Почеци теорије скупова (2)

Зоран Петровић

14. мај 2024.

Георг Кантор је 14. децембра 1866. године званично завршио своје студије у Берлину.

Слика 1: Георг Кантор

Он је највећи део својих студија провео управо у Берлину учећи од водећих математичара тог времена који су се тамо налазили — Кумера (Ернст Едуард Кумер, 1810–1893, немачки математичар), Кронекера (Леополд Кронекер, 1823–1891, немачки математичар) и Вајерштраса (Карл Теодор Виљем Вајерштрас,1815–1897, немачки математичар). Његов примарни интерес је у почетку био везан за теорију бројева, из те области је и његова дисертација, као и каснија хабилитација. Пошто је неко време предавао у локалној школи за девојке и положио пруски државни испит, Кантор је прихватио позицију приватдоцента на универзитету у Халеу. Посао приватдоцента је специфичан за немачки образовни систем и занимљиво је напоменути да приватдоцент нема плату од универзитета, но његов приход зависи од тога колико се студената пријави на његов курс. Звање му само омогућава да предаје на универзитету, но не гарантује приход. Но, Кантор није имао финансијских проблема и та чињеница није утицала на њега.

Слика 2: Кумер, Кронекер и Вајерштрас

Како је у раније наведеним радовима других математичара било доста речи о могућности представљања функције Фуријеовим редом, то се природно поставило питање о јединствености тог приказа. Дакле, ако функцију f прикажемо помоћу два тригонометријска реда, да ли они морају бити једнаки, тј. да ли су сви одговарајући коефицијенти једнаки. Јасно је да се то своди на следеће питање. Ако је $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0$, за све $x\in[-\pi,\pi]$, да ли нужно следи да је $a_0=a_n=b_n=0$ за све $n\geqslant 1$?

Као што смо већ раније наводили, ако би било допуштена интеграција реда члан по члан, онда би доказ био једноставан. Помножили бисмо дату једнакост са $\cos(mx)$, извршили интеграцију члан по члан на одсечку $[-\pi,\pi]$ и добили да је $a_m=0$. На сличан начин би се могло показати да су и остали коефицијенти једнаки нули. Но, интеграција на овај начин није увек могућа. Студенти који су учили о појму униформне конвергенције редова знају да она омогућава поступак интеграције члан по члан. У то време је на значај униформне конвергенције стално указивао Вајерштрас.

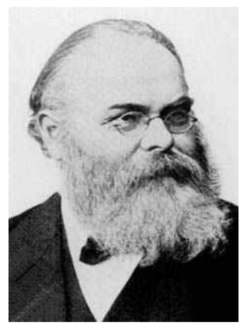
Инспирисан таквим идејама, Хајне (Хајнрих Едуард Хајне, 1821–1881, немачки математичар), за кога су наши студенти најпре чули због дефиниције граничне вредности функције преко низова, а који је у ово време већ био професор у Халеу, доказао је јединственост Фуријеовог развоја функције под слабијом претпоставком од униформне конвергенције. Наиме, он је доказао јединственост под претпоставком да постоји коначно много тачака у одсечку $[-\pi,\pi]$ тако да је конвергенција униформна на сваком интервалу који не садржи ове тачке.

Слика 3: Хајне

Јасно је да овакав резултат подстиче на генерализацију и то у два смера. Најпре се поставља питање да ли се може ослабити услов за униформну конвергенцију, а потом и да ли се може искључити и више тачака од њих коначно много. На тај начин је размишљао и Кантор.

Кантор је 1870. доказао следећи резултат: ако $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ тежи нули када n тежи бесконачности за све вредности x из неког отвореног интервала, онда и низови (a_n), (b_n) конвергирају ка 0. Да би доказао јединственост приказа нула функције тригонометријским редом, Кантор је искористио Риманов метод. Наиме, он је посматрао раније наведени ред (функцију) F која се добија двоструком формалном интеграцијом датог тригонометријског реда члан по члан. Да би показао оно што је желео, било му је битно да добије да је та функција заправо линеарна.

Заправо је баш то у писму од 17. фебруара питао свог колегу Шварца (Херман Амандус Шварц, 1843–1921, немачки математичар). Шварц му је написао да је то заиста тако и послао му је доказ тог тврђења. Одавде је следило да важи следећа једнакост:



Слика 4: Шварц

$$a_0 \frac{x^2}{2} - Cx - C' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2},$$

где је наравно претпостављено да је $0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$. Како је функција са десне стране добијене једнакости периодична са периодом 2π, то мора бити и полином са леве стране периодичан, а то је могуће једино у случају да је тај полином константан, тј. $a_0 = C = 0$. Ово је омогућило Кантору да покаже да остатак горедобијеног реда равномерно тежи нули, те је могао даље да примени идеју о интеграцији реда члан по члан (не можемо наводити све детаље у доказу) и напокон је добио да су сви коефицијенти једнаки 0. Дакле, на тај начин је доказао јединственост приказа у облику Фуријеовог реда под претпоставком да Фуријеов ред конвергира у *свакој тачки* и да се у *свакој тачки* поклапа са вредношћу функције, али *без претпоставке о униформној конвергенцији* Фуријеовог реда.

Следећи корак који је Кантор предузео је да, пошто се већ „ослободио” претпоставке о униформној конвергенцији Фуријеовог реда, покуша да ослаби и претпоставку о конвергенцији Фуријеовог реда у свакој тачки. То је и успео следеће године. У „ноти” (тако математичари често називају кратке радове) објављеној 1871. године, он наводи поједностављење претходног доказа који му је послао Шварц, али и показује да тврђење важи под слабијом претпоставком да ред не конвергира ка вредности функције у свим тачкама из $[-\pi, \pi]$, но да постоји коначно много тачака $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, у којима се то не дешава. Идеја доказа састоји се у томе да се најпре примети да, према ранијем, функција F је линеарна на сваком интервалу (x_i, x_{i+1}), тј. да је линеарна функција облика $k_i x + l_i$ на том интервалу, а потом да се покаже да се заправо ради о истој линеарној функцији на свим интервалима и тако се све сведе на претходно доказано. Следећи корак је наравно да се покуша са даљим слабљењем претпоставки, тј. да постоји *бесконачно много* тачака у којима ред не конвергира почетној функцији. Овај корак заправо представља први корак у изградњи теорије бесконачних скупова.

Дакле, претпоставимо да је скуп *изузетих* тачака, тј. оних тачака у којима не ред не конвергира ка 0, бесконачан. Према Болцано-Вајерштрасовом ставу тај скуп има тачку нагомилавања. Размотримо најпре случај да има само једну тачку нагомилавања x' и концентришимо се на конвергенцију тригонометријског реда на ограниченом интервалу (a, b) (свеједно је наравно на ком). Посматрајмо интервале (a, x') и (x', b). Ако је (s, t) било који прави подинтервал од (a, x'), онда у њему има само коначно много изузетих тачака (иначе би у њему постојала тачка нагомилавања скупа свих изузетих тачака, а по претпоставци је то само тачка x'). Но, случај коначно много изузетих тачака је већ обрађен и онда знамо да је Риманова функција F линеарна на (s, t). Но, то је непрекидна функција која је линеарна на сваком правом подинтервалу од (a, x'), па проширивањем тог произвољног подинтервала до целог (a, x') добијамо да је F заправо линеарна на (a, x'). Слично се добија да је F линеарна и на (x', b), а потом, као и раније, да је то заправо линеарна функција на (a, b).

Аналогни доказ пролази и у случају да имамо коначно много тачака нагомилавања скупа изузетих тачака (на коначно много подинтервала је F свуда линеарна, а онда се као и раније покаже да је то једна те иста линеарна функција). Шта се дешава у случају у коме скуп изузетих тачака има бесконачно много тачака нагомилавања? Поступа се као у претходном. Претпостави се најпре да тај скуп тачака нагомилавања има само тачно једну тачку нагомилавања x''. Разматрањем интервала (a, x'') и (x'', b), односно њихових правих подинтервала (s, t) добија се да у њима има само коначно много тачака нагомилавања скупа свих изузетих тачака. Но, то је већ урађено и на таквим подинтервалима је F линеарна. Даље се поступа као и у претходном.

Можемо да закључимо да постоји јасна идеја како се резултат генералише и то је било јасно и Кантору. Но, једно је идеја, а друго је реализација. Да би успешно доказао то што се наслућује као резултат, он је морао да се пре свега мало позабави прецизирањем основних резултата који се тичу теорије реалних бројева. Ма колико то било изненађујуће читаоцу, у то време та теорија није била још добро заснована.

Стога Кантор у свом раду из 1872. године почиње баш са тим. Он полази од скупа A, свих рационалних бројева, као датих и циљ му је да заснује теорију ирационалних бројева. У ту сврху посматра фундаменталне низове рационалних бројева (студентима је сигурно познатији термин Кошијеви низови, при чему треба имати на уму да се претпоставља да је ε, које се појављује у дефиницији Кошијевог низа обавезно рационалан број) и каже да је сваком таквом низу придружен један симбол. Потом дефинише уређење на тим симболима, као и аритметичке операције (рационалне бројеве види као константне низове) и пошто све то уведе у даљем те новодобијене објекте назива бројевима. Тако је добио скуп бројева B. Следећи корак савременом читаоцу делује збуњујуће. Наиме, Кантор сада посматра фундаменталне низове бројева из B и формира нови домен C (sic!). Он је потпуно свестан да тиме не добија ништа ново, као што и наши читаоци знају, али истиче концептуалну разлику B и C (подсетимо се да је ово ипак рад о јединствености тригонометријског реда и да Кантор има на уму претходно наведене идеје). После λ таквих конструкција долази до домена L. Дакле, у L су фундаментални низови фундаменталних низова ... Наравно да сваком елементу из L одговара број из B, али као што је већ наведено, Кантору је та дистинкција важна.

Следећи корак је успостављање бијекције између тако добијених реалних бројева и геометријског (једнодимензионог) континуума, тј. праве. Јасно је да избором координатног почетка и основне јединице мерења на датој правој имамо у потпуности одређене *рационалне тачке*, тј. тачке са рационалним координатама. Ако се узме нека друга тачка на правој, онда се њој може „прићи” фундаменталним низом рационалних тачака $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Кантор каже да је растојање b те тачке од координатног почетка онај број у B који одговара том фундаменталном низу. Јасно је да Кантор не може да докаже да обратно, сваком ирационалном броју одговара јединствена тачка на правој и стога он то поставља као аксиому, тј. сваком броју из B јединствено одговара тачка на правој чија је координата управо тај број. Коришћењем ове аксиоме, Кантор успоставља обострано једнозначну кореспонденцију између (аритметички) добијених скупова бројева и геометријских тачака на правој.

Долазимо до фундаменталног појма *скупа тачака прве врсте* (Кантор истиче да кад год користи термин „тачка”, он заправо има у виду број који одговара тачки на правој). Најпре Кантор дефинише појам изводног скупа: ако је дат неки скуп тачака P, онда је нека тачка тачка нагомилавања тог скупа уколико се у сваком интервалу око ње налази бесконачно много тачака тог скупа. Наравно, тачка нагомилавања може, а не мора припадати почетном скупу P. Скуп свих тачка нагомилавања Кантор је назвао „први изводни скуп скупа тачака P” и означио са P'. Овде је важно истаћи да је скуп P' на тачно одређен начин придружен скупу P. Наиме, за сваку тачку је јасно да она или јесте тачка нагомилавања скупа P, или то није. Дакле, скупу P придружујемо скуп P'. Такво 'баратање' са скуповима није било уобичајено у то време и представљало је новост и омогућавало дубљи продор у проблематику, која се истраживала.

Ако је скуп P бесконачан скуп у неком ограниченом интервалу, онда он има тачке нагомилавања, тј. скуп P' није празан (заправо се у то време празан скуп помало избегавао, па се говорило да P *има* изводни скуп). Уколико је скуп P скуп свих рационалних тачака, онда се наравно добија скуп свих тачака праве. Но, као што се из B конструише $C,\ldots,L$, тако се формирају и виши изведени скупови $P'',\ldots,P^{\lambda}$. Наравно P'' формирамо у случају бесконачности скупа P' на коначном интервалу итд. Скуп P је *скуп тачака прве врсте* уколико је $P^{(\nu)}$ коначан скуп за неки природан број ν.

