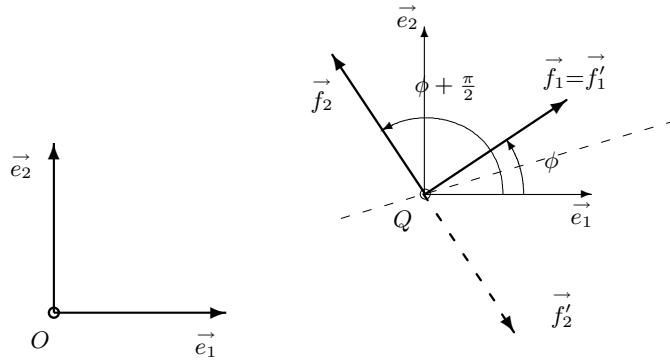




Slika 9: Izometrijske transformacije koordinata

Ovo razmatranje možemo sumirati sledećom teoremom

Teorema 3.1 *Formule transformacija koordinata ravni iz ortonormiranog repera Oe u ortonormiran reper Qf iste orijentacije su:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ukoliko su reperi različitih orijentacija formule su:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

□

Formula (8) predstavlja kompoziciju translacije koordinatnog sistema za vektor (q_1, q_2) i rotacije za ugao ϕ . Matrica u toj formuli naziva se **matrica rotacije za ugao ϕ** . Formula (9) predstavlja kompoziciju translacije koordinatnog sistema za vektor (q_1, q_2) i refleksije u odnosu na pravu koja sadrži tačku Q i gradi ugao od $\frac{\phi}{2}$ u odnosu na vektor $\vec{e}_1$.

Primitimo da je determinanta prve transformacije jednaka jedan, a druge transformacije -1 , što odgovara činjenici da su baze e i f iste, odnosno različite orijentacije.

Naime, orijentaciju na vektorskom prostoru je algebarski moguće uvesti na sledeći način. Ako su e i f baze vektorskog prostora $\mathbb{V}^n$ kažemo da su one **iste orijentacije** ako je $\det(C_{e \rightarrow f}) > 0$, gde je $C_{e \rightarrow f}$ matrica prelaska. Ova algebarska definicija se poklapa sa intuitivnim definicijama iz poglavlja 2.2.

3.3 Da li formule

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

prestavlja transformaciju koordinata izmedju dva ortonormirana repera. Precizno nacrtati uzajamni položaj tih repera.

4 Linearni likovi u ravni

Radi tradicije i jednostavnosti koordinate tačaka u ravni označavaćemo sa (x, y) , a ne sa (x_1, x_2) . Pretpostavićemo da su to koordinate u nekom ortonormiranom koordinatnom sistemu $O \vec{e}_1 \vec{e}_2$, pozitivne orijentacije.

4.1 Prava u ravni

Dobro poznatom jednačinom $y = kx + n$ nisu predstavljene sve prave u ravni. Naime, "vertikalne" prave, tj. prave $x = \text{const}$ nisu tog oblika. To je jedan od razloga što taj oblik jednačine prave ovde nećemo koristiti. Kada bi ga koristili, svaki algoritam bi sadržao obradu oba slučaja.

4.1.1 Implicitna jednačina prave

Prava p je određena tačkom $P(x_0, y_0)$ koja joj pripada i normalnim vektorom prave koga obično označavamo sa $\vec{n}_p$. To je nenula vektor sa koordinatama $\vec{n}_p(a, b)$.

Da bi izveli jednačinu prave, neka je $M(x, y) \in p$ proizvoljna tačka prave. Tada je $\vec{PM}$ upravan na normalni vektor pa važi:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{n}_p \cdot \vec{PM} = (a, b) \cdot (x - x_0, y - y_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = \\ &= ax + by - ax_0 - by_0. \end{aligned}$$

Dakle jednačinu proizvoljne prave u ravni možemo zapisati u obliku

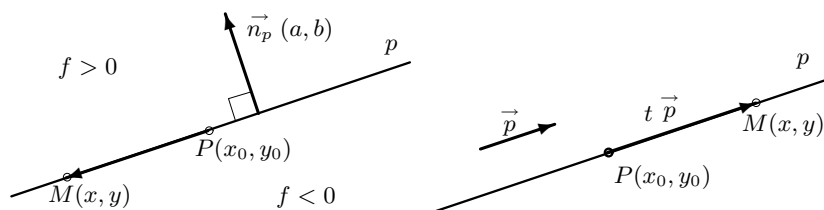
$$ax + by + c = 0, \quad (11)$$

pri čemu nisu oba koeficijenta a i b istovremeno jednaka nuli. Jednačina (11) se naziva **implicitna jednačina prave**.

