда смо добили решење. Ако није, онда је или мањи или већи од $.g.$. Најпре, ако је већи, онда ће број $.dz.$ бити већи од квадратног корена из $.g.$; стога нека је квадратни корен из $.g.$ једнак броју $.i.$ и постављен дуж $.dz.$ и означен са $.tz.$. Из тачке $.t.$ нацртајмо $.tk.$ која је нормална на $.ez.$; $.tk.$ је стога паралелна $.de.$. Пошто је троугао $.tkz.$ сличан троуглу $.dez.$, $.zd.$ је према $.zt.$ као што је $.de.$ према $.tk.$. Али, однос $.zd.$ према $.zt.$ је познат; обе дужине су заиста познате. Због тога је и однос $.de.$ пре $.tk.$ познат. Такође је и $.de.$ познато. Стога је дуж $.tk.$ позната. Слично се показује да је и дуж $.zk.$ позната. Дакле, познати су $.tk.$ и $.kz.$ чија је сума квадрата једнака квадрату кога чини дуж $.tz.$. Али, квадрат броја $.tz.$ једнак је квадрату броја $.i.$ а $.i.$ је квадратни корен из $.g.$. Стога је квадрат над $.tz.$ једнак броју $.g.$ и два броја $.tk.$ и $.kz.$ су заиста нађена чија сума квадрата је једнака квадратном броју $.g.$. Алтернативно, нека је $.dz.$ мање од $.i.$.

Продужимо дуж $.zd.$ до $.l.$ и нека је $.zl.$ једнако броју $.i.$. Слично се $.ze.$ продужава и $.lm.$ се повеже тако да је $.lm.$ паралелно са $.de.$.

Довршава доказ исто користећи сличност троуглова и наставља конкретним примером у коме узима да је $.a. = 5$, $.b. = 12$. Стога је $.i. = 13$



и добија после образложења да је $.tk. = 11\frac{8}{17}$ (сада пишемо на стандардан начин) и $.kz. = 6\frac{2}{17}$. Има и пример за други случај.

Као што смо навели, у овој књизи је приказан и метод којим је решен један од проблема који је поставио Ђовани из Палерма. Проблем се састоји у решавању система једначина (у позитивним рационалним бројевима):

$$x^2 + 5 = y^2$$

$$x^2 - 5 = z^2.$$

Леонардо разматра општији проблем:

$$x^2 + C = y^2$$

$$x^2 - C = z^2.$$

Ако постоји решење овог проблема, онда број C назива *congruum*, а број x^2 *quadratus congruentus*. Ево како он решава овај проблем. Сабирањем се добија

$$2x^2 = y^2 + z^2.$$

Сменом $y = u + v$, $z = u - v$ горња једначина се своди на

$$x^2 = u^2 + v^2.$$

Дакле, имамо Питагорине тројке (гледамо само природне бројеве сада), те је

$$x = a^2 + b^2, \quad u = 2ab, \quad v = b^2 - a^2.$$

Леонардо добија следећу теорему.

Ако су a и b узајамно прости и $b > a$, имамо два случаја.

1. Ако су a и b непарни, онда је $C = ab(b-a)(b+a)$ *congruum*, а конгруентни квадрат је $x^2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$. На пример, ако је $a = 1$ и $b = 3$, онда је $C = 24$.

2. Ако су a и b различите парности, онда је $C = 4ab(b-a)(b+a)$ *congruum*, а конгруентни квадрат је $x^2 = (a^2 + b^2)^2$. На пример, ако је $a = 2$ и $b = 3$, онда је $C = 96$.

За $a = 1$, $b = 9$, добија: $C = 1 \cdot 9 \cdot (9-1) \cdot (9+1) = 720 = 5 \cdot 12^2$, $x = 41$, $y = 49$, $z = 31$. Дељењем са 12, добија наведено решење за $C = 5$. Истим методом добија решења и за друге вредности C.

Овде је можда занимљиво навести и појам *конгруентног броја.* То је цео број који је једнак површини правоуглог троугла са рационалним страницама. Сваки ***congruum*** јесте конгруентан број, а сваки конгруентан број је производ ***congruum***-а и квадрата рационалног броја. Како превести ***congruum***? Како је то неутрални род од ***congruus*** и како ***congruus*** значи *погодан*, а желимо да добијемо именицу, можда је *погодност* (мада је то код нас женски род) најпогоднији превод ☺.