Када је ове појмове јасно дефинисао и прецизирао, Кантору није било тешко да докаже генерализацију теореме о јединствености тригонометријског реда. Наиме, доказао је да је тригонометријски ред јединствено одређен под условом да је скуп изузетих тачака скуп тачака прве врсте. Доказ се заснива на раније наведеним својствима Риманове функције F. Ево како се он изводи. Како је почетни скуп P такав да је за неки природан број ν одговарајући изводни скуп коначан, то у нашем интервалу (a,b) има само коначно много тачака из $P^{(\nu)}$. Те тачке деле интервал на коначно много подинтервала. Ако посматрамо било који интервал (a_1,b_1), који је прави подинтервал од неког од њих, онда у њему има само коначно много тачака из $P^{(\nu-1)}$. У супротном, у том подинтервалу се налази тачка из $P^{(\nu)}$, а то није могуће, јер су те тачке ван тог скупа као деоне тачке почетног интервала (a,b). Поступак понављамо са свим таквим подинтервалима у којима има само коначно много тачака из $P^{(\nu-1)}$. После коначно много корака добићемо коначан број подпод...интервала у којима је само коначно много тачака из P. На њима је Риманова функција линеарна и онда постепеним повећавањем тих интервала и њиховим „лепљењем”, као што је већ наведено, добијамо да је та функција линеарна на целом почетном интервалу. Тиме је доказ сведен на основни случај.

У доказу теореме о јединствености тригонометријског реда, Кантор се концентрисао на скупове тачака прве врсте, дакле на скупове код којих је $P^{(n)}$ празан скуп за неки природан број n. Но, већ је у том раду имплицитно споменуто да се поступак налажења изводних скупова може продужити и *иза коначног* подручја. Кантор пише: „концепт броја, у смислу у коме је уведен овде, носи у себи клицу неопходне и апсолутно бесконачне екстензије”. Скупови тачака друге врсте, тј. они код којих $P^{(n)}$ није празан скуп ни за један природан број n експилицитно се помињу тек у Канторовим каснијим радовима. Но, он у напомени уз свој рад из 1880. наводи да је он низ скупова

$$P^{(\infty)}, P^{(n\infty^{\infty})}, P^{(\infty^{\infty+1})}, P^{(\infty^{\infty+n})}, P^{(\infty)n^{\infty}}, P^{(\infty^{\infty^{n}})}, P^{(\infty^{\infty^{\infty}})},$$

где је са ∞ означен најмањи бесконачни број већи од свих природних бројева, открио још пре десет година. Скуп $P^{(\infty)}$ се природно дефинише као пресек свих $P^{(n)}$ за коначне n, а онда се поставља питање постојања његовог изводног скупа (уколико он има бесконачно много тачака) $(P^{(\infty)})'$ који Кантор означава са $P^{(\infty+1)}$. Сигурно да пажљив читалац, упознат са појмом ординала, не може пропустити да уочи сличност са раније виђеним $(\omega' = \omega + 1)$, но концепт трансфинитних бројева (оних које долазе „иза коначних”) није одмах формулисан и било је потребно време да ти појмови буду усвојени. Но, јасно је да је клица садржана у овим почетним радовима.

Видљиво је да код генерализације теореме о јединствености тригонометријског реда, сам тригонометријски ред има секундарну улогу. Главна је била манипулација реалним бројевима и потпуно је природно да се Кантор у свом даљем истраживању концентрише управо на својства скупа реалних бројева, тј. на реалну праву. Но, пре него што изложимо Канторове почетне резултате, а с њима у вези и улогу, коју је Дедекинд имао у тим првим испитивањима, као и о утицају Дедекинда на увођење скупа као централног појма у математици, одговорићемо на непостављено питање пажљивог читаоца.

Наиме, ми причамо о изведеним скуповима прве и друге врсте, али да ли постоје такви примери? Не само то, него да ли су такви примери били познати у време о којем говоримо. Одговор је потврдан.

Позабавимо се најпре питањем скупова прве врсте. Ханкел (Херман Ханкел, 1839–1873, немачки математичар) је навео један такав пример. То је скуп свих бројева облика $\frac{1}{2^n}$. Јасно је да тај скуп има једну једину тачку нагомилавања 0, те он јесте скуп прве врсте. Наравно, ово је веома једноставан пример, али то је уз пример скупа свих рационалних бројева (који је наравно скуп друге врсте) био у почетку једини познат пример.

Слика 5: Ханкел

Знатно боље примере дао је Хенри Смит (Хенри Џон Стивен Смит, 1826–1883, британски математичар). Он се првенствено бавио теоријом бројева, али је боравио и у Француској те је био упознат са проблемима којима се баве математичари на континенту (као што би рекли прави Британци).

Нажалост његови резултати нису били познати (на континенту), а да јесу сигурно би то убрзало разрешавање неких проблематичних питања, која се тичу својстава скупова реалних бројева. Смит је посматрао генерализацију Хенкеловог примера. Наиме, уочимо скуп

$$P_2 = \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} : n_1, n_2 \geqslant 1 \right\}.$$

Јасно је да је $P_2' = \{0\} \cup \{1/n_1 : n_1 \geqslant 1\}$ и $P_2'' = \{0\}$. Сада се види шта треба радити.

Слика 6: Смит

Скуп

$$P_k = \left\{\frac{1}{n_1} + \cdots + \frac{1}{n_k} : n_1, \ldots, n_k \geqslant 1\right\}$$

задовољава услов $P_k^{(k)} = \{0\}$. Дакле, тако добијамо скупове прве врсте (типа n, тј. такве да је n-ти изводни скуп коначан). Како добити пример скупа друге врсте?

Први такав пример дао је Ди Боа Рејмон. Нека је p било који реалан број. Посматрамо два низа тачака (a_n) и (b_n), за које је $a_n < b_n$, а осим тога оба низа конвергирају ка p. На сваком интервалу (a_n, b_n) изаберимо скуп P_n типа n (можемо да узмемо транслацију горенаведеног скупа узимајући да су $n_i \geqslant s$ за неко довољно велико s). Нека је $P = \bigcup_{n \geqslant 1} P_n$. Није тешко уверити се да је $P^{(\infty)} = \bigcap_{n \geqslant 1} P^{(n)} = \{p\}$.

Слика 7: Ди Боа Рејмон

Вратимо се сада главном току нашег излагања. Оно што следи је можда и најинтересантнији део ове приче. Наиме, појаснићемо како је Кантор дошао до доказа непребројивости реалних бројева. Овај доказ нам сада не представља проблем, али не смемо заборавити какво је стање са основама анализе тада било (читалац се у то, надамо се, могао до сада уверити). И не, први доказ није био базиран на дијагоналном поступку (дијагонални поступак је тек доста касније откривен). Ево како се то све десило (след догађаја су историчари реконструисали на основу писама и скица писама, које су размењивали Кантор и Дедекинд).

Године 1873, прецизније, 29. новембра те године, Кантор је упутио следеће питање Дедекинду. Да ли постоји узајамно једнозначна кореспонденција (или, како би ми то краће данас рекли, бијекција) између скупа свих позитивних целих бројева и свих позитивних нумеричких величина (то јест позитивних реалних бројева)? Кантор наводи да би неко могао да укаже да је то немогуће пошто су цели бројеви дискретни, а реални нису, али он истиче да се том напоменом ништа не добија и мада он мисли да таква кореспонденција не може постојати, он ипак нема доказ те чињенице.

Дедекинд је одмах одговорио на то писмо и навео да ни он не може да докаже да таква кореспонденција не постоји, али да сматра да тај проблем није од посебног интереса. Но, он је успео да докаже да постоји бијекција између скупа свих алгебарских бројева и скупа позитивних целих бројева и тај доказ је приложио. Овде треба напоменути да су Дедекиндова писма изгубљена, али да су скице тих писама сачуване, као и то да је Дедекинд био изузетно методичан и организован научник, који је водио веома уредне записе (чак је записивао и дневне температуре!).

Слика 8: Дедекинд

Кантор је у писму од 2. децембра потврдио да је Дедекинд заиста послао доказ тог резултата. Ево како је Дедекинд доказао ту чињеницу. Сваки алгебарски број је нула неког нерастављивог полинома са рационалним коефицијентима. Но, уз помоћ множења одговарајућом константом, можемо претпоставити да се ради о полиному са целобројним коефицијентима код кога је најстарији коефицијент позитиван. Дакле, ако је ω неки алгебарски број, онда постоји полином $p(x)$ (користимо ознаке које су ови математичари користили) такав да је

$$p(\omega) = a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_n = 0.$$

Број $N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$ називамо *висином* полинома $p(x)$ (да, могли смо да не пишемо апсолутну вредност уз a_0, пошто смо претпоставили да је то позитиван број). Можемо да приметимо да за сваки позитиван број N постоји највише коначно много полинома са целобројним коефицијентима, који имају висину баш N (обратите пажњу на значај чињенице да се степен полинома n појављује у дефиницији висине полинома). Но, сваки од тих полинома има највише коначно много нула. Дакле, за фиксирано N, постоји коначно много нула полинома са целобројним коефицијентима који имају висину n. Те нуле можемо да уредимо на произвољан начин и тако добијамо да има пребројиво много алгебарских бројева (најпре узимамо бројеве висине 1, па висине 2, итд.).

Кантор је претходно разматрао постојање бијекције између скупа позитивних целих бројева и скупа ν-торки таквих бројева. Идеја му је била да свакој ν-торци $(n_1,\ldots,n_\nu)$ придружи број $n_1^2+\cdots+n_\nu^2=R$. Идеја је онда слична Дедекиндовој – за сваки R, уредити све n-торке чији је збир квадрата R на произвољан начин и тако показати да n-торки има колико и позитивних целих бројева. Кантору се чинило да је то практично исти доказ као и Дедекиднов, но то није баш тако. Наиме, ако би се у случају полинома поступило по овој идеји, онда бисмо имали проблема са чињеницом да се нигде не појављује степен полинома и да, наравно, неки од коефицијената полинома буду једнаки нули, те бисмо добили бесконачно много полинома за које је збир квадрата коефицијената једнак фиксираном броју. Дакле, без додатка степена, овакав доказ не би могао да „прође". Но, када је видео Дедекиндов доказ, Кантор је сматрао да он у суштини има сличан доказ и није имао проблема да Дедекиндов доказ у потпуности касније наведе у раду без спомињања да је доказ заправо Дедекиндов (иначе Кантор до тада нигде није писао о томе да има доказ пребројивости алгебарских бројева, нити да је тај проблем уопште разматрао). Но, више о томе касније.

Кантор се у писму од 7. децембра поново враћа питању пребројивости реалних бројева и наводи да је успео да докаже непребројивост. Ево како је изгледао тај први доказ.

Претпоставимо да се сви реални бројеви могу поређати у низ

$$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\ldots.$$

Пођимо од ω_1 и потражимо први следећи члан низа ω_α, који је већи од ω_1. Нека је затим ω_β први следећи члан који је већи од ω_α ($\beta>\alpha$) итд. На тај начин добијамо растући подниз $\omega_1^1,\omega_1^2,\ldots,\omega_1^n\ldots$ (после преозначавања) почетног низа. Понављањем поступка добијамо нови подниз итд. Дакле, на овај начин Кантор добија бесконачну матрицу

$$\begin{array}{ll}
(1) & \omega_1^1,\omega_1^2,\ldots,\omega_1^n\ldots\\
(2) & \omega_2^1,\omega_2^2,\ldots,\omega_2^n\ldots\\
\vdots & \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\\
(k) & \omega_k^1,\omega_k^2,\ldots,\omega_k^n\ldots\\
\vdots & \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots
\end{array}$$

Свака врста ове бесконачне матрице је растући низ. Сада посматрамо одсечак $[p,q]$ у коме нема елемената из прве врсте (нпр. било који одсечак садржан у интервалу (ω_1^1,ω_1^2)). Уколико у овом одсечку нема елемената из преосталих врста, доказ је готов (било који елемент из тог одсечка је тражени реални број који није набројен у почетном низу). У супротном, нека је k најмањи број такав да у том одсечку има чланова низа из k-те врсте. Тада тај одсечак сигурно садржи пододсечак $[p^{(1)}, q^{(1)}]$ у коме нема елемената k-те врсте (k-та врста представља растући низ и довољно је узети пододсечак садржан у интервалу који дефинишу узастопни чланови низа који су у $[p, q]$, а ако је само један члан k-те врсте у $[p, q]$ то је још лакше). Поступак настављамо и добијамо опадајући низ одсечака $[p^{(\nu)}, q^{(\nu)}]$, који, као што добро знамо, мора да има непразан пресек. Ма који елемент тог пресека је тражени реалан број пошто се он не може налазити у почетном набрајању – тада би онда био у некој врсти l, а пододсечак $[p^{(\nu)}, q^{(\nu)}]$ за довољно велико ν не садржи елементе врсте l.