Primer 4.1 a) *Odrediti jednačinu prave p koja sadrži tačku $P(3, -2)$ i ima normalni vektor $\vec{n}_p = (4, 7)$.*

Ako je normalni vektor prave jedinični, tj. $|\vec{n}_p|^2 = a^2 + b^2 = 1$ onda se jednačina (11) naziva **normalizovana jednačina**. Tada se može izabrati $a = \cos \phi, b = \sin \phi$ za neki ugao ϕ .

Primer 4.2 *Odrediti normalizovanu jednačinu prave $p : 3x - 4y + 35 = 0$.*



Slika 10: Implicitna i parametarska jednačina prave

Posmatramo funkciju $f_p : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = ax + by + c$. Ona je jednaka 0 na tačkama prave p , pa je zbog neprekidnosti veća od 0 u jednoj poluravni, a manja od nule u drugoj poluravni određenoj pravom p . To nam obezbeđuje način da karakterišemo **poluravan**, tj. da proverimo da li su dve tačke sa iste strane prave p ili ne. Naime, tačke X i Y pripadaju istoj poluravni ako i samo ako su $f(X)$ i $f(Y)$ istog znaka.

4.1.2 Parametarska jednačina prave

Drugi način da opišemo pravu jeste da joj zadamo jednu tačku $P(x_0, y_0)$ i nenula vektor pravca $\vec{p} (p_x, p_y)$. Tada se svaka tačka M prave p može zapisati u obliku

$$M(t) = M = P + t \vec{p}, \quad (12)$$

za neko $t \in \mathbb{R}$. Recimo, tačka P se dobija baš za $t = 0$. Vektorska jednačina (15) se u koordinatama zapisuje kao

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x, \\ y &= y_0 + tp_y, \end{aligned} \quad (13)$$

$t \in \mathbb{R}$, što obično zovemo **parametarska jednačina prave**. Možemo toj parametarskoj jednačini dati sledeću mehaničku interpretaciju. Krenemo li iz tačke P u trenutku $t = 0$ konstantom **brzinom** $\vec{p}$ (brzina je vektorska veličina!) onda ćemo u trenutku t , tj. nakon t sekundi, biti u tački $M(t)$. Ako je $t < 0$, to znači da se krećemo u smeru suprotnom od smera vektora $\vec{p}$.

4.1.3 Prelazak iz jednog oblika prave u drugi

Iz jednačina (13) eliminacijom parametra t dobijamo

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y} \quad (= t),$$

odnosno

$$p_y x - p_x y + (p_x y_0 - p_y x_0) = 0$$

odakle se vide vrednosti a, b, c implicitnog oblika.

Obrnuto, ako je data prava implicitnim oblikom (11), može se direktno proveriti da je ona određena sa

$$P\left(\frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2}\right), \quad \vec{p} = (-b, a), \quad (14)$$

odakle se mogu pročitati vrednosti x_0, y_0, p_x, p_y .

4.1.4 Predstavljanje duži i poluprave

Neka su $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ različite tačke koje određuju pravu p . Vektor prave AB je $\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. **Duž** AB je sada predstavljena sa

$$M(t) = A + t \vec{AB}, \quad t \in [0, 1], \quad (15)$$

pri čemu je $M(0) = A, M(1) = B$. Ova reprezentacija je veoma pogodna za **deljenje duži** AB . Središte duži AB , recimo, je tačka $M(\frac{1}{2})$.

