Ка Calculusu (2). Њутн. Лајбниц. Ојлер

Зоран Петровић

23. април 2024. године

Валис

Слика 1: Џон Валис

Џон Валис (1616–1701) био је један од првих чланова Краљевског друштва у Енглеској и сматра се за најутицајнијег енглеског претходника Њутна. Био је професор на Оксфорду и на тој позицији је наследио Бригза о коме је било речи у теми о логаритмима. Године 1665. Валис је објавио две изузетно значајне књиге од којих се једна бави даљим развојем аналитичке геометрије („Трактат о конусним пресецима"), но друга је ипак посебнија, пошто није имала свог пандана. Ради се о књизи „Аритметика бесконачно малих" у коме је Валис извршио 'аритметизацију' Кавалијеријевих идеја о недељивим. Он је гледао да те идеје ослободи геометријских разматрања попут оних манипулација које је изводио Кавалијери поредећи дужи у троуглу и паралелограму, а које смо видели у Кавалијеријевом поступку налажења, de facto интеграла $\int_0^a x^n dx$. Ево како он објашњава како се, на пример, долази до резултата $\int_0^1 x^3 dx$.

Он пореди суме трећих степена чланова аритметичког низа, за који заправо узима да је $0,1,2,\ldots$ са сумама трећег степена највећег од њих. Наиме, ова сума трећих степена одговара троуглу који се састоји од паралелних дужи чије дужине чине аритметички низ (а полази се од тачке, темена троугла и рачунају се кубови њихових дужина), а сума трећег степена највећег од њих одговара сумама кубова дужи у паралелограму који се састоји од једнаких паралелних дужи (он каже да се „такорећи троугао састоји од паралелних дужи...”; наравно да је за ово „такорећи” било критике од стране других математичара касније). Како је

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125+125} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216}{216+216+216+216+216+216+216} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24},$$

он закључује да се по индукцији може закључити да је однос увек за $\frac{1}{4n}$ већи од $\frac{1}{4}$ уколико је n највећи члан којим степенујемо. Наравно да се не ради о строгој математичкој индукцији, и због тога је био критикован од стране француских математичара, него о наслућивању правила на основу постојећих примера. Констатује да када имамо суму бесконачно много чланова (да не улазимо сада у питање како је то замислио да се реализује, јасно је интуитивно шта жели) онда тог додатка и нема, те је тражени однос $\frac{1}{4}$. Ово он констатује за све n од 1 до 10. Но, сада може да закључи и то да је $\int_0^1 \sqrt[n]{x}dx = \frac{n}{n+1}$. Наиме, функција $y = x^n$ може се записати и као $x = \sqrt[n]{y}$, те је површина испод криве $y = \sqrt[n]{x}$ (када је $0 \leqslant x \leqslant 1$), а која се може записати и као $x = y^n$ заправо комплемент површини испод криве $y = x^n$ када је $0 \leqslant x \leqslant 1$. Пошто за њу зна да је једнака $\frac{1}{n+1}$, ова друга је $1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$. Онда он смело закључује да је површина испод криве $y = x^{m/n}$ (модерне ознаке, он је користио нешто другачије ознаке) једнака $\frac{1}{1+\frac{m}{n}} = \frac{n}{m+n}$.

Ево још једног његовог занимљивог закључивања, у коме је антиципирао касније Ојлерове резултате о Гама и Бета функцији. Знајући претходне резултате, он је могао да израчуна површине испод кривих $y = (x - x^2)^n$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$ (дакле, de facto $\int_0^1 (x-x^2)^n dx$). Пошто је израчунао за неколико вредности n, закључио је да је резултат (у нашим садашњим ознакама) $\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$. С друге стране је знао да је интеграл $\int_0^1 (x-x^2)^{1/2}$ заправо површина полукруга полупречника 1/2, те мора бити једнак $\frac{\pi}{8}$. Но, није знао како да тог резултата директно дође пошто није знао како да 'развије' $(x-x^2)^{1/2}$ у нешто што би му омогућило рачунање, тј. није знао биномну формулу за експонент 1/2. Но, ипак је смело заменио $n = 1/2$ у горњу формулу и добио да је

$$\int_0^1 (x-x^2)^{1/2} dx = \frac{(\frac{1}{2}!)^2}{2!},$$

те је тако дао смисао изразу $\frac{1}{2}!$:

$$\frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Подсетите се формула за Гама и Бета функцију.)

Још један његов вредан резултат, који носи назив по њему, је Валисова формула:

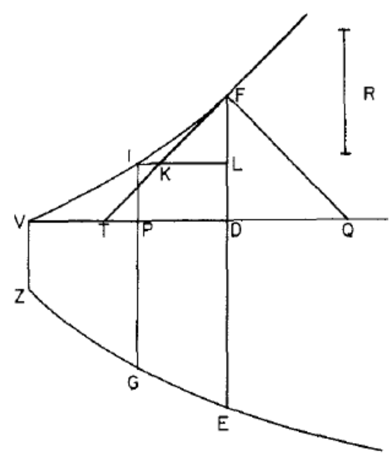
$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdots}.$$

Начин на који је дошао до ње је изузетно занимљив, али га ипак нећемо наводити.

Бароу

Слика 2: Исак Бароу

Исак Бароу (1630–1677) био је други енглески математичар који је извршио велики утицај на Њутна. Он је био професор на Кембриџу и његов приступ математици је био дијаметрално супротан од Валисовог. Није волео алгебарске формализме и сматрао је да алгебра треба да буде део логике, а не математике. Велики поштовалац грчке науке, уређивао је дела Еуклида, Аполонија и Архимеда. Његова два значајна дела су „Лекције из оптике" из 1669. и „Лекције из геометрије" из 1670. Њему је у припремама за објављивање ових дела помогао Њутн који је слушао његова предавања на Кембриџу. Као што је и сам Бароу рекао, „Лекције из геометрије", које се састоје из 13 лекција, нису у потпуности сређене, али је ипак, на наговор пријатеља (Њутна) решио да их објави такве какве су „у природном оделу, као што су и рођене". У њима налазимо разне резултате о налажењу тангенти, површина и дужина лукова. Користио је најпре кинематички приступ, затим и метод недељивих, метод близак Фермаовом за налажење тангенте. Све је приказано на геометријски начин те стога није било тако лако да се препозна важност тих резултата. Ево како је он приказао (и доказао) резултат који данас знамо као Њутн-Лајбницову формулу, или као Основну теорему Calculusa.



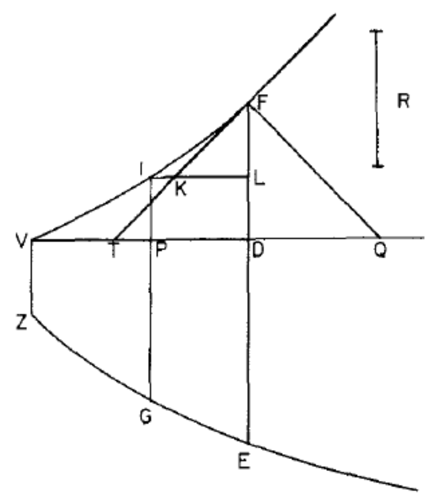
Слика 3: Њутн-Лајбниц геометријски

Нека је ZGE нека крива чија је оса VD и нека су ортогоналне ординате на ову осу (VZ, PG, DE) такве да непрекидно расту од почетне ординате VZ. Нека је VIF крива таква да ако се постави права линија EDF ортогонално на VD, а која сече криве у тачкама E и F, а VD у тачки D, правоугаоник који је одређен дужином DF и датом дужином R једнак је површини $VDEZ$, а осим тога је тачка T таква да је $DE:DF = R:DT$. Ако се споје тачке T и F, онда ће TF додиривати криву VIF.