Као што видимо, доказ није баш једноставан и Дедекинд је у писму од 8. децембра навео поједностављење овог доказа, а такође је то одмах урадио и Кантор. Доказ који је објављен доказује да се за сваки низ реалних бројева и сваки интервал (α, β) може наћи елемент η из тог интервала, који није у том низу.

Нека је дат низ $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Означимо са α', β' прва два члана тог низа који се налазе у интервалу (α, β) и за које је $\alpha' < \beta'$. Са α'', β'' означавамо прва два члана наведеног низа у интервалу (α', β') за које је $\alpha'' < \beta''$. Настављамо овај процес и добијамо низ уметнутих одсечака $[\alpha^n, \beta^n]$. Сада се разликују два случаја. Може се десити да је овај низ коначан и уколико је $[\alpha^n, \beta^n]$ последњи одсечак у том низу онда било који елемент у (α^n, β^n) није у датом низу (сем можда једног—може се десити да је у том интервалу један члан низа, али не и два, па зато не можемо наставити процес). Уколико смо добили бесконачан низ уметнутих одсечака, онда заправо имамо два низа бројева — растући и одозго ограничени низ (α^n) и опадајући одоздо ограничени низ (β^n). Дедекинд је у својој верзији доказа навео да сада на основу принципа непрекидности (Дедекинд је сматрао да чињеница да сваки растући одозго ограничени низ има граничну вредност, представља суштину појма непрекидности за реалне бројеве) добијамо да први низ има граничну вредност α^∞, а други β^∞. Кантор у публикованој верзији избацује спомињање принципа непрекидности и само наводи да ове граничне вредности постоје (касније ћемо продискутовати зашто је то урадио). Сада постоје два случаја: у првом је $\alpha^\infty = \beta^\infty$ и тада за η узимамо ту граничну вредност, а у другом је $\alpha^\infty < \beta^\infty$ и за η можемо узети ма коју вредност из интервала $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$. Овим је доказ завршен.

Дакле, видели смо како је Кантор дошао до важног резултата (и какву је улогу ту имао Дедекинд) у коме се показује да не постоји бијекција између скупа природних бројева и скупа реалних бројева, тј. да постоје два бесконачна скупа између којих се не може успоставити бијекција. Тај резултат заправо представља почетак развоја теорије бесконачних скупова. Но, погледајмо како је тај резултат Кантор представио. Видећемо да је он то урадио на помало необичан начин.

Кантор је 25. децембра 1873. године писао Дедекинду да је написао и послао у *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* рад под насловом *О једном својству колекције свих реалних алгебарских бројева.* Написао је да у почетку није имао намеру да објављује ове резултате, али је у Берлину разговарао са Вајерштрасом и он му је рекао да треба да објави резултате док год су у вези са алгебарским бројевима. Кантор је Дедекинду написао да је искористио његове коментаре и начин изражавања. Дедекинд му је сугерисао да избаци реч „реалних” из наслова, пошто резултат о пребројивости важи за све алгебарске бројеве, но Кантор је ипак задржао првобитни наслов. Интересантно је да је Вајерштрас сматрао да је резултат о пребројивости алгебарских бројева посебно занимљив и да је то заправо главни резултат тог рада (те је стога Кантор рад тако и назвао), а не чињеница да не постоји бијекција између реалних и природних (самим тим и алгебарских бројева). Наиме, Вајерштрас је резултат о пребројивости алгебарских бројева касније искористио да да пример непрекидне функције која има извод у свакој трансцендентној тачки, а ни у једној алгебарској. Осим тога, у то време, Вајерштрас је имао изузетно негативан став по питању поређења бесконачних скупова. Он је у лето 1874. држао курс у коме је навео да две бесконачно велике величине нису упоредиве и да примена појма једнакости на бесконачне величине не даје нове резултате (sic!). Касније се његов став променио, али је у то време био управо такав.

Кантор је рад организовао на следећи начин. У првом делу рада наведен је доказ (како га је дао Дедекинд) пребројивости скупа алгебарских бројева, а у другом је показано да не постоји бијекција између скупа реалних и природних бројева и затим су ови резултати примењени на нови доказ Лиувиловог резултата о постојању трансцендентних бројева. Дедекиндов допринос нигде није наведен.

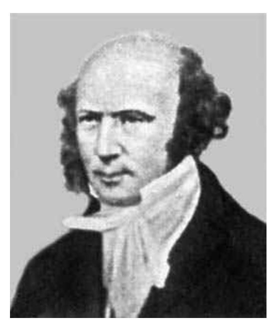
Видели смо да је под утицајем Вајерштраса истакнута пребројивост алгебарских бројева, док је напомена о непостојању бијекције између скупа природних бројева и скупа реалних бројева само укратко наведена и то при исправљању рада у припреми за штампу (навели смо негативан Вајерштрасов став по питању поређења бесконачних скупова). Разлог за искључивање спомињања Дедекинда, па и неистицање принципа непрекидности у доказу, састоји се у следећем. Кантор је био ученик веома утицајне берлинске школе и знао је да водећи професори у Берлину Кумер и Кронекер имају помало негативан став према Дедекинду због његове алгебарске теорије бројева. Наиме, Кронекер је тврдио да је исту ту теорију он имао још 1858. године, али да је није објавио и они никада нису признали Дедекиндов приоритет у тој области. Кантор је касније, развијајући даље своју теорију бесконачних скупова дошао у сукоб са Кронекером, но у времену о коме говоримо, он је био у добрим односима са берлинском школом и рачунао је да су му они потребни за даљу каријеру (но, испоставило се да он никада прешао из Халеа на неко престижније место). Дедекинд је изразио своје чуђење што је Кантор навео његове доказе без спомињања извора и од тада су њихови односи помало захладнели и на писма која му је Кантор упућивао често није одговарао.

Због ограничености (по обиму) овог прегледа, нећемо се бавити Канторовим даљим радом. Тај рад је изузетно значајан и било би потребно доста простора да би се описао.

Ради комплетније слике почетака теорије скупова и то посебно увођења терминологије скупова и функција у све математичке области посветићемо се мало Дедекиндовом доприносу.

Дедекинд је своју хабилитацију одбранио 1854, само неколико дана после Римана, такође у Гетингену. Наслов теме био је: „О увођењу нових функција у математику“. У оквиру те теме он је говорио о тригонометријским функцијама, интеграцији и елементарној аритметици. Дедекинд је тиме започео један програм, који је заправо следио током целе своје каријере. Наиме, идеја грађења бројева почев од природних бројева је нешто о чему је он писао у више објављених и необјављених радова. На самом почетку је централну улогу дао операцијама (дакле функцијама), тј. идеја конструкције све шире класе бројева била је условљена операцијама које вршимо у постојећој класи, прецизније могућности, односно немогућности извођења инверзних операција. У својим каснијим радовима, саме скупове је поставио у центар интересовања.

Године 1857, Дедекинд је прочитао Хамилтоново (Сер Вилијам Роуен Хамилтон, 1805–1865, британски математичар) дело *Лекције о кватернионима.* Као што се комплексни бројеви добијају као уређени парови реалних бројева са одговарајуће дефинисаним операцијама, на сличан начин се кватерниони добијају из комплексних. Множење кватерниона није комутативно, али сва остала својства су задржана. Дедекинд је очигледно закључио да су те конструкције (комплексних бројева и кватерниона) добро изведене и никада се у својим радовима није бавио питањем конструкције нпр. комплексних бројева. Но, бавио се конструкцијом целих и рационалних бројева, као и реалних бројева. Целе и рационалне бројеве је конструисао попут конструкције коју ми данас користимо – помоћу уређених парова са одговарајућим идентификацијама, а што се тиче конструкције реалних бројева, присетимо



Слика 9: Хамилтон

се Дедекиндовог реза из Анализе 1. Нас ће овде највише занимати Дедекиндов поглед на природне бројеве.

Главно Дедекиндово дело, које се бави заснивањем математике је *Was sind und was sollen die Zahlen*, објављено 1888. Најчешћи превод овог наслова је *Шта су и чему служе бројеви*, али, имајући у виду садржај дела, превод могао да буде и *Шта су и чему би требало да служе бројеви.* Ми ћемо се позабавити овим делом, као и рукописима, који су му претходили.

Као што смо већ навели, Дедекинд је био темељан математичар, који није журио са објављивањем радова пре него што би они достигли онај ниво свеобухватности и целовитости који је он желео. Дакле, он је следио Гаусову максиму: *мало, али зрело.* Било је случајева када се то лоше одразило на његову каријеру (недовољан број објављених радова), али он се тог принципа држао целог живота.

У рукописима насталим између 1854. и 1872. године можемо наћи да је Дедекинд природне бројеве градио почевши од броја 1 и формирајући *следбенике* бројева додавањем јединице. Сабирање је дефинисао формулом $a+(b+1)=(a+b)+1$. Занимљиво је да је Дедекинд многе идеје на основу којих су базирани резултати из тог главног његовог рада о заснивању бројева, наводио у писму извесном гимназијском професору Кеферштајну, а пропустио да их наведе у самом раду и тиме тај рад учинио неразумљивијим и мање схваћеним од стране професионалних математичара. Касније је операцију сабирања дефинисао апстрактније, као функцију φ, која има својства $\varphi(a,d(b)) = d\varphi(a,b)$ и $\varphi(a,1) = d(a)$, где је $d:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ функција која представља „додавање јединице”.

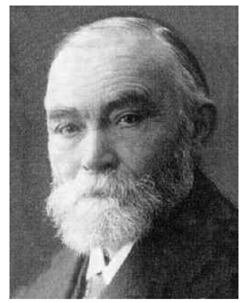
Пређимо сада на само дело. На самом почетку, Дедекинд уводи основну скуповну терминологију: *систем* (скуп), *ствар* (елемент скупа), *део* (подскуп), *прави део* (прави подскуп), *комбинован систем* (унија скупова), *заједница система* (пресек скупова).

Читаоци који су упознати са Хилбертовим (Давид Хилберт 1862–1943, немачки математичар) делом *Основи геометрије*, сигурно су ову терминологију препознали пошто на почетку овог дела Хилберт наводи: „*Разматраћемо три система ствари. Ствари првог система зваћемо тачке.*” Хилберт је тада користио Дедекиндову терминологију.

Слика 10: Хилберт

Поред појма скупа навео је и појам пресликавања и то практично у смислу у коме се у модерној математици оно и уводи — пресликавање система S је *закон* по коме ствари s из S одговара ствар $\varphi(s)$, која се зове слика од s. Дефинисао је и композицију пресликавања. Дедекинд је навео да је овим дао *дефиницију* појма пресликавања, мада са логичке тачке гледишта то се не може назвати дефиницијом (јер, шта је то *закон*?), но само појашњењем.

Као главне недостатке Дедекиндове презентације скупова, истакнути логичар Фреге (Фридрих Лудвиг Готлиб Фреге, 1848–1925, немачки математичар) је навео:



Слика 11: Фреге

1) Нејасно разликовање релације припадности и подскупа.

2) Често неразликовање једночланог скупа и његовог елемента.

3) Избацивање празног скупа.

Наравно, чињеница да постоје овакви проблеми код Дедекинда, не оправдава садашње студенте математике да праве такве грешке! Подсетимо се да је Пеано (Ђузепе Пеано, 1858–1932, италијански математичар) баш у вези са оваквим примедбама увео посебну ознаку, коју и данас користимо, за припадност елемента скупу, док је Дедекинд раније имао појам празног скупа, али га је ипак из публикованог рада избацио.