Poluprava $[AB)$ sa temenom u tački A koja sadrži B predstavljena je istom jednačinom za $t \geq 0$, a njoj komplementna poluprava za $t \leq 0$.

4.2 Trougao

4.2.1 Parametrizacija trougla

Tri nekolinearne tačke A, B i C određuju trougao ABC . Neka je $\vec{f}_1 = \vec{AB}$, $\vec{f}_2 = \vec{AC}$. Tada se svaka tačka trougla može zapisati u obliku

$$X(t_1, t_2) = A + t_1 \vec{f}_1 + t_2 \vec{f}_2, \quad 0 \leq t_0, t_1 \leq 1, t_0 + t_1 \leq 1.$$

Prethodna jednačina se naziva **parametarska jednačina trougla**.

4.2.2 Orientacija trougla i površina trougla

Kažemo da je trougao ABC **pozitivne orijentacije** ako je smer obilaska od tačke A , preko B do tačke C suprotan smeru kazaljke na satu.

Nadjimo analitički zapis orijentacije trougla. Neka je $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$. Lako se vidi da je trougao ABC pozitivne orijentacije ako i samo ako je pravac od vektora $\vec{AB}$ prema vektoru $\vec{AC}$, kraćim putem, suprotan smeru kazaljke na satu, tj. da je vektorski proizvod $\vec{AB} \times \vec{AC}$ usmeren ka pozitivnom smeru z -ose. Vektore $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ možemo smatrati vektorim prostora tako što ćemo im dodati treću koordinatu jednaku nuli, pa imamo

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & 0 \end{vmatrix} = ((x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)) \vec{e}_3.$$

Dakle, trougao ABC je pozitivne orijentacije ako i samo ako je

$$D_{ABC} = D = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) > 0.$$

Pošto je površina trougla jednaka polovini površine paralelograma razapetog vektorima $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$, dobijamo da je **površina trougla**

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |D \vec{e}_3| = \frac{1}{2} |D| |\vec{e}_3| = \frac{1}{2} |D|.$$

4.2.3 Odredjivanje da li tačka pripada trouglu

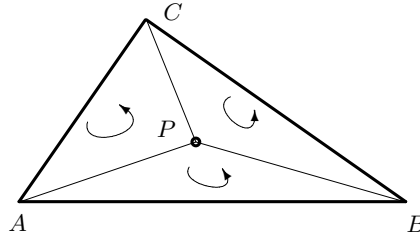
Pretpostavimo da je trougao ABC zadat temenima kao u prethodnom poglavlju. Želimo da proverimo da li tačka P pripada trouglu ABC .

Pretpostavimo da je trougao ABC pozitivne orijentacije. Tada tačka P pripada trouglu ako i samo ako je svaki od trouglova ABP , BCP , CAP pozitivne orijentacije, tj. ako i samo ako je

$$D_{ABP} > 0, \quad D_{BCP} > 0, \quad D_{CAP} > 0. \quad (16)$$

U slučaju kada je trougao ABC negativne orijentacije, tačka P je unutar trougla ako su svi trouglovi ABP , BCP , CAP negativne orijentacije, tj. u nejednakostima (16) važi znak $<$.

Ako je neka od tih vrednosti jednaka nuli, tada tačka P pripada odgovarajućoj pravoj. Recimo, ako je $D_{ABP} = 0$, tačka P pripada pravoj AB .



Slika 11: Tačka unutar pozitivno orijentisanog trougla

Dakle važi

Teorema 4.1 Tačka P pripada unutrašnjosti trougla ABC ako i samo ako su brojevi D_{ABP} , D_{BCP} , D_{CAP} istog znaka.

Primer 4.3 Da li tačka $P(5, 1)$ pripada trouglu ABC gde je $A(1, 2)$, $B(4, 3)$, $C(6, 0)$?

Primedba 4.1 (Kolinearnost tačaka) Primetimo da su tačke A, B, C kolinearne ako i samo ako su vektori $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ linearno zavisni odnosno ako i samo ako je $D_{ABC} = 0$. U poglavlju 8.3.1 biće reči o tome kako izbeći numeričke greške pri proveravanju tog uslova.