Уверимо се најпре, коришћењем савремених знања и ознака да овде заиста имамо Њутн-Лајбницову формулу у геометријском облику. Нека је $y = f(x)$ једначина криве ZGE, а $y = g(x)$ једначина криве VIF. По претпоставци је $Rg(x) = -\int_0^x f(t)dt$. Осим тога је $(-f(x)) : g(x) = R : DT$. Чињеница да је TF тангента на криву VIF нам даје да је $g(x) : DT = g'(x)$. Дакле

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x f(t)dt\right) = -Rg'(x) = -R\frac{g(x)}{DT} = -\frac{R}{DT}g(x) = -\frac{-f(x)}{g(x)}g(x) = f(x).$$

Ево како је то Бароу доказао (додајемо поново слику ради лакшег праћења).



Узмимо било коју тачку I на кривој VIF (најпре са исте стране F са које је и V) и кроз њу поставимо IG паралелно са VZ и IL паралелно са VD, које секу дате линије у тачкама као на слици. Тада је $LF : LK = DF : DT = DE : R$, односно $R \cdot LF = LK \cdot DE$.

Али, из природе наведених линија DF и LK, имамо да је $R \cdot LF$ једнако површини $PDEG$. Стога је $LK \cdot DE$ једнако површини $PDEG$ која је мања од $DP \cdot DE$. Те је $LK < DP = LI$. На сличан начин се показује да ако се I узме на другој страни од F (у односу на V), и иста конструкција понови, лако се показује да је $LK > DP = LI$.

Одавде је јасно да се цела права TKF налази испод криве VIF.

Он затим додаје да се на сличан начин тражено може добити ако ординате VZ, PG и DE опадају.

Ако постоји нека недоумица зашто је $R \cdot LF$ једнако површини $PDEG$, приметимо да је $R \cdot IP$ једнако површини $VPGZ$, те одатле следи и то што је наведено, јер је $LF = DF - DL = DF - IP$.

Њутн и Лајбниц

Да би се привело крају формирање Calculusa било је потребно некако ујединити геометријски приступ (Кавалијери, Бароу) и рачунски (Декарт, Ферма, Валис) и прецизно истаћи везу између тражења тангенти и квадратуре. То су извели Њутн и Лајбниц, а касније су њихови следбеници наставили да појашњавају и развијају метод. Наравно, као што смо већ рекли, све је то најзад постављено на чврсте основе тек крајем деветнаестог века, али до главних резултата се дошло знатно раније.

Њутн је до своје верзије Calculusa дошао у годинама 1664–1668, док је Лајбниц своју верзију формирао у периоду 1672–1676. Јасно је да је Њутн дошао до резултата раније, али их је објавио доста касније, док је Лајбниц своју верзију објавио непосредно по откривању својих резултата. Лајбницова верзија је била практичнија и јаснија и брзо се развијала кроз радове браће Бернули, Ојлера и других. Маркиз де Лопитал (1661–1704)

Слика 4: Гијом Франсоа Антоан Маркиз де Лопитал

је објавио чак и уџбеник „Анализа бесконачно малих” 1696. године на француском у коме су ове идеје изложене. Он је ту навео да је и Њутн дошао до одговарајућих резултата, али је Лајбницов метод знатно лакши и ефикаснији пре свега због погодније нотације. Занимљиво је напоменути да тај уџбеник заправо представља сређене лекције које је Лопиталу о новим резултатима држао Јохан Бернули.

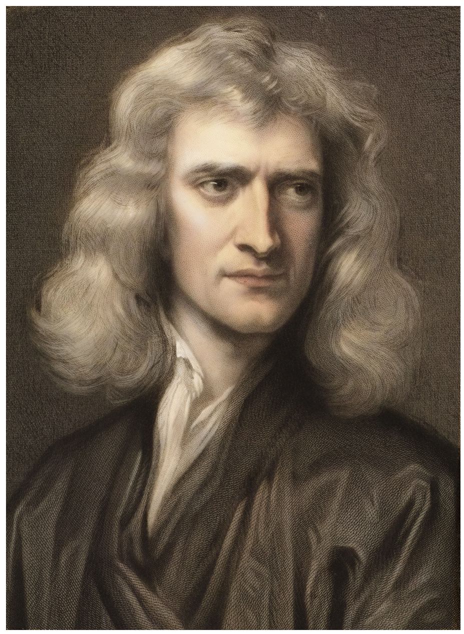
Слика 5: Јохан Бернули (1667–1748)

Рецимо, данас нам добро познато Лопиталово правило је заправо Бернулијев резултат. Наиме, за добар хонорар, Бернули је пристао да даје лекције Лопиталу, који је био врло способан математичар аматер, уз то веома имућан човек и племић. Бернули му је такође слао, према договору, своје нове резултате, које није смео да шаље другим математичарима. Питање је зашто је Бернули направио такав договор, пошто му је позиција професора у Гронингену ипак обезбеђивала довољно средстава. Вероватно је желео да искористи добар положај имућног племића. Све у свему, уџбеник је био одлично написан и објављиван је у више издања. Лопитал је умро као млад човек и после његове смрти Јохан Бернули је навео да су то његови резултати, посебно „Лопиталово правило”. Занимљиво је да му је ретко ко у то поверовао, пошто је он био познат по својим расправама о првенству открића, док је Лопитал важио за врло пристојну особу. Бернулијева прича је потврђена тек почетком двадесетог века налажењем одговарајуће кореспонденције и лекција које је он држао Лопиталу. У сваком случају, данас се сматра да је ту и Лопитал дао значајан допринос у излагању резултата.

Њутнове идеје су даље развијали Тејлор, Меклорен и други британски математичари. Разлог зашто су се тиме бавили само британски математичари треба најпре потражити у расправи о приоритету открића. Занимљиво је да је Њутн у почетку у потпуности признавао Лајбницу независно откриће, али је драстично променио мишљење када су му неки почели да причају како се Calculus на европском континенту у потпуности сматра за Лајбницово откриће. Кренуле су оптужбе за плагијат и свачега је ту било. Ми се тиме нећемо бавити. Јасно је да су обојица имали значајан удео у формирању Calculusa. Тек почетком деветнаестог века су британски математичари прихватили Лајбницове ознаке, највише под утицајем Лапласових резултата. Њутнова ознака $\dot{x}$, за извод по времену, је ипак остала до данас. Физичари је посебно доста користе.

Најпре ћемо се позабавити Њутновим резултатима, пошто је ипак он до њих дошао раније.

Њутн



Слика 6: Исак Њутн

Исак Њутн (1643–1727) је, на препоруку ујака који је завршио Кембриџ уписао Тринити Колеџ 1661. године и свакако није планирао да постане математичар пошто је до тада врло мало учио математику. Чак се и на самом Кембриџу у то време веома мало предавала математика. Но, он је одмах кренуо да учи Еуклида, а потом и Ван Схутеново издање Декартове „Геометрије”, веома цењен у то време Отредов уџбеник „Кључ за математику”, Кеплерову „Оптику”, Вијетове радове и, наравно, Валисову „Аритметику”. Осим тога, слушао је и Бароуове лекције. После 1663. се упознао и са делима Галилеја, Ферма, Хајгенса и других математичара.

Од 1664. почиње сопствена истраживања. Први резултат до кога је дошао је била биномна теорема за рационалне изложиоце. Заправо је он само открио формулу, није је никада доказао, а није је ни сам објавио. Његова размишљања на ту тему налазе се у писмима која је слао Олденбургу, Немцу који је био стални секретар Краљевског друштва и који је водио интензивну кореспонденцију са многим мислиоцима у то време, нешто попут Марина Мерсена у Француској. Ради се о два писма, која су заправо настала као одговор на Лајбницово интересовање о томе шта је Њутн урадио у вези бесконачних редова. Ова писма су касније објављена у оквиру Валисове „Алгебре”.

Прво писмо је из јуна 1676. године. Оно почиње похвалама Лајбницу, који је, како каже Њутн, сигурно до свега тога дошао и сам, чак можда и боље, али кад се већ распитује шта су Енглези по том питању урадили, ево да он, који је до тога дошао пре неколико година, бар делимично испуни његове жеље.

Разломци се своде на бесконачне редове дељењем; а величине које у себи садрже корене, налажењем корена, извођењем операција са симболима као што се оне уобичајено раде за децималне бројеве. То су основе ових редукција. Али налажење корена се знатно упрошћава овом теоремом

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{ итд.}$$

где је $P+PQ$ величина чији се корен или неки степен или корен неког степена тражи.