Слика 12: Пеано

Велики недостатак Дедекиндовог погледа на скупове је и у прихватању постојања универзалног скупа, тј. скупа свих скупова, а знамо да се на тај начин парадокси појављују у теорији скупова, но у тренутку објављивања, то још није било видљиво.

Посветимо се за крај најзанимљивијем појму, са аспекта теорије скупова, који је Дедекинд увео у овом раду, а то је појам *ланца*. Упозоримо одмах да се не ради о појму ланца у вези парцијалног уређења.

Идеја ланца је добијена из идеје математичке индукције, тј. разматрањем доказа помоћу индукције. Ако је дато пресликавање $\varphi : S \to S$, онда подскуп K од S зовемо *ланац* уколико је $\varphi[K] \subseteq K$ (са $\varphi[S]$ означавамо слику подскупа K при пресликавању φ). Дедекинд уводи појам *ланца система* (сетимо се да је тако Дедекинд називао скуп). Наиме, ако је $A \subseteq S$ и $\varphi : S \to S$, онда је *ланац система* A по дефиницији пресек свих ланаца (дакле свих подскупова K скупа S за које је $\varphi[K] \subseteq K$), чији је A подскуп. Ознака коју Дедекинд користи да означи ланац скупа A је A_0 (а понекад користи и ознаку $\varphi_0(A)$). Видећемо ускоро како је ова идеја повезана са аксиоматиком природних бројева, као и са Кантор-Бернштајновом теоремом.

Дедекинд је имао оригиналну идеју — да заснује коначно (природне бројеве) на бесконачном. Стога му је био потребан појам бесконачног скупа. Ту дефиницију је он формулисао још 1872. године. Наиме, скуп S је бесконачан ако постоји бијекција (користимо савремену терминологију) између S и неког његовог правог подскупа. У супротном је коначан. Оригиналност ове идеје је наравно у чињеници да се овде нешто што уопште није спорно, попут природних бројева заснива на нечем што су многи математичари као што смо видели, избегавали да користе, тј. на појму стварне бесконачности.

Ево како је Дедекинд увео природне бројеве. Основни појам је појам *просто бесконачног* скупа. Скуп N је просто бесконачан уколико постоји „1–1" пресликавање $\varphi : N \to N$ (Дедекинд је „1–1" пресликавања називао *слична* или *истакнута*), тако да је N ланац једног елемента који не припада $\varphi[N]$. Овај истакнути елемент зове се базни елемент и означава са 1. Овде поново имамо проблем са Дедекидновом терминологијом, пошто заправо N не може бити ланац неког елемента, но ланац једночланог скупа са тим елементом као јединим својим чланом, али видимо да се то лако исправља. Дакле имамо четири важна услова:

(α) $\varphi[N] \subseteq N$;
(β) $N = \{1\}_0$;
(γ) $1 \notin \varphi[N]$;
(δ) φ је „1–1“.

Да ли је неко споменуо Пеанове аксиоме? Пеано је своје аксиоме објавио 1899. године и навео је да јесте консултовао овај Дедекиндов рад, но сам је пре тога дошао до њих. Но, ево их и овде код Дедекинда.

За крај излагања о Дедекиндовом доприносу теорији скупова, наведимо и горе споменуту везу ланаца и Кантор-Бернштајнове теореме.

Кантор и Дедекинд су се у септембру 1882. године срели у Харцбургу и наравно разговарали о математици. Кантор је тада информисао Дедекинда (а то се види и из писма из новембра те године) да има проблема са доказом следећег тврђења:

Ако је $M'' \subseteq M' \subseteq M$ и ако постоји бијекција између M и M'' онда постоји бијекција између M и M'.

Јасно је да је ово тврђење еквивалентно Кантор-Бернштајновој теореми.

Ево које се тврђење може наћи у наведеном Дедекиндовом раду о бројевима.

Нека је φ дато пресликавање и уведимо ознаку $K' = \varphi[K]$. Претпоставимо да је $K' \subseteq L \subseteq K$. Дакле и K и L су ланци. Дедекинд пише да се при овим условима увек може извршити следећа декомпозиција L и K. Нека је $U = K \backslash L$ и $V = K \backslash U_0$. Тада је

$$K = U_0 \cup V \text{ и } L = U'_0 \cup V.$$

Овај доказ Дедекинд оставља читаоцима (а то ћемо и ми урадити!) и даље га уопште не коментарише. Но, није тешко видети да се у случају да је φ „1–1" добија тражено Канторово тврђење (сугеришемо читаоцу да то сам уради). Подсетимо се да је Дедекинд био врло систематична особа, тако да није могуће да се он није присетио питања које му је поставио Кантор. Пре ће бити да је Дедекинд решио да се мало, да се тако изразимо, нашали са Кантором (а треба имати у виду и ранија искуства која је имао у преписци са њим) и да провери да ли ће он успети да препозна тражено тврђење. Тешко је поверовати, али Кантор не само да је чак и 1895. године сматрао да теорема још није доказана, него се и негативно изразио о овом Дедекиндовом раду, који је описао као вештачки систем од 172 тврђења, који се баве најелементарнијим и понекад најтривијалнијим својствима бројева и који уместо да појасне, само још више замагљују природу бројева! Као поука ове приче може се закључити да треба пажљиво читати дела истакнутих аутора—можда су они доказали баш оно што нам треба, а нису то желели да истакну!

Кратак преглед филозофије математике XX века

Ако се математика сматра науком, онда се филозофија математике може сматрати за грану филозофије науке уз, на пример, филозофију физике или филозофију биологије. Но, због свог предмета истраживања, филозофија математика заузима посебно место у филозофији науке. Док природне науке истражују ентитете који су лоцирани у простору и времену, никако није очигледно да је то тако са објектима који се изучавају у математици. Не само то, методи истраживања се у математици значајно разликују од метода истраживања у природним наукама. Док се у природним наукама општа знања стичу индуктивним методама, за математичка знања се чини да се добијају на другачији начин: дедукцијом из основних принципа. Статус математичког знања такође изгледа различито од статуса знања у природним наукама. Теорије у природним наукама делује много мање сигурно и много су отвореније за ревизије него што је то случај са математичким теоријама. Због ових разлога математика пред филозофију поставља проблеме сасвим другачије врсте. Стога су филозофи посветили посебну пажњу онтолошким и епистемолошким питањима у вези математике.

1 Филозофија математике, логика и заснивање математике

Са једне стране, филозофија математике се бави проблемима који су блиско повезани са централним проблемима метафизике и епистемологије. На први поглед, чини се да математика истражује апстрактне ентитете. Поставља се питање шта је природа математичких ентитета и како можемо имати знања о њима. Ако се ови проблеми сматрају за претешке, можда треба покушати да се види да ли математички објекти ипак некако припадају конкретном свету.

С друге стране, показало се да је до неке мере могуће математичке методе искористити за филозофска питања која се тичу математике. Окружење у коме је то урађено представља математичка логика која у себи укључује теорију доказа, теорију модела, теорију скупова и теорију израчунљивости као своје подобласти. Дакле, у XX веку су започела математичка истраживања у суштини филозофских теорија, која се тичу природе математике.

Када се професионални математичари баве основима свог предмета истраживања, за њих се каже да се баве истраживањем заснивања математике. Када професионални филозофи истражују филозофски питања о математици, за њих се каже да доприносе филозофији математике. Наравно, разлика између филозофије математике и основа математике је суптилна и што више има интеракције међу филозофима и математичарима о питањима која се тичу природе математике, тим боље.

2 Четири школе

Појаснимо најпре шта је то МАТЕМАТИЧКИ ПЛАТОНИЗАМ. Кратко речено, у његовој су основи три тезе.

Постојање. Постоје математички објекти.

Апстрактност. Математички објекти су апстрактни.

Независност. Математички објекти су независни од интелигентних бића, њиховог језика, мисли и праксе.

Дакле, математичке истине се ОТКРИВАЈУ, оне се не ИЗМИШЉАЈУ.

Општи филозофски и научни поглед у XIX веку био је усмерен ка емпиријском: платонистички аспекти рационалистичких теорија о математици се убрзано губили подршку. Посебно је на, некад високо хваљену, способност рационалне интуиције гледано са сумњом. Тако да се поставио изазов да се формулише филозофска теорија математике која би била слободна од платонистичких елемената. У првим деценијама

XX века, четири неплатонистичка приступа математици су развијена: логицизам, формализам, интуиционизам и предикативизам. Због случајних историјских услова, овај последњи није развио свој пуни потенцијал до шездесетих година, али ипак заслужује своје место поред три прве традиционалне школе.

2.1 Логицизам

Програм логицизма састоји се у покушају да се математика редукује на логику. Како би логика требало да је неутрална у погледу онтолошких питања, изгледало је да је овај пројекат у складу са антиплатонистичком атмосфером тог времена.

Идеја да је математика прерушена логика била је, као што смо навели, присутна још код Лајбница. Али јак покушај да се у потпуности спроведе програм логицизма био је могућ једино када су се у XIX веку основни принципи централних математичких теорија јасно формулисали, а принципи логике разоткрили од стране Фрегеа.

Фреге је посветио значајан део своје каријере покушавајући да покаже како се математика може свести на логику. Успео је да изведе принципе Пеанове аритметике другог реда из основних закона система логике другог реда. То извођење није имало грешку. Но, он се ослањао на један принцип за који се испоставило да ипак није био логички принцип. Радило се о његовом Основном закону V:

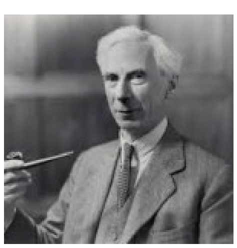
$$\{x : Fx\} = \{x : Gx\} \text{ акко } \forall x(Fx \iff Gx).$$

У чувеном писму Фрегеу из 1902, Расел је показао да овај закон укључује контрадикцију. То нам је данас познато као Раселов парадокс. Наиме, ако за Fx узмемо $x \notin x$, а за Gx узмемо $x \in S$, где је $S = \{x : Fx\}$, онда имамо да је

$$\{x : x \notin x\} = S = \{x : x \in S\},$$

те лева једнакост важи. Но, ако се посматра наведена еквиваленција, она се своди на $\forall x(x \notin x \iff x \in S)$. А ако за x узмемо баш S онда добијамо $S \notin S \iff S \in S$.

Сам Расел је потом покушао да редукује математику на логику на други начин.



Слика 13: Расел

Фрегеов Основни закон V је укључивао у себи да за сваку особину математичких ентитета постоји класа математичких ентитета који задовољавају ту особину. То је евидентно било сувише јако пошто је баш то довело до Раселовог парадокса. Стога је Расел постулирао да само својства математичких објеката, за која је већ показано да постоје, одређују класе. Предикати који имплицитно упућују на класе за које тек треба да буде утврђено да ли постоје, не одређују класу. Тако је добијена структура својстава по типовима: својства основних објеката, својства основних објеката и класе основних објеката, итд. Ова структура својстава по типовима одређује слојевит универзум математичких објеката полазећи од основних објеката за којима следе класе основних објеката, потом класе основних објеката и класа основних објеката, итд.

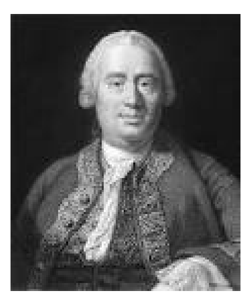
Нажалост, Расел је открио да принципи његове логике типова нису били довољни чак ни да изведу основне законе аритметике. Било му је неопходно, између осталог, да постави као основни принцип постојање бесконачне колекције основних објеката. То би се тешко могло сматрати логичким принципом. Тако да ни други покушај свођења математике на логику није успео.

И тако су ствари стајале више од педесет година. Године 1983, појавила се књига Криспина Врајта о Фрегеовој теорији природних бројева. У њој је аутор „удахнуо” нови живот логицистичком пројекту. Приметио је да се Фрегеово извођење Пеанове аритметике другог реда може поделити у две етапе. У првој етапи, Фреге користи неконзистентан Основни закон V да изведе оно што је постало познато као Хјумов принцип:

$$\text{број } F\text{-ова} = \text{броју } G\text{-ова акко је } F \approx G,$$

где $F \approx G$ значи да су F-ови и G-ови у „1–1” кореспонденцији један са другим (ова се релација може изразити у логици другог реда). Потом се, у другој етапи, принципи Пеанове аритметике другог реда изводе из Хјумовог принципа и прихваћених принципа логике другог реда. Посебно, Основни закон V није потребан у другом делу извођења. Штавише, Врајт је поставио хипотезу да је, за разлику од Фрегеовог Основног закона V, Хјумов принцип конзистентан. Касније су други аутори показали да је то заиста тако.