4.3 Vežbanja

4.1 Data je prava $p : 3x - 2y + 7 = 0$. a) Odrediti normalizovani oblik te jednačine. b) Odrediti implicitni oblik prave p c) Koji ugao prava p gradi sa x osom?

4.2 Data je prava $q : x = -t + 4, y = 2t - 7, t \in \mathbb{R}$. a) Odrediti implicitni oblik prave q . b) Odrediti implicitni oblik prave r koja sadrži tačku $R(3, 7)$ i paralelna je q .

4.3 Odrediti jednačinu normale n iz tačke $A(1, 7)$ na pravu p ako je a) $p : x = 2t + 4, y = 3t - 5, t \in \mathbb{R}$ b) $p : 4x - \frac{2}{3}y + 7 = 0$.

4.4 Neka je $A(2, 3), B(-1, 4)$. a) Odrediti parametarsku jednačinu prave AB . b) Ispitati da li tačka $C(14, -1)$ polupravoj $[AB)$. c) Ispitati da li tačka $D(1, \frac{10}{3})$ i u kom odnosu ona deli duž AB .

4.5 Ispitati da li tačke $C(1, 1)$ i $D(-7, 11)$ pripadaju istoj poluravni odredjenoj pravom AB , $A(2, -2), B(1, 3)$.

4.6 a) Odrediti parametarsku jednačinu paralelograma $ABCD$ ako su date tačke $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$.

b) Odrediti koordinate četvrtog temena D tog paralelograma.

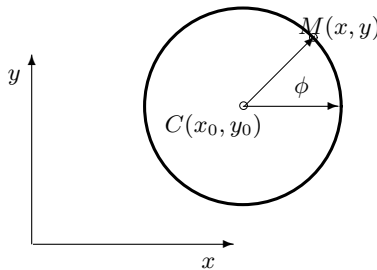
4.7 Ispitati da li tačka $M(2, 3)$ pripada trouglu ABC , ako je $A(1, 7), B(-3, 3), C(3, -3)$?

4.4 Krug

Krug sa centrom $C(x_0, y_0)$ je geometrijsko mesto tačaka $M(x, y)$ koje su od centra udaljene za rastojanje r - poluprečnik kruga. Jednačina tog kruga je

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (17)$$

Krug je specijalni slučaj elipse, tj. krivih drugog reda kojima se bavimo u poglavlju 7.



Slika 12: Krug sa centrom u tački $C(x_0, y_0)$ i poluprečnikom r

Deljenjem jednačine (17) sa r^2 i upotrebom identiteta $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ dobijamo **parametarsku jednačinu kruga**

$$x = x_0 + r \cos \phi, \quad y = y_0 + r \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi). \quad (18)$$

Parametar ϕ je orjentisani ugao izmedju Ox ose i vektora $\vec{CM}$.

5 Krive u ravni

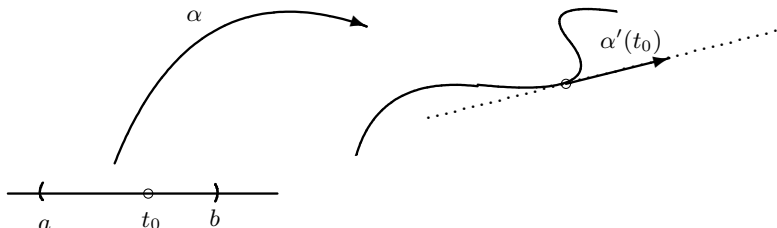
Definicija 5.1 Parametrizovana kriva u ravni je neprekidno preslikavanje $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, intervala u ravan. Parametrizovana kriva je **glatka** ako je $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ za svako $t \in (a, b)$.

Kad kažemo kriva, obično mislimo na skup njenih slika $\alpha(t)$, $t \in (a, b)$. Taj skup slika može imati razne parametrizacije. Geometrijski, glatkost krive znači postojanje jedinstvene tangente u svakoj tački krive. Nenula vektor $\alpha'(t)$ zove se **vektor brzine krive** i on predstavlja vektor pravca tangente u tački $\alpha(t)$.