Овде најпре да кажемо да је Њутн користио малу другачију нотацију. У то време се уместо заграда користила црта изнад израза. Њутн је заправо писао $\overline{P+PQ}|^{m/n}$. Ово и није необично колико нам се чини. Заправо остатак тога имамо у запису корена. Корен је заправо $\surd$, а ми онда постављамо црту изнад свега што је под тим кореном. Дакле, да би било јасније, пишемо $\sqrt{a+b}$, а не само $\surd a+b$. Код Њутна је то овако записано: $\surd\overline{a+b}$.

Њутн затим објашњава мало ову нотацију, па пише, на пример, да уместо $\sqrt{c:a^5}$ пише $a^{\frac{5}{3}}$ ($\surd c:$ се користило за кубни корен). А и каже да A, B, C, D, представљају цео претходни израз. Па је $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n}AQ$ и слично за C и D. Даје и пример

$$(c^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^3}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \text{ итд,}$$

који детаљно образлаже.

Остали примери дају решење једначина $y^3-2y-5=0$ и $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$, редове за $\sin x$, $\sin^2 x$, решење једног Кеплеровог проблема за елипсу, ректификацију лука елипсе и хиперболе, површину хиперболе уз помоћ развоја за логаритам, квадратуре квадратрисе и запремину одсечка ротационог елипсоида. Њутн не жели баш све да открије, те наводи резултате који су познати.

Наравно, овде је природно запитати се какве везе имају решења ове две наведене једначине са развојем у ред. Наиме, Њутн је 1669. године, када је проучио рад Меркатора „*Logarithmotechnia*” из 1668. и Грегорија „*De vera circuli et hyperbolae quadratura*” из 1667. у којима су разматрани и неки развоји у редове, саставио рукопис „О анализи једначинама са бесконачно много чланова”, који је објављен тек доста касније, 1711. године. У том делу разматра баш та два примера. Ево како је он то радио.

Најпре се позабавио нумеричким решењем горенаведене једначине $y^3-2y-5=0$. Примећује да је једно решење близу двојици, те поставља $y=2+p$. Заменом у горњу једначину добија $p^3+6p^2+10p-1=0$. Како је p мало, он занемарује део p^3+6p^2 и поставља $10p-1=0$. Добија да је $p=0,1$. Наравно, p није толико, али је близу, стога поставља $p=0,1+q$ и то ставља у једначину по p. Добија $q^3+6,3q^2+11,23q+0,061=0$. Зна да је q мало, па занемари $q^3+6,3q^2$ и добије $11,23q+0,061=0$. Стога за q узима приближно $-0,0054$ (овде је извршио заокругљивање, али нема то значаја) и поставља $q=r-0,0054$. Добија једначину по r и занемаривањем виших степена добија $r=-0,00004853$ (као што и овде видите, Њутн је волео да рачуна). Тако да добија приближно решење једначине $2,09455147$. Ево таблице коју је дао да прикаже рачун.

$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$+2y$	$-4-2p$
	-5	-5
	Summa	$-1+10p-6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0,06+1,2+6,0$
	$+10p$	$+1,\quad+10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$	$+6,3q^2$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642\quad+11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$
$-0,00004854+s=r$		

Затим прелази на, de facto, симболичко решавање једначине

$$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0.$$

Најпре тражи шта се добија када је $x=0$. Добије једначину $y^3+a^2y-2a^3=0$ и констатује да је решење $y=a$. Сада у почетну једначину замени $y=a+p$ и посматра само линеарне и константне чланове по p, тј. $4a^2p+a^2x=0$. Дакле, p је „приближно” $-\frac{1}{4}x$. Замени $p=-\frac{1}{4}x+q$ и понови поступак. На следећој таблици можемо видети тражени развој y и поступак рачунања.

$$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$$

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\ \&c.$$

$+a+p=y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^3+a^2p$ $+a^2x+axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a\ x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$ $-a^2x+4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2+axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$		

Вратимо се кореспонденцији Њутна и Лајбница преко Олденбурга. Лајбниц је одговорио на ово писмо у августу и у њему је навео неке своје резултате о квадратурама, алудирајући на то да има општи метод. Такође је навео неке примере редова, попут $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$, који представља однос површине круга и њему описаног квадрата (дакле $\pi/4$).

Њутн је одговорио у октобру дужим писмом у коме је похвалио Лајбница на резултатима и навео да је и он дошао до таквих резултата. Па ће у овом писму указати на други начин како је дошао до неких развоја.

На почетку својих студија математике, када сам се упознао са радовима нашег славног Валиса, при разматрању редова чијим је уметањем он сам одредио површине круга и хиперболе, чињеница је да се у низу кривих чија је заједничка база или оса x а ординате

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{1}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{3}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}},\quad (1-x^2)^{\frac{5}{2}},\ \text{итд.}$$

ако се површине сваке друге међу њима, наиме

$$x, \quad x-\frac{1}{3}x^3, \quad x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5, \quad x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7, \text{ итд.}$$

могу интерполирати, морали бисмо добити површине оних између њих, од којих је прва $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ круг: да бих интерполирао ове редове приметио сам да је код свих њих први члан x и да су други чланови $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, итд. у аритметичком низу, и стога прва два члана реда који настаје уметањем треба да буду $x-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right)$, $x-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}x^3\right)$, $x-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3\right)$, итд. Да бих уметнуо остале чланове, приметио сам да су имениоци 1, 3, 5, 7, итд. у аритметичком низу, тако да само још вредности бројилаца треба одредити. Али, у датим површинама појављивале су се цифре бројева који су степени броја 11, наиме 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4, тј. најпре 1; онда 1,1; на трећем месту 1, 2, 1; на четвртом 1, 3, 3, 1; на петом 1, 4, 6, 4, 1, итд. И онда сам почео да размишљам како се остали бројеви у низу могу добити помоћу прва два и нашао сам да ако ставимо m за други број, остали се добијају непрекидним множењем чланова овог низа

$$\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}, \text{ итд.}$$

На пример, ако је $m=4$, онда ће $4\times\frac{1}{2}(m-1)$, тј. 6 бити трећи члан и $6\times\frac{1}{3}(m-2)$, тј. 4 ће бити четврти, $4\times\frac{1}{4}(m-3)$, тј. 1 ће бити пети и $1\times\frac{1}{5}(m-4)$, тј. 0 ће бити шести у ком тренутку се низ зауставља. У складу са тим сам применио ово правило и како је, за круг, други члан $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^3\right)$, ставио сам $m=\frac{1}{2}$ и онда су чланови који су се појавили били

$$\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2} \text{ или } -\frac{1}{8}, \quad -\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}-2}{3} \text{ или } +\frac{1}{16}, \quad \frac{1}{16}\times\frac{\frac{1}{2}-3}{4} \text{ или } -\frac{5}{128},$$

и тако до бесконачности. Тако сам разумео да је површина кружног одсечка коју сам тражио

$$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{3}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{5}{128}x^9}{9} \quad \text{итд.}$$

Потом констатује да се тако могу формирати одговарајући редови и за остале случајеве. Но, онда је приметио да се и

$$(1-x^2)^{\frac{0}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{2}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{4}{2}}, \quad (1-x^2)^{\frac{6}{2}}, \quad \text{итд,}$$

тј.

$$1, \quad 1-x^2, \quad 1-2x^2+x^4, \quad 1-3x^2+3x^4-x^6, \quad \text{итд.}$$

могу на исти начин интерполирати као и површине које они одређују. Само нема имениоца 1,3,5,7, итд. Дакле, помоћу раније примећеног правила добио је да је

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\ldots$$

као и развоје за $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ и $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. Тако је добио опште правило за развој које је презентовао у првом писму. Да би проверио те развоје помножио је $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6\ldots$ са самим собом и заиста добио $1-x^2$, јер су остали чланови реда нестали. Слично је $1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6\ldots$ помножио два пута са самим собом и добио заиста $1-x^2$, те је тако проверио и развој за $(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$. Напокон је извео и другачију проверу. Наиме, нашао је $\sqrt{1-x^2}$ помоћу стандардног метода којим се тражи квадратни корен из неког броја формирањем цифара, а који смо раније објаснили. Овде нам степени x-а представљају цифре. И наравно да је добио исти резултат.