Врајт је отишао чак дотле да тврди да се Хјумов принцип може сматрати за логичку истину. Ако је то тако, онда се бар Пеанова аритметика другог реда може редуковати на логику. Тако је рођена нова форма логицизма. Данас је тај поглед познат као нео-логицизам. Већина данашњих филозофа математике сумња у то да је Хјумов принцип логички принцип. Ипак, већина осећа да је увођење природних бројева преко Хјумовог принципа привлачно и са онтолошке и са епистемолошке тачке гледања. Неки сматрају да није много потребно да би се Хјумов принцип прихватио. Из ових разлога за природне бројеве и мате-



Слика 14: Хјум

матичке објекте који се овако могу увести користе назив лаки математички објекти.

Врајтов рад је скренуо пажњу филозофа математике на врсту принципа попут Основног закона V и Хјумовог принципа. Они се називају принципи апстракције. Тренутно, филозофи математике покушавају да конструишу опште теорије принципа апстракције које би објасниле који су од ових принципа прихватљиви, а који не и зашто је то тако. Осим тога, показало се да је у контексту ослабљених верзија логике другог реда, Фрегеов Основни закон V конзистентан. Но, те ослабљене теорије омогућавају извођење веома слабих аритметичких теорија из Основног закона V.

2.2 Интуиционизам

Интуиционизам потиче од рада холандског математичара Брауера и инспирисан је Кантовим ставовима о природи објеката.

Слика 15: Брауер

По интуиционизму, математика је суштински активност конструисања. Природни бројеви су менталне конструкције, реални бројеви су менталне конструкције, докази и теореме су менталне конструкције, математичко значење је ментална конструкција... Математичке конструкције производи *идеални* математичар, тј. изводи се апстракција из физичких ограничења стварних математичара. Али, чак и идеални математичар остаје коначно биће. Ни идеални математичар не може извести бесконачну конструкцију, мада може довршити произвољно велике почетне делове те конструкције. То показује да интуиционизам оштро одбија постојање стварне (или заокружене) бесконачности. Само су потенцијално бесконачне колекције дате при активности конструкције. Основни пример је сукцесивна конструкција у времену, појединачних природних бројева.

Из ових општих разматрања о природи математике, базираних на стању људског ума, интуиционисти изводе ревизионистички став у логици и математици. Они не прихватају неконструктивне егзистенцијалне доказе. Такви докази тврде да показују постојање математичких ентитета са одређеним својством без, чак и имплицитно, давања метода да се генерише пример таквог ентитета. Интуиционисти одбацију неконструктивне доказе егзистенције као 'теолошке' и 'метафизичке'. Карактеристично свовство неконструктивних доказа егзистенције је да они суштински користе принцип искључења трећег

$$\phi \vee \neg\phi$$

или неки од његових еквивалената, као што је принцип двоструке негације

$$\neg\neg\phi \Rightarrow \phi.$$

У класичној логици, ови принципи су валидни. Логика интуиционистичке математике се добија одстрањивањем принципа искључења трећег (и његових еквивалената) из класичне логике. То наравно доводи до ревизије математичког знања. На пример, класична теорија елементарне аритиметике више није прихватљива. Уместо тога, предлаже се интуиционистичка теорија аритметике (која се назива *Хејтингова аритметика*), која не садржи принцип искључења трећег. Мада је интуиционистичка елементарна аритметика слабија од класичне елементарне аритметике, разлика није велика.

Постоји прост синтаксни превод који преводи све класичне теореме аритметике у теореме које су интуиционистички доказиве.

Слика 16: Хејтинг

У првим деценијама XX века, делови математичке заједнице су имали симпатија према интуиционистичкој критици класичне математике и алтернативама које је предлагала. То се променило када је постало јасно да је у напредној математици интуиционистичка алтернатива драстично различита од класичне теорије. На пример, интуиционистичка математичка анализа је веома компликована теорија и веома је различита од класичне математичке анализе. Ово је пригушило ентузијазам математичке заједнице ка интуиционистичком пројекту. Без обзира на то, следбеници Брауера су наставили да развијају интуиционистичку математику и до данашњих дана.

2.3 Формализам

Давид Хилберт се слагао са интуиционистима да су у одређеном смислу природни бројеви основни у математици. Но, за разлику од интуициониста, Хилберт није сматрао да су природни бројеви менталне конструкције. Његов аргумент је био да се природни бројеви могу узети као *симболи.* Симболи су, стриктно говорећи, апстрактни објекти. Но, есенцијално за симболе је то што они могу бити остварени конкретним објектима, тако да их можемо називати *квази-конкретним* објектима. Можда физички објекти могу играти улогу природних бројева? На пример, можемо узети конкретан траг мастила облика $|$ да буде број 0, конкретно реализован траг мастила $\|$ да буде број 1, итд. Хилберт је сматрао да је сумњиво да би се напредна математика могла интерпретирати на сличан директан или чак можда конкретан начин.

За разлику од интуициониста, Хилберт није био спреман да заузме ревизионистички став ка постојећем математичком знању. Уместо тога је заузео инструменталистички став у односу на напредну математику. Сматрао је да је напредна математика ништа друго до формална игра. Тврђења математике вишег реда су неинтерпретирани низови симбола. Доказивање тих тврђења није ништа друго до игра у којој се симболима манипулише у складу са фиксираним правилима. Поента 'игре више математике' састоји се, по Хилбертовом гледишту, у доказивању тврђења елементарне аритметике која *имају* директну интерпретацију.

Хилберт је сматрао да не постоји основана сумња у исправност класичне Пеанове аритметике — или бар у исправност њеног подсистема који се назива ПРИМИТИВНА РЕКУРЗИВНА АРИТМЕТИКА. И сматрао је да се свако аритметичко тврђење, које се може доказати коришћењем напредне математике, може такође директно доказати у Пеановој аритметици. Наравно, решавање аритметичких проблема у аритметици је у неким случајевима практично немогуће. Историја математике нам је показала да 'скретање' у вишу математику може понекад водити до доказа аритметичког тврђења који је много краћи и који нам даје дубљи увид, него што је то чисто аритметички доказ тог тврђења.

Хилберт је, не баш најјасније, схватио да се за нека од његових убеђења може сматрати да су заправо математичке хипотезе. Наиме, доказ је, у формалном систему напредније математике, или и елементарне аритметике, коначан комбинаторни објекат који се може кодирати као природан број. Но, двадесетих година XX века детаљи кодирања доказа као природних бројева нису још били потпуно схваћени.

За формалистичко гледиште, минимални захтев за формални систем напредније математике је да мора бити бар конзистентан. Иначе би се свако тврђење у њему могло доказати. Хилберт је, такође не сасвим јасно, видео да конзистентност таквог система укључује да је он бар делимично аритметички исправан. Стога су Хилберт и његови студенти почели да доказују тврђења попут конзистентности стандардних постулата математичке анализе. Наравно, таква тврђења морају бити доказана у „безбедном” делу математике, као што је елементарна аритметика. Иначе доказ не би увећао наше уверење у конзистентност математичке анализе. И, срећом, изгледало је да је у принципу то могуће урадити, пошто су у коначној анализи, тврђења о конзистентности, поново до на кодирање, аритметичка тврђања. Тако, ради прецизности, Хилберт и његови студенти су започели доказивање конзистентности, на пример, аксиома математичке анализе у класичној Пеановој аритметици. Овај пројекат је постао познат као *Хилбертов програм.* Испоставило се да је много тежи него што су они очекивали. Заправо, нису чак успели да докажу конзистентност аксиома Пеанове аритиметике у Пеановој аритметици.

Тада је Курт Гедел доказао 1931. године, да постоје аритметичка тврђења која су неодлучива у Пеановој аритметици. Овај резултат је постао познат као Геделова *прва теорема о некомплетности.* Ово није било добро за Хилбертов програм, али је остављало отвореном могућност да конзистентност више математике НИЈЕ једно од тих неодлучивих тврђења. Нажалост, Гедел је брзо схватио да, ако је Пеанова аритметика конзистентна, сама њена конзистентност се не може доказати у оквиру ње саме. То је Геделова *друга теорема о некомплетности.* Испоставило се да се Геделове теореме о некомплетности генерално могу применити на довољно јаке, али конзистентне рекурзивно аксиматизабилне теорије. Све заједно ово доводи до пропасти Хилбертовог програма. Испоставља се да се виша математика не може интерпретирати на чисто инструментапан начин. Виша математика може доказати аритметичка тврђења, попут ставова о конзистентности, који су ван домашаја Пеанове аритметике.

Слика 17: Гедел

Све ово не значи крај формализма. Чак и ако се узму у обзир теореме о некомплетности, кохерентно је сматрати да је математика наука о формалним системима.

Једну верзију овог приступа предложио је Кари крајем педесетих година XX века. У овом приступу се математика састоји од колекције формалних система који немају интерпретацију или предмет изучавања, сем што се то не примењује на метаматематику, која проучава саму математику. У односу на формални систем, каже се да је тврђење тачно ако и само ако се може извести унутар система. Али, на фундаменталном нивоу, сви математички системи су равноправни. Могу евентуално постојати неки практични разлози за преферирање једног система у односу на други. У неконзистентним системима се могу доказати сва тврђења, те су они бескорисни. Тако да ако се за систем установи да је неконзистентан, он мора бити модификован. Просто, лекција коју добијамо од Геделових теорема о некомплетности је да довољно јаки конзистентни системи не могу доказати сопствену конзистентност.

Постоји стандардна примедба против Каријеве формалистичке позиције. У стварности математичари не третирају наизглед конзистентне системе као равноправне. Многи од њих нису спремни да признају да се преференца ка аритметичким системима у којима су аритметичка тврђења која изражавају конзистентност Пеанове аритметике изводива, у односу на оне у којима је њена негација изводива, може заправо објаснити у чисто прагматичким терминима. Многи математичари желе да тврде да је уочена коректност (некорекност) неких формалних система ипак објашњива чињеницом да они коректно (некоректно) описују неку област истраживања.

Детлефсен (1986) је истакао да теореме о некомплектности НЕ искључују да се конзистетност делова више математике која се у пракси користи за решавање аритметичких проблема за које су математичари заинтересовани, може аритметички установити. На овај начин, нешто се можда може „спасти” чак и ако је Хилбертов инструменталистички став у односу на сву вишу математику напослетку неодржив.

Ајзаксон (1987) је учинио другачији покушај да спасе део Хилбертовог програма. Он брани став да, у неком смислу, Пеанова аритметика ипак може бити комплетна. Његов аргумент је да се истините реченице које су неодлучиве у Пеановој аритметици могу доказати помоћу концепата вишег реда. На пример, конзистентност Пеанове аритметике може се доказати индукцијом до бесконачног ординала (Генцен, 1938). Али појам ординала је теоретско-скуповни и стога неаритметички концепт. Ако једини начини да се докаже конзистентност аритметике суштински користе појмове који свакако припадају математици вишег реда, онда је конзистетности аритметике, мада се може изразити језиком Пеанове аритметике, неаритметички проблем. И, генералишући ово, можемо се запитати да ли је Хилбертова претпоставка да се сваки аритметички проблем може разрешити помоћу аксиома Пеанове аритметике, ипак тачна.

2.4 Предикативизам

Као што је раније напоменуто, предикативизам се обично не сматра за једну од школа. Но, то је само због стицаја околности да се пре Другог светског рата предикативизам није уздигао до нивоа других школа.

Почетак предикативизма је заправо у Раселовом раду. На инсистирање од стране Поенкареа, Расел је дошао до следеће дијагнозе Раселовог парадокса. Резоновање у Раселовом парадоксу дефинише колекцију S свих математичких објеката x који задовољавају $\neg(x \in x)$. Затим се проверава да ли сам S задовољава овај услов и долази се до контрадикције.