Tangenta p krive α u tački $M_0 = \alpha(t_0)$ se parametarski može zapisati

$$p \ni M(s) = \alpha(t_0) + s\alpha'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (19)$$

Tangenta p je prava koja najbolje od svih pravih aproksimira krivu α u tački M_0 .



Slika 13: Tangenta glatke parametrizovane krive

Primer 5.1 Zvuči paradoksalno, ali najjednostavnija kriva je prava. Prava $y = ax + b$ je glatka kriva. Naime, uzmemo li $x = t$ za parametar, dobijamo jednu njenu parametrizaciju

$$\alpha(t) = (t, at + b), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vektor brzine $\alpha'(t) = (1, a) \neq (0, 0)$ je konstantan vektor pravca prave. Tangenta na pravu u ma kojoj njenoj tački je ona sama.

Primer 5.2 Data je kriva cikloida parametarskom jednačinom $\alpha(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$. a) Odrediti parametar a tako da tačka $M_0(\frac{\pi}{2}, 2 - \sqrt{2})$ pripada cikloidi. b) Zatim odrediti tangentu te cikloide u tački M_0 .

6 Bezierove krive

Neka su $P_0, P_1 \dots P_n$ tačke ravni. **Bezierova kriva** stepena n je

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^n B_i(t) P_i, \quad t \in [0, 1].$$

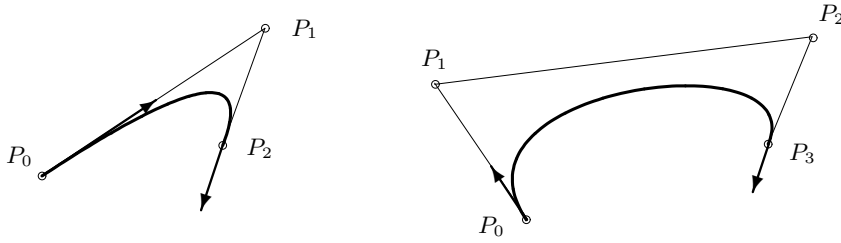
Tačke P_i nazivaju se **kontrolne tačke**, a polinomi $B_i(t)$ **Bernštajnovi polinomi**.

Najviše se primenjuju, a i imaju geometrijski najjasniju interpretaciju Bezierove krive stepena 2 i 3, tj. one sa 3, odnosno 4 kontrolne tačke. One su, redom, date sledećim parametrizacijama:

$$\alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t) P_1 + t^2 P_2, \quad t \in [0, 1];$$

$$\alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3, \quad t \in [0, 1].$$

Primer 6.1 Date su tačke $A_0(0, 1)$, $A_1(1, 2)$, $A_2(2, 1)$, $A_3(1, 0)$. Odrediti Bezierovu krivu stepena 3 čije su to kontrolne tačke.



Slika 14: Bezierove krive stepena 2 i 3

Teorema 6.1 a) Početak krive α_2 je u tački P_0 , a kraj u tački P_2 . Tangentni vektori u tim tačkama su redom $2 \vec{P_0 P_1}$, odnosno $2 \vec{P_1 P_2}$.

b) Početak krive α_3 je u tački P_0 , a kraj u tački P_3 . Tangentni vektori u tim tačkama su redom $3 \vec{P_0 P_1}$, odnosno $3 \vec{P_2 P_3}$.

Dokaz: Dokazaćemo slučaj a), a slučaj b) prepuštamo čitaocu. Direktno se proverava da je $\alpha_2(0) = P_0$, a $\alpha_2(1) = P_2$, tj. početak i kraj krive su u tačkama P_0 i P_2 , redom. Da bi dokazali tvrdjenje za tangentne vektore, imamo

$$\alpha'(t) = -2(1-t)P_0 + 2(1-2t)P_1 + 2tP_2,$$

odakle je

$$\alpha'(0) = -2P_0 + 2P_1 = 2(P_1 - P_0) = 2 \vec{P_0 P_1}.$$

Slično se dobija da je $\alpha'(1) = 2 \vec{P_1 P_2}$, što je i trebalo dokazati. $\square$

6.1 Vežbanja

6.1 a) Odrediti parametrizaciju kruga $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$.

b) Odrediti tangentu kruga u tački $T(0, 2)$.