Занимљиво је ово што је Њутн писао прокоментарисати. Видимо да је он „погађао” резултат на један доста једноставан начин. То вероватно није необично, пошто је био инспирисан Валисовим радом, а код њега тога доста има. Но, ипак је извршио проверу касније на други начин. Друга је ствар да он уопште не говори о обичном биномном развоју и одговарајућим коефицијентима (Паскалов троугао), него до тога долази из разматрања површине. Забавна је и напомена у вези степена броја 11. Нама је јасно да се тај феномен дешава због обичне биномне формуле и чињенице да је $11^n=(10+1)^n$. Но, тако можемо добити само биномне коефицијенте који су једноцифрени. Ако бисмо желели да добијемо двоцифрене, онда би требало посматрати 101^n. На пример $101^5=\underline{1}\,\underline{05}\,\underline{10}\,\underline{10}\,\underline{05}\,\underline{01}$. За вишецифрене наравно треба гледати степене бројева $1001, 10001$, итд.

Њутн потом у писму наводи следећи анаграм

6accdæ13effi3l9n4o4qrr4s8t12vx.

Наравно, ми смо навикли на занимљивије анаграме, где треба од неке речи или реченице, које све имају смисла, пермутацијама слова направити нову реч или реченицу. Но, овде је само наведен број појединих слова. Ако би Лајбниц могао ово да распетља, добио би

Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvent fluxiones invenire et vice versa.

У преводу:

За дату једначину која укључује ма који број течних величина, наћи протоке, и обратно.

Пре него што прокоментаришемо „шта је писац хтео да каже”, наведимо, као занимљивост да су научници у то време користили анаграме да објаве неки свој резултат и да тако установе свој приоритет у проналаску. На пример, Хајгенс је 1655. објавио своје откриће Сатурновог месеца (то је тада био први, сада знамо да је то највећи његов сателит Титан) у облику анаграма:

ADMOUERE OCULIS DISTANTIA SIDERA NOSTRIS UUUUUUU CCCRRHNBQX.

Решење: *Saturno luno sua circunducitur diebus sexdecim horis quatuor*, у преводу: Сатурнов месец има орбитални период од 16 дана и 4 сата.

Дакле, Њутн је желео да обезбеди свој приоритет. У чему? Он ту наводи да има општи метод и то је његов метод флуксија. Овде одмах треба рећи да смо у преводу анаграма превели, да се тако изразимо, и више него што је требало. Наиме, 'течне величине' ћемо убудуће звати 'флуенте', а нећемо користити ни термин 'проток', него флуксија. Њутн је разматрао величине које се мењају у времену (то су те флуенте) и брзине њихових промена (флуксије). Вратићемо се на ово врло брзо.

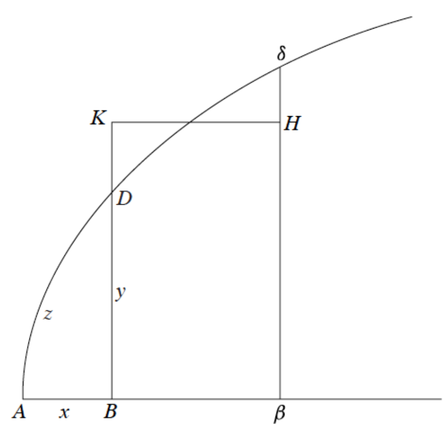
У писму наводи кратко како се налази квадратура криве $z^{\theta}(e+fz^{\eta})^{\lambda}$ (овде уместо y користи z, док су f и e константе, а θ, λ и η рационалне константе). Заправо овде видимо основни његов метод решавања проблема квадратуре. На почетку свог раније споменутог дела „О анализи једначинама са бесконачно много чланова" Њутн наводи три правила за рачунање површине испод кривих.

Правило 1. Ако је $y = ax^{\frac{m}{n}}$, онда је површина испод y једнака $a\frac{n}{n+m}x^{\frac{n+m}{m}}$.

Правило 2. Ако је y сума више чланова, којих може бити и бесконачно, онда је површина испод y дата сумом површина за све чланове.

Правило 3. Да би израчунали површину испод криве $f(x,y)=0$, треба развити y као суму чланова облика $ax^{\frac{m}{n}}$ и применити Правило 1 и Правило 2.

Видели смо да је Валис извео то прво правило. Ево како је Њутн доказао то правило.



Треба да докаже да, ако је $ax^{\frac{m}{n}} = y$, онда је $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = површина ABD. Заправо, он доказује обрат, тј. из претпоставке да је површина дата наведеном формулом, онда је и y тако као што је наведено!

Најпре је, као припрему, детаљно доказао специјалан случај, када је $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Са цртежа видимо ознаке, а још је $B\beta = o$ и $BK = v$. Ево како он доказује општи случај.

Ако се стави да је $\frac{na}{m+n} = c$ и $m+n = p$, тада је $cx^{\frac{p}{n}} = z$, или $c^n x^p = z^n$. Тада заменом $x+o$ уместо x и $z+ov$ (или, што је исто $z+oy$) уместо z, добија се

$$c^n(x^p + pox^{p-1} \text{ итд.}) = z^n + noyz^{n-1} \text{ итд.}$$

при чему испуштам остале чланове који ће на крају крајева нестати. Даље, ако одбацим једнаке $c^n x^p$ и z^n, а остале поделим са o, остаје

$$c^n p x^{p-1} = nyz^{n-1}\left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right)$$

или, када се подели са $c^n x^p$:

$$px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}} \quad \text{или} \quad pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny.$$

Када се c замени својом вредношћу $\frac{na}{m+n}$, а p са $m+n$... добија се $ax^{\frac{m}{n}} = y$.

Дакле, он овде користи да су операције којима барата, а које су, de facto налажење интеграла $\int_0^x f(t)dt$ и извода, инверзне једна другој да би дошао до закључка. Заправо он наводи после и таблицу кривих и површина, односно, de facto, таблицу интеграла. У вези доказа можемо да кратко прокоментаришемо да му је o та мала величина (без обзира што на слици изгледа велико!) и да променом x за то o се површина z повећа за површину правоугаоника (свеједно да ли за страницу узме y или v и једно и друго је приближно, а на крају v постаје y — у доказу специјалног случаја, он користи v и ради развоје до краја, дакле детаљније и пажљивије).

Њутну је од централног значаја било то што је и са редовима могао да ради исто као и са коначним изразима. Ево шта је о томе рекао у овом делу:

> И шта год да обична Анализа (мисли на алгебру) остварује помоћу једначина са коначно много чланова, нови метод може то исто да уради помоћу бесконачних једначина. Тако да нисам имао никакав проблем да му дам име Анализа. Пошто резоновање није мање сигурно него у претходном нити су једначине мање егзактне ... Да закључимо, можемо безбедно да прихватимо да то све припада Аналитичкој вештини помоћу чега можемо одредити површине и дужине лукова кривих егзактно и геометријски.

Као што знамо, Вијет је за Алгебру користио назив Аналитичка вештина. О томе овде Њутн говори. Заправо са Њутном и његовим вештим коришћењем редова при рачунању површина, као и прихватањем од стране других математичара, почиње то терминолошко одвајање Алгебре, за коју се везују коначни изрази и Анализе која манипулише са бесконачним изразима (поједностављено говорећи наравно), а коју имамо данас.

Већ смо споменули флуенте и флуксије. Њутн је припремио рад „О методу редова и флуксија” до 1671, али је тај рад доста касније објављен. Дакле, ту имамо кинематичку идеју о величинама које „теку” у времену. На пример, тачка генерише линију, линија генерише површ. Такве величине се називају флуенте, а њихове брзине промене флуксије. Код Њутна се на одређеним местима појављују и моменти који представљају бесконачно мале прираштаје таквих величина у бесконачно малим интервалима времена (то ће касније Њутн избегавати). У бесконачно малим интервалима сматра да су флуксије константе, те се може сматрати да су моменти пропорционални њима.