Поенкаре-Раселова дијагноза указује на то да ова дефиниција не истиче уопште неку колекцију: немогуће је дефинисати колекцију S условом којим се имплицитно позива на сам S. То се назива *принципом зачараног круга.* Дефиниције које крше овај принцип називају се *импредикативним.* Здрава дефиниција неке колекције се позива само на ентитете који постоје независно од колекције која се дефинише. Такве дефиниције називају се *предикативним.*

Слика 18: Поенкаре

Као што је Гедел касније истакао, Платониста би сматрао да је овај начин размишљања неубедљив. Ако математичке колекције постоје независно од чина дефинисања, тада није одмах јасно зашто не би постојале и колекције које се могу дефинисати само импредикативно.

Све ово је довело Расела да развије просту и разгранату теорију типова, у коју су уграђене синтаксне рестрикције које чине импредикативне дефиниције лоше формираним. У простој теорији типова, слободне промењливе у дефинишућим формулама пролазе кроз ентитете којима колекција која се дефинише не припада. У разгранатој теорији типова, захтева се додатно да област везаних промењливих у дефинишућим формулама не укључује колекцију која се дефинише. Раселова теорија типова се не може видети као редукција математике на логику. Али, чак и ако то оставимо по страни, рано је примећено да је, посебно у разгранатој теорији типова, прилично компликовано формализовати обичне математичке аргументе.

Када се Расел окренуо другим областима аналитичке филозофије, Херман Вајл је преузео на себе да подржава предикативизам у свом раду из 1918. године.

Слика 19: Вајл

Као и Поенкаре, Вајл није делио Раселову жељу да математику сведе на логику. И одмах од почетка је увидео да би у пракси било немогуће радити у разгранатој теорији типова. Вајл је развио филозофски став који је у суштини између интуиционизма и платонизма. Сматрао је да је колекција природних бројева без проблема задата. Али концепт произвољног подскупа скупа природних бројева није био непосредно прихватљив за математичку интуицију. Само они подскупови који су задати аритметичким (тј. оним првога реда) предикатима су сматрани за предикатски прихватљиве.

Са једне стране показало се да су многе дефиниције у математичкој анализи импредикативне. На пример, минимално затварање операције на скупу се обично задаје као пресек свих скупова који су затворени у односу на примене те операције (на пример, подгрупа генерисана неким скупом елемената, или затворење скупа у метричком или тополошком простору). Али само минимално затворење је један од скупова који је затворен у односу на примене те операције. Стога је таква дефиниција импредикативна. На овај начин, пажња се постепено пребацивала са бриге о теоретско-скуповним парадоксима на улогу импредикативности у математици коју већина математичара развија. Са друге стране, Вајл је показао да је често могуће заобићи импредикативне појмове. Чак се показало да је највећи део математичке анализе XIX века потврђен на предикативној основи.

Двадесетих година XX века, дошло је до промене. Вајл се прикључио Брауеровом радикалнијем интуиционистичком пројекту. У међувремену, математичари су постали убеђени у то да је високо импредикативна теорија бесконачних скупова коју су развијали Кантор и Цермело много мање угрожена Раселовим парадоксом него што се пре сумњало. Ови фактори су утицали на то да се предикативизам пребаци у стање мировања током више деценија.

Коришћењем опште теорије рекурзије, Соломон Феферман је шездесетих година XX века поново обновио пројекат предикативизма проширивши га на ординале. Његови, али и радови других, показали су да је највећи део анализе XX века прихватљив са становишта предикативизма. Но, наравно да није све што данашња савремена математика прихвата, прихватљиво и са те тачке гледишта.

3 Платонизам

У годинама пред Други светски рат, постало је јасно да су многе озбиљне примедбе биле постављене против сваког од три главна антиплатонистичка програма у филозофији математике. Предикативизам је можда изузетак, али је у то време то био програм без оних који га могу бранити. Стога је створен простор за поновно интересовање за платонистичке погледе о природи математике. У платонистичкој концепцији, предмет истраживања у математици састоји се од *апстрактних ентитета.*

3.1 Геделов платонизам

Гедел је био платониста у односу на математичке објекте и у односу на математичке концепте, али је ипак његов платонистички поглед био софистициранији него онај обичног математичара.

Гедел је сматрао да постоји јак паралелизам између уверљивих теорија математичких објеката и појмова са једне стране и уверљивих теорија физичких објеката и својстава са друге стране. Као и физички објекти и својства, математички објекти и појмови нису конструисани од стране људи. Као и физички објекти и својства, математички објекти и појмови се не могу свести на менталне ентитете. Математички објекти и појмови су исто онолико објективни као што су то физички објекти и својства. Математички објекти и појмови су, као и физички објекти и својства, постулирани да би се добила добра задовољавајућа теорија нашег искуства. Заиста, на начин који је аналоган нашем односу перцепције физичких објеката и својстава, кроз *математичку* *интуицију* ми смо у односу квази-перцепције математичких објеката и појмова. Наша перцепција физичких објеката и појмова је подложна грешкама и може се кориговати. На исти начин, математичка интуиција није имуна на грешке, али се може увежбати и поправити. За разлику од физичких објеката и својстава, математички објекти не постоје у простору и времену и они нису реализовани у простору нити у времену.

Наша математичка интуиција нам даје *унутрашњу потврду* математичких принципа. Практично се сво наше математичко знање може извести из аксиома *Цермело-Френкелове теорије скупова* са додатком аксиоме избора (кратко ZFC). По Геделовом мишљењу, ми имамо убедљиву унутрашњу потврду истинитости ових аксиома. Али, он се такође бринуо да ли је математичка интуиција довољно јака да омогући уверљиву потврду аксиома које значајно проширују снагу ZFC.

Осим унутрашње потврде, по Геделу је такође могуће добити екстерну потврду математичких принципа. Ако су математички принципи успешни, тада, чак и ако не можемо да добијемо унутрашњу потврду за њих, они се могу сматрати вероватно тачним. Гедел (1947) каже:

> ... успех овде значи плодност последицама, посебно 'проверивим' последицама, тј. последицама које се могу проверити без нове аксиоме, чији је доказ уз помоћ нове аксиоме значајно једноставнији и лакши за налажење, што омогућава да се у један доказ контрахују многи различити докази... Можда постоје аксиоме толико богате проверивим последицама, које бацају толико светла на цело поље, дајући моћне методе за решавање проблема... тако да, без обзира на то да ли јесу или нису унутрашње неопходне, биле би прихваћене бар онолико колико су то добро установљене физичке теорије.

Ово је инспирисало Гедела да трага за новим аксиомама које могу бити мотивисане споља и које могу одлучити питања као што су Хипотеза континуума, а које су веома независне од ZFC.

Гедел је делио Хилбертово уверење да сва математичка питања имају потпуно одређен одговор. Али, платонизам у филозофији математике не би сам по себи требало да значи да је посвећен томе да тврди да сва теоретско-скуповна тврђења имају одређену истинитосну вредност. Постоје верзије платонизма које сматрају, на пример, да су све теореме ZFC тачне по одређеним теоретско-скуповним чињеницама, али да нема теоретско-скуповних чињеница које чине нека тврђења, која су веома независна од ZFC, таквим да им се може одредити истинитосна вредност. Чини се да је и Пол Коен делио то гледиште.

3.2 Натурализам и неизоставност

Квајн (1969) је формулисао методолошку критику традиционалне филозофије.

Слика 20: Квајн

Предложио је другачију филозофску методологију, која је постала позната као *натурализам*. По натурализму, наше најбоље теорије су наше најбоље НАУЧНЕ теорије. Ако желимо да добијемо најбољи одговор, који можемо да добијемо, на филозофска питања као што су „Шта знамо?" или „Какве врсте ентитета постоје?", не треба да се окрећемо ка традиционалним епистемолошким или метафизичким теоријама. Такође потребно је да се уздржимо од започињања фундаменталног епистемолошког или метафизичког истраживања од првих принципа. Оно што треба да радимо је да консултујемо и анализирамо наше најбоље научне теорије. Оне садрже, додуше често само имплицитно, наша најбоља тренутна знања о томе шта постоји, шта знамо и како то знамо.

Слика 21: Патнам

Патнам је применио Квајнов натуралистички став на математичку онтологију. Бар од Галилеја, наше најбоље теорије у природним наукама су математички изражене. Њутнова теорија гравитације је базирана на диференцијалном и интегралном рачуну. Тако да се чини да је онтолошка посвећеност математичким ентитетима инхерентна нашим најбољим научним теоријама. Овај начин размишљања може бити даље ојачан позивањем на Квајнову тезу о потврђујућем холизму. Емпиријски доказ не даје своју потврдну моћ било којој појединачној хипотези. Радије, искуство глобално потврдјује теорију у коју је појединачна хипотеза уметнута. Како су математичке теорије битан састојак научних теорија, оне се такође потврдјују искуством. Стога имамо емпиријско потврђивање за математичке теорије. И више од тога је тачно. Чини се да је математика неизоставна за наше најбоље научне теорије: није уопште јасно како бисмо их изразили без математичког речника. Стога нас натуралистички став присиљава да прихватимо математичке ентитете као део наше филозофске онтологије. Овај начин размишљања назива се *аргумент неизоставности*.

Ако прихватимо математику која је укључена у наше најбоље научне теорије здраво за готово, онда се чини да смо се обавезали некој форми платонизма. Али је то ипак доста скромнија форма платонизма него што је Геделов платонизам. Пошто се чини да природне науке

’могу да прођу’ са (грубо говорећи) просторима функција на реалним (и комплексним) бројевима. Напредније области теорије бесконачних скупова се чини поприлично ирелевантним за чак и најнапредније теорије у природним наукама. Ипак, Квајн је у неком тренутку сматрао да су скупови који су постулирани помоћу ZFC прихватљиви са натуралистичке тачке гледишта; они се могу гледати као адекватно ЗАОКРУЖИВАЊЕ математике која је укључена у наше научне теорије. Ова Квајнова оцена није универзално прихваћена. Феферман, на пример, тврди да су све математичке теорије које се суштински користе у нашим тренутно најбољим научним теоријама предикативно сведиве, што није случај са теоријом скупова.

У Квајновој филозофији су природне науке крајњи судија који пресуђује о математичком постојању и математичкој истини. Ово је довело до примедби да таква слика чини очигледност елементарне математике помало мистериозном. На пример, питање да ли сваки природни број има следбеника, по Квајновом гледишту, напослетку зависи од наших најбољих емпиријских теорија; но, наравно да се тај факт чини знатно непосреднијим од тога.

Пенелопа Мади је приметила да се математичари не сматрају на било који начин ограниченим у ономе што раде, од стране природних наука. Заиста, можемо се запитати да ли се и математика може сматрати и сама науком и да ли је онтолошку посвећеност математици боље оцењивати на бази рационалних метода које су имплицитне у математичкој пракси.

Слика 22: Мади

3.3 Редукција платонизма

Слика 23: Бернајс, Карнап и Тејт

Пол Бернајс (1935) је указао на то да када математичар ради, он „наивно” третира објекте са којима ради на платонистички начин. Сваки активни математичар је, како он каже, платониста. Али када математичар није на свом радном месту, да се тако изразимо, и када га филозоф пита у вези његових онтолошких размишљања, спреман је да се промени и да се повуче на нејасно неплатонистичку позицију. Ово доводи до тога да неки указују на то да је нешто погрешно у вези филозофских питања о математичким објектима и математичком знању.

Карнап (1950) је увео дистинкцију између питања која су интерна за оквир рада и питања која су екстерна у односу на тај оквир. Аргументовано је да Карнапова дистинкција на неки начин преживљава пропаст логичког емпиристичког оквира у оквиру којег је најпре формулисана.

Тејт (2005) је покушао детаљно да разради како се та дистинкција може применити на математику и то је резултовало нечим што би се могла назвати редукованом верзијом платонизма.

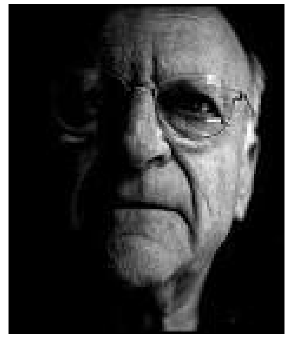
По Вилијаму Тејту, питања постојања математичких објеката се једино разумно могу поставити и на њих се разумно може одговорити једино унутар (аксиоматског) математичког оквира. Ако се неко бави теоријом бројева, на пример, онда он може поставити питање да ли постоје прости бројеви са датим својством. Таква питања се тада разрешавају на чисто математичким основама. Филозофи имају тенденцију да закораче изван математичког оквира и питају „са стране” да ли математички објекти заиста постоје и да ли су математичка тврђења заиста тачна. У овом случају они постављају питања са метафизичке основе о математичкој истини и постојању. Тејт аргументује да се тешко може наћи неки смисао таквим екстерним питањима. Покушава да их редукује и да их доведе тамо где она и припадају: у саму математичку праксу. Наравно да се неће свако сложити са њим око овога. Други су развили системски начин за одговоре баш на врсту екстерних питања којима је Тејт приступио са презиром.