6.2 Date su tačke $A_1(1, 7)$, $A_2(-3, 3)$, $A_3(3, -3)$. Odrediti Bezierovu krivu stepena 2 čije su to kontrolne tačke.

7 Krive drugog reda

Kriva drugog reda je skup tačaka čije koordinate (x, y) u nekom reperu Oe zadovoljavaju jednačinu drugog stepena

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (20)$$

Pri tome možemo pretpostaviti da je reper ortonormiran, što ćemo mi u nastavku i činiti. Koliko god prethodna jednačina izgledala komplikovano, može se pokazati da ona geometrijski opisuje elipsu, hiperbolu, parabolu, par pravih, pravu, tačku ili prazan skup. Naime, izborom "boljeg" ortonormiranog repa Qf jednačina nedegenerisane krive se može dosta pojednostaviti i postati jedna od "kanonskih jednačina" o kojima je reč u sledećem poglavlju. Proces nalaženja tog boljeg repa, naziva se **svodjenje jednačine krive na kanonski oblik izometrijskom transformacijom koordinata**. On predstavlja suštinu Teoreme ??.

7.1 Krive drugog reda u kanonskom obliku

7.1.1 Elipsa

Kanonska jednačina elipse glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (21)$$

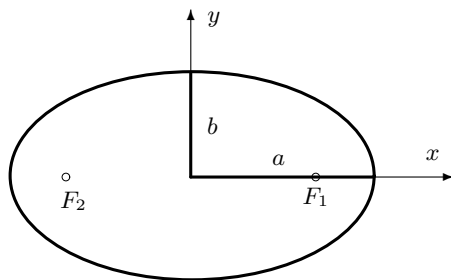
Pozitivni brojevi a i b ($a \geq b$) se nazivaju **poluose elipse**.

Tačke $F_{1,2}(\pm c, 0)$, za $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, nazivaju se žiže elipse.

Lako je proveriti da je

$$x = a \cos \phi, \quad y = b \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi) \quad (22)$$

parametarska jednačina elipse. Za razliku od parametризacije kruga, parametar ϕ NIJE ugao između vektora položaja tačke i x ose, sem za uglove $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.



Slika 15: Elipsa

Primer 7.1 Dokazati da je tangenta p u tački $M_0(x_0, y_0)$ elipse (21), data jednačinom

$$p : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Rešenje: Neka je $M_0(x_0, y_0) = (a \cos \phi_0, b \sin \phi_0)$. Na osnovu jednačine (19) dobijamo da je parametrizacija tangente p u tački M_0

$$\begin{aligned}x &= a \cos \phi_0 - t a \sin \phi_0, \\y &= b \sin \phi_0 + t b \cos \phi_0.\end{aligned}$$

Pomnožimo li prvu jednačinu sa $\frac{\cos \phi_0}{a}$, a drugu sa $\frac{\sin \phi_0}{b}$ i saberemo, eliminišaćemo parametar t i dobiti:

$$1 = x \frac{\cos \phi_0}{a} + y \frac{\sin \phi_0}{b} = \frac{x(a \cos \phi_0)}{a^2} + \frac{y(b \sin \phi_0)}{b^2},$$

iz čega sledi tražena formula. $\square$

7.1.2 Hiperbola

Kanonska jednačina hiperbole glasi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (23)$$

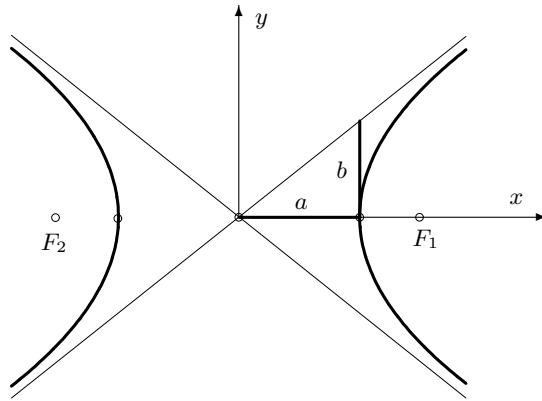
gde su $a \geq b > 0$.