Увео је и нотацију да означи тај свој рачун. Са a, b, c, d је означавао константе, са v, x, y, z флуксије, а одговарајуће флуенте са l, m, n, r, док је бесконачно мали интервал времена био o. Касније је, у деведесетим годинама XVII века увео ознаке $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Саме флуксије имају своје флуксије, па је тако посматрао и $\ddot{x}$, па и $\dddot{x}$. А флуенту чија је флуксија x означавао је са $\acute{x}$. Површину испод криве y је означавао са Qy или са $\boxed{y}$.

Њутн је навео једноставан алгоритам којим би добијао везу између флуксија на основу везе између флуенти. Наиме, ако би имао израз ax^n, он би га замењивао са $anx^{n-1}\dot{x}$. Тако би урадио за све чланове у изразу по свим флуентама и онда све то сабирао. На пример, ако има

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0, \tag{1}$$

добио би

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0. \tag{2}$$

То би оправдао на следећи начин. На x и y би додао бесконачно мале прираштаје $\dot{x}0$ и $\dot{y}o$ и заменио у једначину (1).

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0, \tag{3}$$

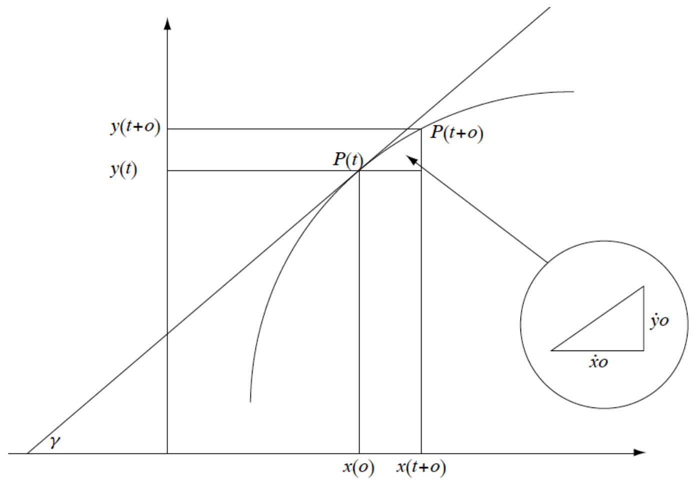
Средио би (3) користећи (1), делећи са o, а онда занемарио чланове који још у себи садрже o, јер је „o бесконачно мало”. Тако би добио заиста (2).

Он се ту бавио проблемима максимума и минимума, налажења тангенте, кривине, површина, дужина лукова. Сви се ти проблеми своде на два проблема.

Проблем 1. Ако је познат пређени пут у сваком тренутку времена, наћи брзину у свакој тачки.

Проблем 2. Ако је позната брзина у свакој тачки, наћи пређени пут у свакој тачки.

Видимо да се ради о два инверзна проблема. Проблем налажења тангенти, екстремних вредности и кривине, своди се на први проблем.



Имамо криву у равни дату једначином $f(x,y)=0$. Како је $x(t+o)-x(t)=\dot{x}o$ (на слици уместо $x(o)$ треба да стоји $x(t)$) и $y(t+o)-y(t)=\dot{y}o$ и како је o бесконачно мало, може се сматрати да троугао који је издвојен на слици сличан троуглу који чине тачке пресека тангенте и x-осе, $(x(t),0)$ и $P(t)$, те је

$$tg\gamma=\frac{\dot{y}o}{\dot{x}o}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Наравно, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ се може наћи раније наведеним алгоритмом. Екстремна тачка је дата са $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=0$, док је Њутн показао да је полупречник кривине ρ дат са

$$\rho=\frac{\left(1+\left(\dot{y}/\dot{x}\right)^2\right)^{3/2}}{\left(\ddot{y}/\dot{x}^2\right)}.$$

Године 1687. Њутн је објавио своје „Математичке принципе природне филозофије”. То је свакако једно од најзначајнијих научних дела икада. Пут који је довео до његовог објављивања је био занимљив и нимало једноставан. Нећемо се њиме бавити због недостатка времена, наведимо само као занимљивост да се, да би обезбедио објављивање тог дела, Едмонд Халеј (сви смо чули за Халејеву комету) обавезао да ће он финансирати издање тог дела. Наиме, Краљевско друштво је практично банкротирало издајући „Историју риба”, дело које се уопште није продавало. Пошто је Халеј обезбедио штампање Њутновог дела, добио је на поклон од друштва 50 примерака те књиге коју нико није желео да купи. Сматра се да је прво издање имало око 300 примерака.

Главни проблем је био да се на основу закона универзалне гравитације, по коме сила гравитације опада са квадратом растојања, установе Кеплерови закони, посебно да се планете крећу по елипсама са Сунцем у једној жижи. Постојао је и озбиљан технички проблем како при овим разматрањима редуковати тела, на оно што сада зовемо, материјалну тачку – како показати да се може претпоставити да је сва маса, на пример, Земље скупљена у тачку. Њутн је успео да разреши те и друге проблеме, попут кретања тела кроз средину која је пружала отпор (дакле, не кроз вакуум). Сам назив дела даје и критику раније Декартове филозофије која није одговарала физичкој стварности. Овде се ради о МАТЕМАТИЧКИМ ПРИНЦИПИМА а не о чисто филозофском размишљању.

Само дело је написано у геометријском духу, ту се практично флуксије и не појављују. Но, на самом почетку дела налазимо, после основних закона (Њутнових закона како их сада зовемо) 11 математичких лема. Заправо прва глава прве књиге (дело се састоји од три књиге) носи назив Метод првих и завршних односа величина помоћу којих доказујемо тврђења која следе.

Ових 11 лема су разматрали многи аутора током више од 300 година од појављивања Њутновог дела. Занимљивости ради, 1995. године су изашле чак четири књиге које се баве Њутновим ПРИНЦИПИМА. Ми ћемо покушати само укратко да кажемо о чему се овде ради.

Лема I

Величине, или односи величина, који у сваком коначном времену конвергирају непрекидно ка једнакости, и пре истека тог времена се приближавају ближе једна другој од сваке дате разлике, постају напокон једнаке.

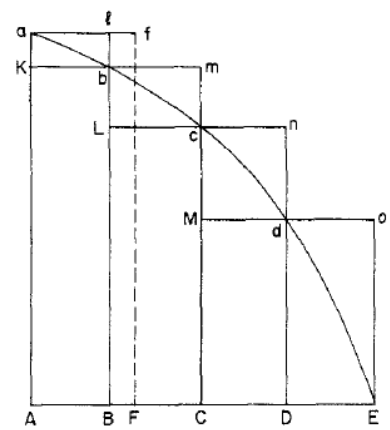
Доказ следи

Ако то одричете, претпоставите да су напокон различите и нека је D њихова крајња разлика. Онда се оне не могу примаћи више једнакости него што је та дата разлика D; што је супротно претпоставци.

Видимо да овде имамо неки облик лимеса, односно закључак да ако имамо две величине чија разлика тежи 0, онда се њихове граничне вредности једнаке (садашњим језиком речено). Претпоставља се 'коначно време' да величине не би постале бесконачно велике. Ово је само коментар, не и озбиљна дискусија, видимо да могу да постоје разне примедбе на ово закључивање.

Лема II de facto говори о постојању интеграла монотоне функције.

Ако се у дату фигуру $AacE$, коју ограничавају праве линије Aa, AE и крива acE упише ма који број паралелограма Ab, Bc, Cd, итд. над једнаким базама AB, BC, CD, итд. и страницама Bb, Cc, Dd, итд. паралелним страници Aa фигуре; и паралелограми $aKbl$, $bLcm$, $cMdn$, итд. се комплетирају: тада ако се претпостави да се ширине паралелограма смањују, и њихов број повећа до бесконачности, кажем да ће завршни односи које ће уписана фигура $AKbLcMdD$, описана фигура $AalbmcndoE$ и криволинијска фигура $AabcdE$ имати једна према другој бити односи једнакости.