Није изненађујуће да Тејта нимало није занимало Геделово позивање на математичку интуицију у филозофији математике, ни за филозофску тезу да математички објекти постоје „ван простора и времена”. Штавише, Тејт верује да математици није потребна филозофска основа; он жели да математика говори сама за себе. У овом смислу његова позиција подсећа на природни онтолошки став за који се залаже Артур Фајн у дебати о реализму у филозофији наука.

3.4 Бенасерафов епистемолошки проблем

Пол Бенасераф је формулисао епистемолошки проблем за разне платонистичке позиције у филозофији наука у свом раду „Математичка истина” из 1973. године.

Аргумент је посебно упућен против приказа математичке интуиције попут Геделовог. Бенасерафов аргумент полази од премисе да је наша најбоља теорија о сазнању, каузална теорија о сазнању. Потом се истиче да, по платонизму, апстрактни објекти нису просторно и временски локализовани, док математичари од крви и меса то јесу. Наша најбоља епистемолошка теорија нам потом каже да знање о математичким објектима резултира из каузалне интеракције ових ентитета. Али је тешко замислити како се то може десити.



Слика 24: Бенасераф

Данас мало епистемолога сматра да је каузална теорија о сазнању наша најбоља теорија о сазнању. Али се показало да је Бенасерафов проблем изненађујуће отпоран при промени епистемолошке теорије. На пример, претпоставимо, чисто дискусије ради, да је ПОУЗДАНОСТ наша најбоља теорија о сазнању (дакле да смо до сазнања да је нешто тачно дошли преко неког поузданог процеса). Тада се појављује проблем како објаснити како успевамо да добијемо поуздана веровања о математичким ентитетима.

Формулисана је и семантичка варијанта Бенасерафовог епистемолошког проблема. По тренутно најбољој семантичкој теорији, узрочно-историјске везе међу људима и светом конкретних објеката омогућавају нашим речима да се позивају на физичке ентитета и својства. По платонизму, математика се позива на апстрактне ентитете. Стога нам је платонист дужан уверљивог објашњења како ми (људи са физичким телима) можемо да се позивамо на њих. Како ствари стоје, чини се да каузална теорија позивања не може да нам обезбеди тражено објашњење 'микроструктуре позивања' у математичкој расправи.

3.5 Обилни платонизам

Верзија платонизма је развијена са циљем да омогући решење Бенасерафовог епистемолошког проблема. Ова позиција је позната као *обилни платонизам*. Централна теза ове теорије је да се свака логички конзистентна математичка теорија обавезно односи на апстрактан ентитет. Да ли је математичар који је формулисао ту теорију тога свестан или није, практично је без значаја. Развијајући конзистентну математичку теорију, математичар аутоматски добија знања о области истраживања те теорије. Тако да, при овом погледу, не постоји епистемолошки проблем који треба решити.

У једној верзији, обилни платонизам постулира више математичких универзума од којих сваки одговара конзистентној математичкој теорији. Тако да, на пример, проблем континуума не добија јединствен одговор: у једном теоретско-скуповном универзуму континуум хипотеза важи, у другом не. Но, не слажу се сви да је таква слика одржива. Постоји аргументација која показује да се вишеструки универзуми могу у великој мери „акумулирати” у један.

У другој верзији обилног платонизма, математички ентитет који постулира конзистентна математичка теорија, има *тачно она* математичка својства, која му теорија додељује. На пример, апстрактан ентитет који одговара ZFC је посебан у том смислу што не чини континуум хипотезу ни тачном ни лажном. Разлог је у томе што ZFC не повлачи ни континуум хипотезу ни њену негацију. Ово не значи да су сви начини конзистентног проширења ZFC равноправни. Неки начини могу бити плодоносни и моћни, неки су мање такви. Али овај поглед забрањује да неки конзистентни начини проширења ZFC буду пожељнији зато што садрже истините принципи док други садрже лажне принципе.

4 Структурализам и номинализам

Бенасерафов рад је мотивисао филозофе да развију и структуралистичке и номиналистичке теорије у филозофији математике. А од краја осамдесетих година, комбинација структурализма и номинализма се такође развија.

4.1 Шта бројеви не могу бити

У раду из 1965. „Шта бројеви не могу бити” Бенасераф је формулисао изазов теоретско-скуповном платонизму. Ево о чему се ради. Постоји бесконачно много начина да се природни бројеви идентификују са скуповима. На пример, Цермело је то урадио овако:

$$0 := \varnothing, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{1\}, \quad 3 := \{2\}, \quad \ldots$$

док је фон Нојман предложио:

$$0 := \varnothing, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0,1\}, \quad 3 := \{0,1,2\}, \quad \ldots$$

Једноставно питање које Бенасераф поставља је:

Која је од могућих идентификација природних бројева и скупова истинска?

Јасно је да је веома тешко одговорити на ово питање. Није тешко видети како се може дефинисати функција следбеника, као и сабирање и множење, у оба наведена случаја, тако да сва аритметичка тврђења за која узимамо да су тачна ’испадну’ тачна. Заиста, ако се то уради на природан начин, добијамо изоморфне структуре (у теоретско-скуповном смислу речи), а у изоморфним структурама су исте реченице истините (оне су елементарно еквивалентне). Једино када поставимо питања која нису чисто аритметичка, попут „Да ли $1 \in 3$?" ова два приступа природним бројевима дају различите одговоре. Тако да не могу оба приступа бити коректна.

Да резимирамо, долазимо до следеће ситуације. С једне стране не види се да постоји разлог зашто би један приступ био супериоран у односу на други. С друге стране, не могу оба приступа бити коректна. Ова неприлика се понекад зове Бенасерафов *проблем идентификације*.

Исправан закључак који се може извести из ове загонетке изгледа да је да ниједан од ова два приступа није коректан. Како би се слична разматрања појавила ако бисмо поредили друге разумне покушаје да се природни бројеви редукују на скупове, чини се да природни бројеви ипак нису скупови. Јасно је да се сличан аргумент може формулисати и са рационалне бројеве, реалне бројеве... Бенасераф закључује да ни они уопште нису скупови.

Није уопште јасно да ли је, на пример, Гедел, био посвећен редукцији природних бројева на скупове. Платониста може подржавати тврдњу да се природни бројеви могу утопити у теоретско-скуповни универзум истовремено задржавајући став да на утапање не треба гледати као на онтолошку редукцију. Заиста, као што смо видели код приступа у обилном платонизму, природни бројеви немају никаква друга својства осим оних које им придружује наша теорија природних бројева (Пеанова аритметика). Али се онда чини да би платонисти морали да заузму исти став у односу на рационалне бројеве, комплексне бројеве... Мада задржавање става да су природни бројеви sui generis (јединствени) свакако има извесну привлачност, чини се да је мање природно сматрати да су и комплексни бројеви, на пример, sui generis. И, било како било, чак и ако се природни бројеви, комплексни бројеви... у неком смислу не могу редуковати на нешто друго, ипак је природно запитати се да ли постоји неки други начин да се разјасни њихова природа.

4.2 Ante rem структурализам

Стјуарт Шапиро (1997) истиче корисну дистинкцију између алгебарских и неалгебарских теорија. Грубо говорећи, неалгебарске теорије су теорије, које су, на први поглед, теорије о јединственом моделу: циљани модел за теорију. Знамо за примере таквих теорија: аритметика, математичка анализа... Алгебарске теорије, пак, *нису* о јединственом моделу. Примери су теорија група, топологија, теорија графова...

Бенасерафов изазов се може поставити објектима за које се чини да неалгебарске теорије описују. Али се тај изазов не може поставити алгебарским теоријама. Алгебарске теорије се не занимају самим математичким објектима; оне се занимају структурним аспектима математичких објеката. То је навело Бенасерафа да се пита да ли то може бити тачно такође и за неалгебарске теорије. Можда се из Бенасерафовог проблема идентификације може закључити да чак ни аритметика не описује специфичне математичке објекте, него само описује структурне везе?

Слика 25: Шапиро и Резник

Шапиро и Мајкл Резник (1997) имају став да све математичке теорије, чак и неалгебарске, описују структуре. Ова позиција је позната као *структурализам*. Структуре се састоје од *места (позиција)*, која стоје у структурним односима једно према другом. Стога математичке теорије описују места (позиције) у структурама. Али оне не описују објекте. Број 3, на пример, при овом гледишту неће бити објекат, него место у структури природних бројева.

Системи су примери структура. Системи који дају пример структуре која је описана неалгебарском теоријом су изоморфни један другом и стога, што се теорије тиче, подједнако добри. Системи наведени у претходном одељку могу се видети као примери структуре природних бројева. $\{\{\{\emptyset\}\}\}$ и $\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ су подједнако погодни да играју улогу броја три. Али ниједан од њих *није* број три, пошто је број три слободно место у структури природних бројева и то слободно место нема никакву унутрашњу структуру. Системи типично садрже структурна својства осим оних која су релевантна за структуре за које се узимају као примери.

Разумна питања идентитета су она која могу бити постављена унутар стуктуре. То су питања на која је могуће одговорити на основу структурних аспеката структуре. Питања идентитета која иду изван структуре немају смисла. Може се поставити питање да ли $3 \in 4$, али не убедљиво: ово питање укључује категорну грешку. Оно меша две различите структуре: $\in$ је теоретско-скуповни појам, док су 3 и 4 места у структури природних бројева. Чини се да је то задовољавајући одговор на Бенасерафов изазов.

По Шапировом гледишту, структуре нису онтолошки зависне од постојања система који представљају примере за њих. Чак и ако не би било бесконачних система у Природи, структура природних бројева би постојала. Тако да су структуре, како их Шапиро схвата, апстрактни платонски ентитети. Шапирова врста структурализма се често назива *ante rem* (*пре ствари*) структурализам.

У уџбеницима теорије скупова ми такође налазимо појам структуре. Теоретско-скуповна дефиниција нам, као што добро знамо, каже да је структура $(n+1)$-торка која се састоји од скупа, више операција на том скупу, више релација на њему и више истакнутих елемената тог скупа. Али то не може бити појам структуре који структурализам у филозофији математике има на уму. Наиме, теоретско-скуповни појам структуре претпоставља појам скупа, који се по структурализму и сам мора објаснити у структурним терминима. Или, да то кажемо другачије, теоретско-скуповна структура је само систем који је пример структуре која му онтолошки претходи.

Без обзира на ово, мотивација за проширивање ante rem структурализма чак до теорије скупова није потпуно очигледна. Присетимо се да главна мотивација за примену структуралистичког схватања математичке области лежи у Бенасерафовом проблему идентификације. За теорију скупова је тешко поставити изазов идентификације: скупови се обично не дефинишу помоћу једноставнијих појмова.

Чини се да ante rem структурализам описује појам структуре на помало кружни начин. Структура се описује као места која стоје у односу једно према другом, али се место не може описати независно од структуре којој припада. Но, то није обавезно проблем. За ante rem структуралисту, појам структуре је примитивни концепт, који се не може дефинисати преко основнијих термина. У најбољем случају, можемо конструисати аксиоматску теорију математичких структура.

Али, Бенасерафов епистемолошки проблем ипак се и даље чини ургентним. Структуре и места у структурама можда нису објекти, али јесу апстрактне. Тако да је природно да се питамо како успевамо да дођемо до знања о њима. Овај проблем је био неким филозофима разлог да развију номиналистичку теорију математике и да потом помире ту теорију са основним начелима структурализма.

