

10 Afina preslikavanja ravni

10.1 Definicija i osobine afinih preslikavanja

Reč afini označava da se pojam odnosi na prostor tačaka koji je vezan za odgovarajući vektorski prostor. Intuitivno, afino preslikavanje je takvo preslikavanje tačaka u tačke koje indukuje linearna preslikavanja odgovarajućih vektora. Da bi se afina preslikavanja uvela na geometrijski način, tj. bez koordinata, neophodno je uvesti pojam afinog prostora. To bi nas odvelo izvan granica praktičnog.

Zato, pretpostavimo da je Oe ortonormiran koordinatni sistem pozitivne orijentacije u ravni, a (x, y) odgovarajuće koordinate. Afino preslikavanje je preslikavanje koje tački $M(x, y)$ preslikava u tačku $M'(x', y')$ po pravilu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

uz uslov $\det(a_{ij}) \neq 0$. Prethodna jednačina može se zapisati u matričnom obliku

$$X' = AX + q,$$

gde su X i X' kolone koordinata tačaka M i M' . Iz razloga koje ćemo pokazati matrica $A = (a_{ij})$ se naziva **linearni deo afinog preslikavanja**, a vektor kolona q je tzv. **vektor translacije**.

Označimo sa Y i Y' kolone koordinata neke druge tačke N i njene slike N' redom. Jasno je da važi

$$Y' = AY + q.$$

Za odgovarajuće vektore važi:

$$[\vec{M'N'}]_e = Y' - X' = (AY + q) - (AX + q) = A(Y - X) = A[\vec{MN}]_e.$$

Dakle, afino preslikavanje tačaka indukuje linearno preslikavanje vektora određenom matricom A , pa se zato ta matrica predstavlja linearni deo afinog preslikavanja. Primetimo da vektor translacije q nema dejstva na vektorima (oni su invarijantni na translacije), već samo na tačkama.

Pogledajmo sada kakvo značenje imaju matrica A i vektor translacije q .

Teorema 10.1 *Kolone matrice A su koordinate slika baznih vektora, redom. Vektor q predstavlja koordinate slike koordinatnog početka.*

Dokaz: Prvi bazni vektor $\vec{e}_1$ ima koordinata $(1, 0)$. Zato su koordinate njegove slike

$$A[\vec{e}_1]_e = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}.$$

Dakle, prva kolona matrice A predstavlja koordinate slike vektora $\vec{e}_1$. Slično je sa drugom kolonom. Odredimo sada sliku koordinatnog početka $O(0, 0)$. Uvršavanjem u jednačine (33) dobijamo da je slika koordinatnog početka tačka $Q(q_1, q_2)$. $\square$

Teorema 10.2 (Osobine afinih preslikavanja) 1. *Bijekcije su;*

2. *Preslikavaju prave na prave, a krive drugog reda na krive drugog reda;*

3. *Čuvaju razmeru tri tačke;*

4. *Čuvaju paralelnost. Dakle, slika paralelograma je paralelogram.*

5. *Afinim preslikavanjem možemo preslikati proizvoljan trougao na proizvoljan drugi trougao.*

6. Ako je $\mathcal{F}'$ slika figure $\mathcal{F}$ pri afinjoj transformaciji ?? tada je odnos njihovih zapremina $V(\mathcal{F}') : V(\mathcal{F}) = |\det A|$.

Dokaz:

1) Preslikavanje (33) je bijekcija zato što ima inverzno preslikavanje. Naime formule (33) mogu da se reše po (x, y) jer je $\det A \neq 0$, pa postoji njoj inverzna matrica (vidi sledeći primer).

2) Jednačina prave je linearna (stepena 1), a jednačina krive drugog reda je kvadratna (stepena 2). Uvrštavanje linearnih jednačina preslikavanja (33) neće promeniti stepen jednačine, tako da afino preslikavanje preslikava prave na prave, a krive drugog reda na krive drugog reda.

3) Neka su tačke A, B i C kolinearne i λ njihova razmera, tj. $\vec{AC} = \lambda \vec{CB}$. Ako su A', B' i C' njihove slike, pošto je preslikavanje na vektorima linearno važi

$$\vec{A'C'} = L(\vec{AC}) = L(\lambda \vec{CB}) = \lambda L(\vec{CB}) = \lambda \vec{C'B'}.$$

Dakle, preslikavanje čuva razmeru.

4) Ako su prave paralelne one se ne seku, pa se neće seći ni njihove slike. Dakle slike paralelnih pravih su paralelne prave.

5) Neka je $A(0,0)$, $B(1,0)$ i $C(0,1)$. Dokažimo da se trougao ABC može preslikati u proizvoljan trougao $A'B'C'$. Vektor $\vec{AB} = \vec{e}_1$ je upravo prvi bazni vektor, a njegova slika vektor $\vec{A'B'}$. Vektor $\vec{AC} = \vec{e}_2$ je upravo drugi bazni vektor, a njegova slika vektor $\vec{A'C'}$. Tačka A je koordinatni početak, a njena slika data tačka A' . Dakle, prva i druga kolona matrice preslikavanja su koordinate vektora $\vec{A'B'}$ i $\vec{A'C'}$, a koordinate vektora translacije su koordinate tačke A' . Dakle, odredili smo afino preslikavanje L_1 koje slika trougao ABC na $A'B'C'$. Slično možemo da odredimo preslikavanje L_2 koje slika ABC na $A''B''C''$. Kompozicija $L_2 \circ L_1^{-1}$ je afino preslikavanje koje slika trougao $A'B'C'$ na trougao $A''B''C''$.