Дакле, тврди се да количници ових површина теже ка 1, па се тиме имплицитно тврди и да све површине теже ка истој вредности. Доказ није тежак. Њутн констатује да је разлика између сума површина описаних и уписаних правоугаоника (он наравно каже паралелограма) једнака површини правоугаоника $ABla$, али та површина тежи ка нулу када се AB неограничено смањује. Дакле, он заправо показује да разлике ових површина теже нули, па онда добија тражено уз помоћ прве леме.

Следећа лема говори да се слично може закључити и ако основе нису једнаке. Заправо на горњој слици то видимо. Ту се претпостави да је највећа основа AF, па опет разлика буде мања од површине правоугаоника $AFfa$, која опет тежи нули.

Лема IV пореди две фигуре попут ових са претходне слике, од којих је једна увећана у односу на другу и тврђење је да ако се односи сума уписаних површина правоугаоника приближавају некој вредности, онда ће односи и тих површина бити једнаки тој вредности. Овде видимо нека једноставна својства интеграла (али монотоне функције). Лема V нам такође не представља проблем, она каже да су одговарајуће стране сличних фигура, било криволинијских било праволинијских, пропорционалне једна другој и да се површине сличних фигура односе као квадрати одговарајућих страница.

Но, касније леме су сложеније и више би времена однело да покушамо да их протумачимо. Рецимо само да постоје јаки аргументи да се у њима препозна дефиниција извода функције, да се одређује извод синуса (заправо да се показује да $\frac{tg\,x}{x}$ и $\cos x$ теже истој вредности када се x приближава 0, а пошто се зна да се $\cos x$ приближава 1, онда имамо и познати резултат да $\frac{\sin x}{x}$ тежи ка 1, а то наравно одговара резултату да је извод синуса једнак косинусу). Такође се међу тим лемама крије и разматрање другог извода, а и Њутн-Лајбницова формула.

Њутн јесте био свестан проблема у вези његових КРАЈЊИХ ОДНОСА. Пошто он ту, de facto, разматра лимесе облика $\frac{0}{0}$; он покушава да објасни да то може да постоји мада се, јасно, не могу директно заменити вредности. Бискуп Џорџ Беркли је био велики, али и добронамеран критичар тих и сличних, непрецизно дефинисаних појмова и те критике су свакако озбиљно схватане и у даљем су чињени покушаји да се ствари поправе. Наравно, после доста времена смо дошли и до добро заснованог појма лимеса, али Њутн јесте те ствари антиципирао.

Лајбниц

Готфрид Вилхелм Лајбниц (1646–1716) рођен је у Лајпцигу у протестантској породици међу чијим је даљим прецима сигурно било и Словена. Да ли је баш био лужички Србин или не, нећемо овде расправљати. ☺

Слика 7: Лајбниц

Његов отац, Фридрих Лајбниц (1597–1652), био је професор филозофије морала на универзитету у Лајпцигу и имао је богату библиотеку где је млади Лајбниц рано могао да почне са својим образовањем. Студирао је филозофију и право на универзитетима у Лајпцигу, Јени и Алтдорфу. Што се математичких знања тиче, ту је имао само елементарно образовање. Но, рано је замислио пројекат конструкције математичког језика помоћу кога би се дедуктивно закључивање могло изводити. Те његове идеје су антиципирале каснији развој алгебре логике у XIX веку. Тај програм он никада није ни напустио, те и на његова каснија математичка истраживања треба гледати у том светлу. Пошто је 1666. докторирао на универзитету у Алтдорфу, ушао је у службу надбискупа у Мајнцу. Положај надбискупа у Мајнцу је био изузетно важан у Светом римском царству. Наиме, надбискуп у Мајнцу је био један од седам људи који су бирали цара.

Лајбниц је године 1672–1676. провео у дипломатској мисији у Француској. Наиме, немачке државе су биле прилично ослабљене после тридесетогодишњег рата (1618–1648) и заправо је Царство постојало само на папиру. Било је много држава и територија које су могле да одржавају своју војску. Стога је постојала опасност од уједињене Француске и агресивне политика краља Луја XIV („Краљ Сунце"). Лајбницова идеја, коју је изложио у *Consilium Aegyptiacum*, је била да се пажња Француске са Немачке и Холандије скрене на турски Египат, да је то оно што би требало да интересује једног хришћанског краља. Но, када је стигао у Париз, није му био дозвољен пријем код краља, а један од краљевих министара му је рекао да крсташки ратови нису више интересантни. Заправо је већ тада Луј XIV решио да изврши инвазију на Холандију, на нацију „продавачица риба и трговаца" по његовим речима.

Но, Лајбницов долазак у Париз му је омогућио да упозна многе значајне научнике, а посебно холандског научника Хајгенса, који је живео у Паризу од 1666. до 1681.

Слика 8: Кристијан Хајгенс (1629–1695)

Хајгенс је баш у то време припремао своје значајно дело *Holorogium Oscillatorium*, које је било посвећено разним физичким и математичким аспектима кретања клатна. Он је видео да Лајбниц има талента, али да је слабо математички образован, те га је упутио у то шта да учи. Године 1673. нова дипломатска мисија одвела је Лајбница у Енглеску. Радило се о сугестији надбискупа Мајнца да енглески краљ посредује у сукобу Француске и Холандије. У сваком случају, Лајбниц је упознао Немца Олденбурга (кога смо већ споменули) и уз његову помоћ многе значајне научнике Енглеске. Заправо, он је у Краљевском друштву добио прилику да прикаже рад своје машине за рачунање, која је била унапређење у односу на Паскалову по томе што је могла да врши и множење и дељење. Мало због те машине, а више због веза које је Олденбург имао, Лајбниц је успео да постане члан Краљевског друштва. Од 1676. године Лајбниц је у служби Куће Хановер, самим тим, на самом крају, и у служби енглеског краља Џорџа I.

У периоду 1672–1673. Лајбниц се бавио редовима. Посебно му је било занимљиво да разматра нумеричке низове разлика, тј. низове (b_n) за које је

$$b_1 = a_1 - a_2, \quad b_2 = a_2 - a_3, \quad b_3 = a_3 - a_4, \ldots$$

за неки низ (a_n). Наравно, тада је лако могао да нађе суму $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 - a_{n+1}$. Ова једноставна идеја му је касније помогла и у развоју диференцијалног рачуна, по његовим сопственим речима. Први пример на коме је применио овај поступак је, добро нам познати ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$. Наиме, $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$, те се лако добија да је сума реда једнака 2. Дакле ове, како их сада зовемо „телескопске суме” су му биле посебно значајне. С тим у вези, формирао је ‘хармонијски троугао’ (Паскалов троугао се зове и ‘аритметички троугао’):

$$\begin{array}{c}
1 \\[4pt]
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \\[4pt]
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{3} \\[4pt]
\frac{1}{4} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad \boxed{\tfrac{1}{4}} \\[4pt]
\frac{1}{5} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \boxed{\tfrac{1}{20}} \quad \boxed{\tfrac{1}{5}} \\[4pt]
\frac{1}{6} \quad \boxed{\tfrac{1}{30}} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{6} \\[4pt]
\frac{1}{7} \quad \boxed{\tfrac{1}{42}} \quad \boxed{\tfrac{1}{105}} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{7}
\end{array}$$

Овај се троугао формира помоћу разлика. Наиме $n+1$-ва ’дијагонала’ има чланове који су разлике одговарајућих чланова n-те ’дијагонале’.