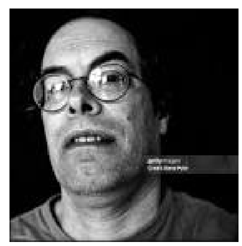
4.3 Математика без апстрактних ентитета

Гудман и Квајн (1947) су започели пројекат преформулација теорија из природних наука без коришћења апстрактних ентитета. Номинализам у математици је схватање по коме или математички објекти, релације и структуре уопште не постоје, или не постоје као апстрактни објекти. У овом другом случају се предлажу неке конкретне замене за математичке објекте.

Номиналистичка реконструкција научних теорија се показала као тежак задатак. Квајн га је одмах, после почетних покушаја, напустио. У протеклим деценијама многе теорије су предложене које наводно дају номиналистичку реконструкцију математике.

У номиналистичкој реконструкцији математике, конкретни ентитети морају да играју улогу, коју апстрактни ентитети играју у платонистичкој визији математике, а конкретне релације треба да буду коришћене за симулирање математичких релација међу математичким објектима. Али, ту се појављују проблеми. Најпре, још је Хилберт 1925. приметио да, имајући у виду дискретизацију природе у квантној механици, природне науке могу напослетку да тврде да има само коначно много конкретних ентитета. Но, чини се да би нам требало бесконачно много њих који би играли улогу природних бројева — заборавимо на реалне бројеве на тренутак. Где номиналиста налази тражену колекцију конкретних ентитета? Друго, чак и ако се претпостави егзистенција бесконачно много конкретних објеката, није уопште јасно да се чак и елементарне математичке теорије могу симулирати помоћу номиналистичких релација.

Хартри Филд (1980) је учинио озбиљан покушај да изведе номиналистичку реконструкцију Њутнове механике. Основа идеја је ова. Филд је желео да користи конкретне сурогате за реалне бројеве и функције на њима. Заузео је реалистички став ка просторном континууму и сматрао области простора за физички реалне као што су то столице и столови. И узео је да те области буду конкретне (уосталом, оне су лоциране у простору). Ако рачунамо и веома неповезане, онда имамо онолико области Њутновог простора као што има подскупова скупа реалних бројева. И онда има довољно конкретних ентитета да играју улогу природних бројева, реалних бројева и функција на реалним бројевима. А то је довољно за формулацију Њутнове механике. Наравно, било би још више интересантно имати номиналистичку реконструкцију још савременије научне теорије попут квантне механике. Али, с обзиром да се пројекат може извести за Њутнову механику, одређени степен почетног оптимизма је оправдан.



Слика 26: Филд

Јасно је да овај пројекат има своја ограничења. Може бити могуће номиналистички интерпретирати просторе функција на реалним бројевима, али је превише очекивати да ће се на тај начин наћи номиналистичка интерпретација теорије скупова. Ипак, ако је успешан унутар својих ограничења, онда Филдов програм ипак нешто постиже. Пошто би то значило да су, бар у неком обиму, (апстрактни) математички ентитети необавезни. То би био значајан корак ка подривању аргумента неизоставности за Квајнов скромни платонизам у математици.

Филдова стратегија има шансе само ако Хилбертов страх да у фундаменталном смислу наше најбоље научне теорије имплицирају да постоји само коначно много конкретних ентитета, није основан. Ако неко има разумевања за Хилбертову забринутост, али не верује у постојање апстрактних ентитета, онда може тврдити да има само коначно много математичких ентитета, дакле оповргавајући основне принципе елементарне аритметике. Ово доводи до позиције која је позната као ултра-финитизам.

У већини приказа, ултра-финитизам доводи, као и интуиционизам, до ревизионизма у математици. Пошто се чини да би онда морало бити прихваћено, на пример, постојање највећег природног броја.

Гледано са стране, теорија која постулира само коначан математички универзум чини се теоријски слабом са аспекта налажења доказа и стога је вероватно конзистентна. Али Вудин (2011) је развио аргумент који наводно показује да, из ултра-финитистичке перспективе, нема основа да се тврди да је ова теорија вероватно конзистентна.

Без обзира на Вудинов аргумент, многима је већ тврдња да постоји највећи број претешка да је 'прогутају'.

4.4 In re структурализам

Филдова физикална интерпретација аритметике и анализе не само да подрива Квајн-Патнамов аргумент неизоставности него и делимично даје одговор на Бенасерафов епистемолошки изазов. Наравно, није лак задатак објаснити како људи добијају сазнања о просторно-временским регионима. Али су ипак, по мишљењу већине филозофа ти региони реални. Тако да не морамо више да објашњавамо како математичари од крви и меса остају у контакту са нефизичким ентитетима. Али Бенасерафов проблем идентификације остаје. Можемо се запитати зашто баш нека тачка простор-времена или његов регион, а не неки други, играју улогу броја π, на пример.

Чини се да је привлачно у одговору на проблем идентификације комбиновати структуралистички приступ са Филдовим номинализмом. То води ка верзији номиналистичког структурализма који се може овако скицирати. Фокусирајмо се на математичку анализу. Номиналистички структуралист одриче да је неки конкретан физички систем јединствена планирана интерпретација анализе. Сви конкретни физички системи који задовољавају основне принципе реалне анализе (RA) би исто тако добро могли да се искористе. Тако да је садржај реченице ϕ језика анализе грубо дат са:

У сваком конкретном систему S у коме је RA тачно, тачно је и ϕ.

Ово повлачи да су, као и у ante rem структурализму, само структурни аспекти релеватни за истину или лажност математичких тврђења. Али, за разлику од anti rem структурализма, ниједна апстрактна структура није постулирана изнад и изван конкретних система.

По *in rebus* (краће: in re) (*у ствари*) структурализму, нема апстрактних структура изнад система који их остварују; структуре постоје само у системима који их остварују. Због овог разлога, in re структурализам се понекад описује и као „структурализам без структура”. Номиналистички структурализам је облик in re структурализма, али то није његов једини облик. Чак се и верзије платонизма које сматрају да се математика заправо бави стуктурама у теоретско-скуповном смислу речи, могу видети као облици in re структурализма.

У математичком разговору на неалгебарске објекте (као што су природни бројеви) и математичке објекте (као што је број 1) позивамо се помоћу тачно одређених описа. То јако сугерише да математички симболи ($\mathbb{N}$, 1) имају јединствену референцу а не „подељену” као што би то желео in re структурализам. Али in re структуралисти аргементују да такви математички симболи функционишу као посвећене променљиве као што се у обичном говору користи неко одређено име за слоган који се користи у општој ситуацији.

Ако је Хилбертова брига основана, у смислу да нема конкретних физичких система, који чине постулате математичке анализе тачним, онда горње преношење садржаја реченице језика анализе од стране номиналистичког структуралисте погрешно даје услове иститиности таквих реченица. Наиме, тада би за *сваку* универзално квантификовану реченицу ϕ њена парафраза била празно (безсадржајно) истинита. Тако да је егзистенцијална претпоставка у смислу да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за RA потребна да би се подржала горња анализа садржаја математичких тврђења. Можда би у ту сврху могло да послужи нешто попут Филдове конструкције.

Патнам је рано (1967) приметио да ако се горње објашњење садржаја математичких реченица донекле измени, суштински слабија основна претпоставка је довољна за добијање коректних истинитосних услова. Он је предложио следећу условну изведбу садржаја реченице у језику анализе:

Обавезно, у сваком конкретном систему S у коме је RA тачно, тачно је и ϕ.

Ово је јаче тврђење него што је претходна неусловна изведба била. Али чини се да је подједнако уверљива. И предност ове интерпретације је да је следећа условна егзистенцијална основна претпоставка довољна да учини истинитосне услове за математичка тврђења исправним:

Могуће је да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за RA.

(„Могуће је” овде значи „Јесте, или је био случај да је”.) Чини се да је тако Хилбертовој забринутости адекватно посвећена пажња. Пошто по Патнамовом приступу, истинитост математичких реченица не зависи више од физичких претпоставки о стварном свету.

Наравно, није лако дати задољавајућу причу како знамо да је ова условна егзистенцијална претпоставка испуњена. Али, можемо се надати да је задатак ипак лакши од задатка да се објасни како успевамо да сазнајемо чињенице о апстрактним ентитетима. И не треба заборавити да структуралистички аспект ове (условне) номиналистичке позиције, успева да контролише Бенасерафов проблем идентификације.

Патнамова стратегија такође има своја ограничења. У случају примене те стратегије на теорију скупова, груба верзија условне претпоставке је:

Могуће је да постоје конкретни физички системи који могу послужити као модел за ZFC.

Парсонс (1990) је приметио да када су потребни светови који садрже колекције физичких ентитета који имају велике бесконачне кардиналности или су чак толико велики да уопште имају кардинални број, постаје тешко да се они виде као могући конкретни физички системи. Не чини се да има разлога да верујемо да постоји физички светови који садрже „веома бесконачно много” ентитета.

4.5 Фикционализам

На основу претходних предлога, тврђења обичне математике су истинита када се погодно интерпретирају. Номиналистички приказ математике, који ће сада бити дискутован сматра да су сва егзистенцијална математичка тврђења лажна просто зато што не постоје математички ентитети (из истих разлога ће сва универзална математичка тврђења бити тачна).

Фикционализам сматра да су математичке теорије као измишљене приче попут бајки и романа. Математичке теорије описују измишљене ентитете, на исти начин на који литература описује измишљене ликове. Ова позиција је најпре уобличена 1989. и последњих година добија на популарности.

Овај груби опис фикционалистичке позиције непосредно отвара питање каква су врста ентитета измишљени ентитети. Чини се да је то дубоко метафизички онтолошки проблем. Један начин да се ово питање у потпуности избегне је да се тврди да не постоје измишљени ентитети. Математичке теорије треба да буду виђене као позиви за учешће у играма у којима се правимо да неки математички ентитети постоје.

У сваком случају, као што је речено, по фикционалистичком гледишту, математичка теорија није буквално истинита. Без обзира на то, математика се користи да се дође до истина. Тако да морамо да одузмемо нешто из онога што је буквално речено када говоримо о физичкој теорији која укључује математику, ако желимо да дођемо до истине. Али то захтева теорију о томе како то одузимање садржаја функционише. Таква теорија је развијена од стране Јабла 2014.

Ако је фикционалистичка теза исправна, тада је један од захтева који се мора поставити на математичке теорије, сигурно тај да оне морају бити конзистентне. Филд додаје и други захтев: математика мора бити 'конзервативна' у односу на природне науке. То, грубо говорећи, значи да кад год се тврђење емпиријске теорије може извести из математике, мора, у принципу, бити могуће извести га без коришћења ма које математичке теорије. Ако то не би био случај, тада би аргумент неизоставности могао бити искоришћен против фикционализма. Да ли је математика заиста конзервативна у односу на физику је тренутно контроверзно питање. Шапиро је 1983. формулисао аргумент некомплетности који би требало да оспори Филдову тврдњу.

Ако заисте не постоје математички (измишљени) ентитети, као што тврди једна форма фикционализма, онда се Бенасерафов епистемолошки проблем и не појављује. Фикционализам стога дели предност над већином варијанти платонизма са номиналистичком реконструкцијом математике. Али позивање на претварања повлачи то да се логичка форма математичких реченица разликује понешто од њеног површног облика. Ако постоје измишљени објекти, онда се за ту форму може узети да је истог облика како и изгледа. Али, ако постоје апстрактни ентитети, Бенасерафов епистемолошки проблем се појављује.

Да ли је Бенасерафов проблем идентификације решен или није, није сасвим јасно. Генерално, фикционализам је нередукционистички приказ математике. Да ли је ентитет у једној математичкој теорији идентичан ентитету који се појављује у другој теорији се обично оставља неодређеним. Но, Бургес је 2014. исправно истакао да се математика ипак разликује од литературе у томе што су литерарни ликови обично ограничени на једно дело, док се исти математички ентитети појављују у различитим математичким теоријама. Уосталом, ентитети са истим именом (попут π) појављују се у различитим теоријама. Можда фикционалиста може да сматра да када математичар развија нову теорију у којој се „старији" математички ентитет појављује, онда ће тај ентитет бити више прецизиран. Одређенија својства му се придају него раније и то је у реду док се задржава пуна конзистентност.

Стандардна примедба формализму је такође погодна и за фикционализам. Фикционалисти морају да нађу неко објашњење чињенице да се проширивање математичке теорије на један начин, често сматра више задовољавајућим него на други начин, који је неспојив са првим. Често постоји бар привид да постоји прави начин да се математичка теорија прошири.