Tačke $F_{1,2}(\pm c, 0)$, za $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ nazivaju se **žiže hiperbole**, a prave $a_{1,2} : y = \pm \frac{b}{a}x$ **asimptote hiperbole**.

Jednačine

$$x = \pm a \cosh \phi, \quad y = b \sinh \phi, \quad \phi \in \mathbb{R} \quad (24)$$

predstavljaju **parametarsku jednačinu hiperbole**. To sa lako dokazuje uvrštavanjem tih jednačina u jednačinu (23) i upotrebom identiteta $\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1$. Izbor znaka $+$ parametrizuje desnu, a znak $-$ levu granu hiperbole.



Slika 16: Hiperbola

7.1.3 Parabola

Kanonska jednačina parabole glasi:

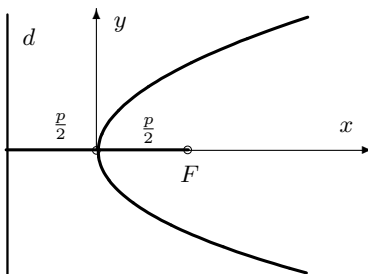
$$y^2 = 2px, \quad (25)$$

pri čemu je $p > 0$.

Tačka $F(\frac{p}{2}, 0)$ naziva se **žiža parabole**, a prava $d : x = -\frac{p}{2}$ **direktrisa parabole**.

Korisna je očigledna parametrizacija parabole

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (26)$$



Slika 17: Parabola

7.2 Vežbanja

7.1 Dokazati da je tangenta p u tački $M_0(x_0, y_0)$ hiperbole (23), data jednačinom

$$p : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

7.2 Dokazati da je tangenta p u tački $M_0(x_0, y_0)$ parabole (25), data jednačinom

$$p : yy_0 = p(x + x_0).$$

7.3 Svodjenje krive drugog reda na kanonski oblik

Dokažimo sada teoremu koja klasifikuje krive drugog reda do na izometrijske transformacije koordinata. Njen dokaz nam daje efektivan način za svodjenje krive na kanonski oblik.

Teorema 7.1 Za svaku krivu drugog reda (20) datu u ortonormiranom reperu, postoji novi ortonormirani reper Qf u čijim koordinatama (x'', y'') ona ima tačno jednu od sledećih jednačina:

$$(E) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \text{ (elipsa),}$$

$$(H) \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \text{ (hiperbola),}$$

$$(P) \quad y''^2 = 2px'', \text{ (parabola),}$$

$$(D1) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1, \text{ (prazan skup),}$$

$$(D2) \quad \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0, \text{ (tačka),}$$

$$(D3) \quad \frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0, \text{ (dve prave koje se seku),}$$

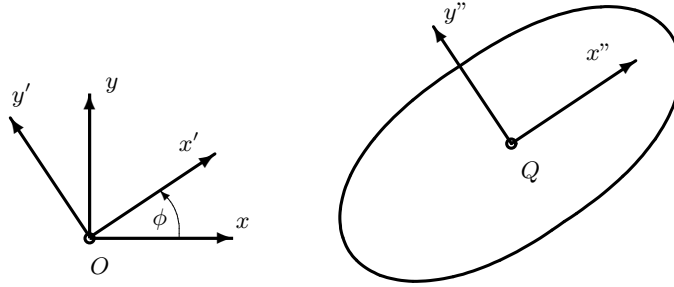
$$(D4) \quad x''^2 = a^2, \text{ (dve paralelne prave),}$$

$$(D5) \quad x''^2 = 0, \text{ ("dvostruka" prava),}$$

$$(D6) \quad x''^2 = -a^2, \quad (\text{prazan skup}),$$

gde je $p > 0$, $a \geq b \geq 0$.