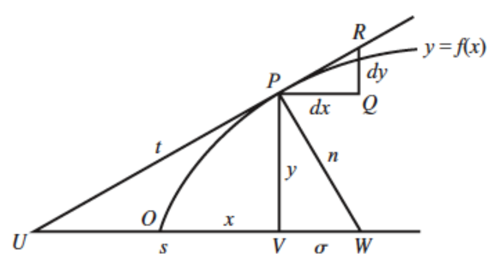
На пример: $\frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{42} = \frac{1}{30} - \frac{1}{105}$. Стога је сума бројева у n-тој дијагонали заправо телескопска сума помоћу добијена од бројева у претходној, те је та сума једнака броју на почетку претходне дијагонале. На пример,

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{60} + \frac{1}{140} + \cdots = \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{105} + \cdots = \frac{1}{4}, \quad \text{итд.}$$

Године 1673. Лајбниц се срео са идејом такозваног карактеристичног троугла читајући Паскалова *Lettres de 'A. Detonville* из 1659. године. У овим писмима је Паскал

Слика 9: Блез Паскал (1623–1662)

приказао разне резултате о квадратурама. Amos Detonville је заправо анаграм од Louis de Montalte (уз изједначавање v и u), псеудоним који је Паскал користио у својим „Писмима из провинције". Паскал је у том конкретном проблему разматрао инфинитезимални троугао придружен тачки на кругу, али је Лајбниц ту идеју генерализовао.



У произвољној тачки P на кривој $y = f(x)$ постављена је тангента и формиран је тај 'карактеристични (криволинијски) троугао' који чине бесконачно мали померај дуж x-осе, тј. dx, бесконачно мали померај дуж y-осе, тј. dy и бесконачно мали померај дуж саме криве ds. Са

t је означен део тангенте од те тачке до пресека са x-осом, а са n део нормале од те тачке такође до пресека са x-осом. Са s, односно σ је означена пројекција тангенте t на x-осу (подтангента), односно нормале n на x-осу (поднормала).

Пошто се ради о инфинитезималном троуглу, може се сматрати да се крива у том бесконачно малом делу поклапа са тангентом те можемо сматрати да се троугао са страницама dx, dy, ds поклапа са троуглом PQR, који је сличан и троуглу UVP и троуглу PVW. Стога је

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sigma}{y} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{n}{y}.$$

Лајбниц је, да би имао конкретан проблем, претпоставио да је поднормала (σ) обрнуто пропорционална ординати, тј. претпоставио је да је $\sigma = a^2/y$. Тада из прве релације добија

$$\int y^2 dy = \int a^2 dx,$$

чиме добија да крива има једначину $y^3/3 = a^2 x$ те констатује да је крива са наведеном особином кубна парабола.

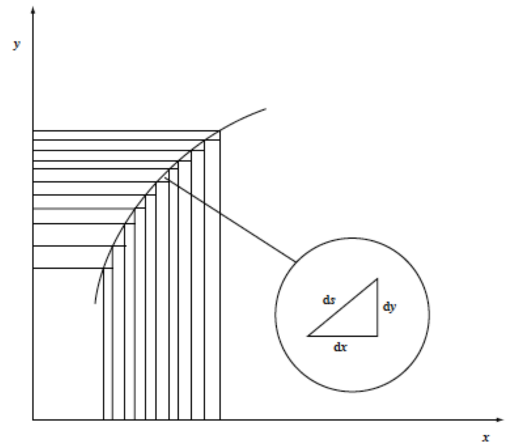
Из друге релације добија

$$\int y ds = \int n\, dx,$$

што даје формулу за површину тела које се добија обртањем криве око x-осе.

Током 1675. Лајбниц је направио суштинске кораке који су га довели до формулације метода који се, у нешто промењеној форми и сада користи. У ту сврху су му посебно били значајни карактеристични троугао и посматрање површине испод криве као суме бесконачно много трака.

Лајбниц је замислио дељење x-осе испод задате криве на бесконачно много бесконачно малих интервала чији су крајеви $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Диференцијал је дефинисао као $dx = x_{n+1} - x_n$. На самој кривој имамо одговарајуће тачке $s_1, s_2, s_3, \ldots$, као и ординате $y_1, y_2, y_3, \ldots$ на y-оси, као и диференцијале $ds = s_{n+1} - s_n$, $dy = y_{n+1} - y_n$. Карактеристични троугао је издвојен на слици и има стране dx, dy, ds, а видели смо већ да можемо сматрати да је сличан троуглу који формирају s, y, t (ознаке са претходне слике). Стога је $tg\gamma = \frac{dy}{dx}$, где је са γ означен угао који тангента у датој тачки заклапа са x-осом. Површина испод криве је унија трака ydx. Лајбниц је у почетку користио Кавалијеријев симбол omn. али је касније, вероватно на сугестију Јохана Бернулија (од кога потиче и назив интегрални рачун), прешао на ознаку $\int$ као издужену варијанту слова s, а наравно од речи сума. Прво Лајбницово



публиковано појављивање ознаке диференцијала је било 1684, а интеграла 1686. године.

Симболи d и $\int$ могу се примењивати више пута те се тако може посматрати и, на пример, ddx, које је бесконачно мало у односу на dx. За d поновљено n пута користио се симбол d^n, па је n-ти диференцијал од x био $d^n x$. Израз $\frac{dy}{dx}$ код Лајбница не треба сматрати изводом функције, него просто односом диференцијалних величина dy и dx. То олакшава алгебарске манипулације диференцијалима. На пример „ланчасто правило", тј. извод сложене функције се може видети као проста манипулација разломцима:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Ако се y посматра као зависна променљива од x у којој се узима да су x_n еквидистантне, тада је dx константно, па је $d^2x = ddx = 0$ и сви остали диференцијали од x вишег реда нестају. За рачунање $d(xy)$ користио је формулу

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy,$$

а потом је, без даљег образложења, изоставио $dxdy$ као бесконачно малу вишег реда. Наравно, итерацијом овог поступка, ако је $y = x$ може се добити и $d(x^n) = nx^{n-1}dx$. За рационалне изложиоце, тј. за случај $y = x^{a/b}$, посматрао је изведену једнакост $y^b = x^a$, применио претходно правило, те добио $by^{b-1}dy = ax^{a-1}dx$, те је одатле извео да је $d(x^{a/b}) = \frac{a}{b}x^{\frac{a-b}{b}}dx$. Лајбниц је своја правила за диференцијални рачун објавио у раду у часопису *Acta Eroditorum*, чији је он био и један од уредника, 1684. године, са дугачким насловом у коме се de facto описује шта се све може урадити његовим коришћењем: *Nova methodus* *pro maximis i minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus.* Лајбниц се веома трудио да рекламира своје идеје, комуницирао је са многим математичарима ван Британије и то је, уз једноставнији и бољи запис од Њутновог, свакако допринело великом ширењу његовог приступа ван Британије.

Деведесетих година XVII века, као и у првим декадама XVIII једна од главних области истраживања у Лајбницовом калкулусу састојала се у развоју правила за диференцирање и интеграцију трансцендентних функција – тригонометријских, логаритма и експоненцијалне функције. Јохан Бернули је ту био посебно активан. Дошао је до правила за, како га је називао, 'експоненцијални калкулус':

$$d(\ln u) = \frac{du}{u}, \quad d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u dv.$$

Лајбниц је $\int y dx$ видео као 'суму' бесконачног низа трака (правоугаоника) $y dx$. Из рада са редовима знао је да се сума реда може добити помоћу низова разлика. Да би редуковао $\int y dx$ на суму разлика, треба да нађе z тако да је $dz = y dx$ (сетите се низова (b_n) и (a_n): треба сумирати b_n а зна се да је $b_n = a_n - a_{n+1}$). Тако да закључује да је

$$\int y dx = \int dz = z.$$

Када је открио тако инверзну природу диференцирања и интеграције, одмах је могао да нађе и правило за парцијалну интеграцију. Наиме, из $d(xy) = xdy + ydx$ следи

$$xy = \int d(xy) = \int xdy + \int ydx.$$

Ојлер

Слика 10: Леонард Ојлер

Леонард Ојлер (1707–1783) је био ученик Јохана Бернулија и сигурно је најпознатији швајцарски математичар, а можда и најплоднији математичар у историји математике. Како је он највећи део свог радног века провео у Русији, можемо га сматрати и руским математичаром. Математику је учио од Јохана Бернулија и дружио се са његовим синовима Николом и Данијелом. Уз подршку Бернулијевих, добио је позицију у Петрограду 1727. године. Ојлер је био свестрано образован и заправо је добио место на медицини и физиологији, касније на природној филозофији. Но, Никола Бернули је умро 1726, а Данијел се 1733. из Петрограда преселио у Базел и Ојлер тако остаје, у својој 26-ој години најзначајнији математичар у Петрограду.