6) Primitimo da translacija ne menja površinu. Zato je dovoljno videti kako linearni deo afinog preslikavanja menja površinu. Posmatrajmo kvadrat ivice jedan (i površine jedan) čiji su vektori ivica upravo bazni vektori $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$. On se preslikava u paralelogram čiji su vektori ivica $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21})$ i $\vec{a}_2 = (a_{12}, a_{22})$ zapravo kolone matrice A . Površina paralelograma razapetog tim vektorima je

$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = |D(\vec{a}_1, \vec{a}_2)| = |\det A|$$

Dakle u tom slučaju tvrdjenje važi. Ako ivicu kvadrata povećemo $\lambda > 0$ puta, povećace se površina i kvadrata, ali i paralelograma za λ^2 puta, pa je odnos površina opet jednak $|\det A|$. Kako svaki lik možemo aproksimirati kvadratima, dobijamo da tvrdjenje važi u opštem slučaju. $\square$

Primer 10.1 Date su tačke $A(-1, -1)$, $B(1, -1)$, $C(1, 1)$, $D(-1, 1)$; $A'(4, 5)$, $B'(8, 7)$, $C'(6, 9)$, $D'(2, 7)$.

1) Odrediti jednačine afinog preslikavanja koje kvadrat $ABCD$ preslikava u paralelogram $A'B'C'D'$.

2) Odrediti jednačinu slike kruga upisanog u kvadrat.

3) Kolika je površina slike kruga.

Rešenje: 1) Kako se vektori $\vec{AB} = 2 \vec{e}_1$ i $\vec{AD} = 2 \vec{e}_2$ slikaju redom u vektore $\vec{A'B'} = (4, 2)$ i $\vec{A'D'} = (-2, 2)$, zbog linearnosti preslikavanja imamo

$$\vec{e}_1 \mapsto (2, 1), \quad \vec{e}_2 \mapsto (-1, 1).$$

Pošto se razmera čuva onda se središte dijagonale AC , a to je koordinatni početak $O(0, 0)$ preslikava u središte dijagonale $A'C'$, tj. tačku $Q(5, 7)$. Dakle

$$O(0, 0) \mapsto Q(5, 7).$$

Dakle, traženo preslikavanje je dato formulama:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

2) Da bismo odredili sliku kruga $x^2 + y^2 = 1$ upisanog u kvadrat moramo da odredimo formule inverznog preslikavanja. Matrica inverzna matrici ovog preslikavanja je $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, pa kada prethodne formule rešimo po (x', y') brzo dobijamo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zamenom u jednačinu kruga dobijamo jednačinu njegove slike

$$2x'^2 - 2x'y' + 5y'^2 + 6x' + 60y' + 216 = 0.$$

Slika kruga je elipsa.

3) Kako je površina kruga poluprečnika jedan jednaka π , a determinanta matrice preslikavanja 4, površina elipse je jednaka

$$V(\mathcal{F}') = |\det A| \mathcal{F}' = 4\pi.$$

10.2 Predstavljanje afinih preslikavanja matricama

Poznato je da kompoziciji linearnih preslikavanja odgovara proizvod matrica. Sa afnim preslikavanjima to nije slučaj. Translatorni i linearni deo afnog preslikavanja zapisuju se na različite načine: translatorni je dodavanje brojeva koordinatama, a linearni množenje koordinata matricom. Teškoće nastaju kada želimo da eksplicitno izračunamo ili u memoriji računara zapamtimo kompoziciju većeg broja afinih transformacija, što je često slučaj u praksi.

Voleli bismo da celo afno preslikavanje predstavimo matricom, na takav način da kompoziciji afinih preslikavanja odgovara množenje matrica. Evo kako se to može uraditi.

Afno preslikavanje (33) predstavimo matricom formata 3 sa 3

$$A_q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} A & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

gde je druga matrica zapisana u blok formi. Koordinatama tačaka (x, y) dodajemo treću koordinatu koja je uvek jednaka 1 i koju zato uvek možemo ignorisati. Lako se da proveriti da je tada izraz

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & q_1 \\ a_{21} & a_{22} & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

ekvivalentna formulama afine transformacije (??). Dakle, afno preslikavanje (??) predstavljeno matricom A_q dejstvuje na kolone koordinata tačaka množenjem sleva. Sada se postavlja pitanje da li kompoziciji afinih preslikavanja odgovara proizvod matrica.