Започнимо најпре Ојлеровим доприносом математичкој нотацији. Он је увео и промовисао коришћење слова e за базу природног логаритма. Симбол π јесте коришћен и раније, али га је Ојлер значајно промовисао. Пред крај живота је увео и симбол i за корен из -1. Занимљиво је да га је раније користио за ознаку бесконачности, па је тако писао и $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$, где је i бесконачни број. У елементарној геометрији је такође имао значајан допринос у нотацији. Странице троугла је означавао са a, b, c, а одговарајуће углове са A, B, C, док је са R, r, s означавао полупречнике описаног и уписаног круга и полуобим троугла. Од других ознака треба навести да је Σ користио за суму, а да је са $f(x)$ је означавао функцију.

У свом делу „Introductio in Analysin Infinitorum" из 1748, које даје основе математичке анализе, увео је функцију од промењиве величине као ‘било који аналитички израз сачињен од те променљиве величине и бројева или константних величина’. Јасно је да таква дефиниција није прецизна, но послужила је Ојлеровој сврси — форсирао је аналитички приступ, па и у раду са тригонометријским функцијама; синус је задат преко реда $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - + \cdots$. На пример, још је у писму Јохану Бернулију из 1740. навео формулу $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$.

Покажимо сада како је Ојлер нашао суму реда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Пођимо од следеће чињенице: ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ нуле полинома $p(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, онда је

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Није се тешко уверити да је ово тачно. Наиме, ако је

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

дељењем са x^n добијамо

$$\frac{1}{x^n} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_2 \frac{1}{x^{n-2}} + \cdots + a_n = 0.$$

Ако је $y = \frac{1}{x}$, онда из $y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ и Вијетових формула добијамо $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = -a_1$, тј.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = -a_1.$$

Ојлер сада ово екстраполира на функцију синус. Наиме, на основу развоја у ред:

$$\sin z = 0 \text{ и } z > 0 \text{ акко } 0 = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots.$$

Сменом $w = z^2$ добија се

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \cdots$$

По аналогији са коначним случајем, ако су нуле овог реда $w_1, w_2, \ldots$ (што су заправо квадрати нула синуса), онда је

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{w_3} + \cdots = -(-\frac{1}{3!}) = \frac{1}{6}.$$

Но, знамо да су позитивне нуле синуса $\pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, па су ове нуле заправо $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \ldots$. Стога добијамо

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{1}{3^2\pi^2} + \cdots = \frac{1}{6},$$

односно $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$. Ојлер је нашао суме $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2l}}$ за све $l\in\{1,2,\dots,13\}$. На пример, добио је

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{26}}=\frac{2^{24}\cdot 76977927\cdot\pi^{26}}{27!}.$$

Наведимо и Ојлеров доказ бесконачности скупа простих бројева коришћењем дивергенције хармонијског реда.

Претпоставимо да постоји само коначно много простих бројева и нека су то $p_1,p_2,\dots,p_k$. Нека је n неки природан број. Тада је

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k},$$

за неке $\alpha_i\geqslant 0$. Узмимо $\alpha=\max\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$. Посматрамо производ

$$P=\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^{\alpha}}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_2^{\alpha}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_k^{\alpha}}\right).$$

Јасно је да се у развоју овог производа у збир појављују сви бројеви од 1 до $\frac{1}{n}$, те је $P>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. Но,

$$\begin{aligned} P &< \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{p_1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p_2}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}=\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1}.\end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<\frac{p_1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2}{p_2-1}\cdots\frac{p_k}{p_k-1},$$

но, како израз на десној страни не зависи од n добијамо да је сума $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ограничена, а знамо да то није тачно. Стога мора постојати бесконачно много простих бројева. Ојлер је много експериментисао са бесконачним редовима, али о томе нећемо сада писати.

У писму Голдбаху из 1746. Ојлер је навео следећи занимљив резултат: $i^i=e^{-\pi/2}$. Наиме, из Ојлерове формуле $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ за $\theta=\pi/2$ добија се да је $e^{i\pi/2}=i$. Стога је

$$i^i=(e^{i\pi/2})^i=e^{i^2\pi/2}=e^{-\pi/2}.$$

Заправо, Ојлер је 1749. показао да се сваки комплексан степен комплексног броја, тј. $(a+bi)^{c+di}$ може изразити у облику $p+qi$. Овај аспект Ојлеровог рада је занемарен и прича о реалним вредностима i^i се озбиљније разматрала тек у XIX веку.

Немогуће је и приближно навести све Ојлерове идеје и резултате из теорије обичних и парцијалних диференцијалних једначина, рачуна коначних разлика, елиптичких интеграла, специјалних функција и других области. У вези нотације наведимо још његову ознаку

$$\left[\frac{p}{q}\right] = \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{1\cdot 2\cdots q},$$

која је, евидентно претеча модерне ознаке $\binom{p}{q}$.

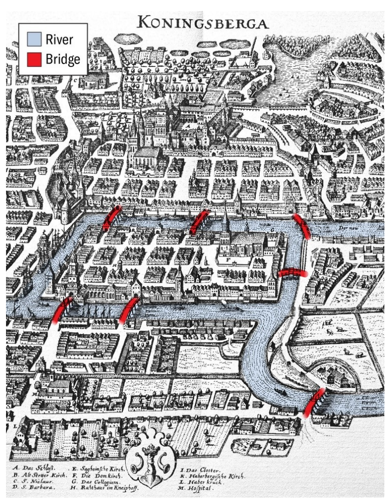
За крај наведимо и Ојлеров доказ мале Фермаове теореме, која каже да је, ако је p прост број, који не дели цео број a, онда p дели $a^{p-1}-1$.

Он је заправо доказао да $p \mid (a^p - a)$ за све a , индукцијом по a. Наравно да је тврђење тачно за $a=1$. И, ако претпоставимо да је тачно за a, лако се покаже за $(a+1)^p-(a+1)$ (наравно користимо модерне ознаке у доказу ради краћег записа):

$$(a+1)^p-(a+1) = a^p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k + 1 - a - 1 = a^p - a + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}a^k.$$

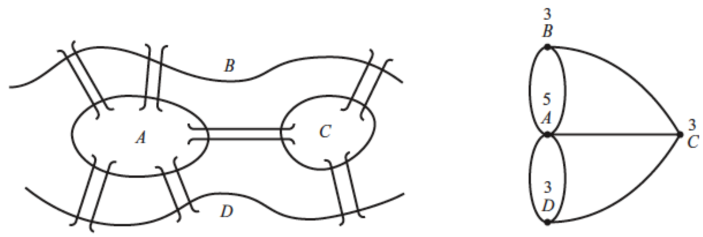
Како $p \mid \binom{p}{k}$ за све $1 \leqslant k \leqslant p-1$, резултат следи из индуктивне хипотезе.

Године 1736. Ојлер је објавио рад за који се сматра да је први рад из области теорије графова. У том раду је он дао решење Проблема о кенигзбершким мостовима. Наиме, у граду Кенигзбергу који је био значајан универзитетски град у Источној Пруској, а у коме је дуги низ година живео и Имануел Кант, на реци Прегал било је седам мостова који су спајали два острва са копном, а и између себе.



Слика 11: Кенигзберг у средњем веку

Проблем се састојао у томе да се установи да ли се може прећи преко сваког моста али тачно једном. Ојлер је проблем поједноставио тако што је и острва и обе обале заменио тачкицама, а мостове луковима који их повезују. Тако је добио граф са слике.



Слика 12: Кенигзбершки мостови и придружен граф

Ако желите да прођете ивицом сваког графа тачно једном, онда у свако теме улазите и излазите паран број пута сем у случају почетног и завршног темена. Видимо да у сваком темену има по три лука (степен сваког темена је 3). Стога је немогуће проћи свим мостовима тачно једном, било да је захтев да се вратите у почетну тачку или не. Пут у графу који пролази сваком ивицом тачно једном, назива се Ојлеров пут. А Кенигсберг се данас зове Калињинград и налази се у Русији.