Ako su A_q i B_r dve takve matrice, njihov proizvod u blok formi je jednak

$$B_r A_q = \begin{pmatrix} B & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA & Bq + r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On dakle predstavlja afino preslikavanje sa matricom BA i vektorom translacije $Bq + r$. Pogledajmo sada šta bismo dobili kompozicijom afinih preslikavanja

$$X' = AX + q, \quad X'' = BX' + r.$$

Uvrstimo li formule prvog preslikavanja u formule drugog dobijamo

$$X'' = B(AX + q) + r = (BA)X + (Bq + r).$$

Zaista, kompozicija afinih preslikavanja je preslikavanje sa matricom (BA) i vektorom translacije $Bq + r$, **pa kompoziciji afinih preslikavanja odgovara množenje matrica.**

Ovo je lep primer izomorfizma grupa. Naime, grupa afinih preslikavanja je izomorfna podgrupi $\{A_q | \det A \neq 0\} \subset GL_3(\mathbb{R})$ grupe invertibilnih matrica formata 3×3 .

10.3 Važni primeri afinih preslikavanja ravni

10.3.1 Translacija $\tau_{\vec{q}}$

Translacija za vektor $\vec{q} (q_1, q_2)$ data je formulama

$$x' = x + q_1, \quad y' = y + q_2,$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

10.3.2 Rotacija $\mathcal{R}_{Q,\phi}$ za ugao ϕ oko tačke Q

Ako je tačka $O(0,0)$ baš koordinatni početak, tada se tačka O u rotaciji $\mathcal{R}_{O,\phi}$ preslikava u sebe. Zato preslikavanje nema translatorni deo. Rotacija $\mathcal{R}_{O,\phi}$ koja se kraće označava sa $\mathcal{R}_\phi$ je predstavljena matricom rotacije, tj.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

U opštem slučaju možemo prvo napraviti translaciju za vektor $\vec{QO}$, zatim napraviti rotaciju oko tačke O za dati ugao, i na kraju primeniti translaciju za vektor $\vec{OQ}$. Pokazuje se da je kompozicija ta tri preslikavanja upravo tražena rotacija oko tačke Q , tj.

$$\mathcal{R}_{Q,\phi} = \tau_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{R}_\phi \circ \tau_{\vec{QO}}.$$

Sada dolazi do izražaja predstavljanje afinih preslikavanja matricama. Naime matrica preslikavanja $\mathcal{R}_{Q,\phi}$ je proizvod tri matrice (uzimamo $Q(q_1, q_2)$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Primetite da se matrice primenjuju sa desna na levo, tj. najdesnija matrica se primenjuje prva, isto kao u zapisu kompozicije preslikavanja.

Onaj kome je to potrebno može da pomnoži ove tri matrice i dobije opšte formule rotacije. Mi to nećemo raditi jer je ideja da to radi računar.

10.3.3 Istezanje $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ u pravcu koordinatnih osa, sa centrom u tački Q

Preslikavanje

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

za $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ fiksira koordinatni početak, a bazne vektore $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ isteže λ_1 , odnosno λ_2 puta. Njega zovemo **istezanje** sa centrom u koordinatnom početku, sa koeficientima λ_1 i λ_2 i označavamo sa $\mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2}$.

Ako je centar istezanja proizvoljna tačka Q , tada se ono označava sa $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$. Takvo istezanje svodimo na istezanje sa centrom u koordinatnom početku, slično kao što smo to radili sa rotacijom. Dakle, može se pokazati da važi

$$\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2} = \tau_{\vec{OQ}} \circ \mathcal{H}_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \tau_{\vec{QO}}.$$

Ukoliko je tačka $Q(q_1, q_2)$ tada je preslikavanje $\mathcal{H}_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ dato proizvodom matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -q_1 \\ 0 & 1 & -q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.3.4 Smicanje $\mathcal{S}_\lambda$

Preslikavanje dato formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

naziva se **smicanje** sa koeficientom λ u pravcu x ose.

10.1 Dato je afino preslikavanje formulama

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Odrediti formule inverznog preslikavanja.

10.2 Odrediti formule homotetije sa centrom u tački $C(1,2)$ i koeficientom 3. U koju tačku se preslikava koordinatni početak pri ovoj homotetiji?

10.3 Odrediti formule rotacije za ugao $\phi = \frac{7\pi}{6}$ oko tačke $A(-2,3)$. U koju tačku se preslikava tačka $M(1,3)$ pri ovoj rotaciji?

10.4 Na ekranu računara su uvedene celobrojne (x, y) koordinate, $x \in [1, 1024]$, $y \in [1, 768]$. Pretpostavimo da su to i koordinate prozora u kome radimo. "Zum alatka" je realizovana na sledeći način: kada kliknemo mišem na poziciju $C(x_0, y_0)$ slika se uveća za 40 posto, ali tako da se tačka C ne pomera.

Ako je korisnik programa kliknuo mišem na pozicije $C_1(200, 12)$, $C_2(466, 67)$, $C_3(80, 222)$, redom, napisati matricu transformacije tačaka ekrana. (Uputstvo: ta matrica je proizvod 9 matrica formata 3×3 - ne treba ih množiti :))