Dokaz: Svodjenje krive (20) na jedan od kanonskih oblika navedenih u tvrdjenju teoreme sastoji se od dva koraka. Prvo, vršimo rotaciju $(x, y) \rightarrow (x', y')$ koordinatnog sistema, čime je moguće eliminisati član uz $x'y'$. Zatim vršimo translaciju $(x', y') \rightarrow (x'', y'')$ koordinatnog početka u centar krive. Nekad je potrebno izvršiti i treći korek - refleksiju, tj. zamenu koordinatnih osa $x''' = y'', y''' = x''$ (recimo, da bi se dobio oblik $y'''^2 = 2px'''$, a ne $x'''^2 = 2py'''$ ili da bi se postiglo da bude $a \geq b$).



Slika 18: Svodjenje krive drugog reda (na slici elipse) na kanonski oblik

Odredimo prvo ugao rotacije

$$\begin{aligned} x &= \cos \phi x' - \sin \phi y' \\ y &= \sin \phi x' + \cos \phi y' \end{aligned} \quad (27)$$

tako da eliminišemo član $x'y'$. Zamenom formula (27) u jednačinu krive (20) dobijamo da je koeficijent uz $x'y'$ jednak

$$-2a_{11} \cos \phi \sin \phi + 2a_{12}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 2a_{12} \cos(2\phi) - (a_{11} - a_{22}) \sin(2\phi).$$

Da bi on bio jednak nuli mora biti

$$\cot 2\phi = \frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}},$$

odakle je jedinstveno određen ugao $\phi \in [0, \frac{\pi}{2})$. Formule rotacije (27) dobijamo sledećim računom:

$$\begin{aligned} \cos 2\phi &= \frac{\cot 2\phi}{+\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}}, \\ \cos \phi &= +\sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}}, \quad \sin \phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}. \end{aligned}$$

Zamenom jednačina (27) u jednačinu krive (20) dobijamo jednačinu bez člana $x'y'$, recimo:

$$mx'^2 + ny'^2 + 2cx' + 2dy' + e = 0,$$

gde je bar jedan od m ili n različit od nule (u suprotnom je jednačina linearna, pa je i jednačina (20) linearna). Tada razlikujemo dva slučaja.

Slučaj 1: Pretpostavimo da su oba broja, m i n , različita od nule. Poslednja jednačina se "napakuje na pune kvadrate":

$$m \left(x'^2 + 2\frac{c}{m}x' + \frac{c^2}{m^2} \right) + n \left(y'^2 + 2\frac{d}{n}y' + \frac{d^2}{n^2} \right) - \frac{c^2}{m} - \frac{d^2}{n} + e = 0,$$

odnosno

$$m(x' + \frac{c}{m})^2 + n(y' + \frac{d}{n})^2 + e' = 0 \quad (28)$$

za $e' = -\frac{c^2}{m} - \frac{d^2}{n} + e$. Sada transliramo koordinatni sistem u tačku $O'(-\frac{c}{m}, -\frac{d}{n})$, tj. zamenjujemo relacije

$$\begin{aligned} x'' &= x' + \frac{c}{m}, \\ y'' &= y' + \frac{d}{n}, \end{aligned} \quad (29)$$

u formulu (28) i dobijamo

$$mx''^2 + ny''^2 + e' = 0.$$

U zavisnosti od znaka brojeva m , n i e' dobijamo krive (E), (H), (D1), (D2) ili (D3).

Slučaj 2: Kada je jedan od brojeva m ili n jednak nuli sličnim postupkom dobijamo krive (P), (D4), (D5) ili (D6). $\square$

Primedba 7.1 Može se pokazati da rotacijom za veći ugao $\phi \in [0, \pi)$ možemo eliminisati potrebu za trećim korakom, tj. refleksijom koordinatnog sistema. To znači da se u tvrdjenju teoreme može zahtevati da novi koordinatni sistem Qf bude iste orijentacije kao polazni.

7.4 Vežbanja

7.3 Svesti datu krivu na kanonski oblik izometrijskom transformacijom:

- $x^2 + y^2 - xy - 3x - 1 = 0;$
- $8x^2 + 15y^2 + 24xy + 32x + 44y + 20 = 0;$
- $4x^2 + 9y^2 - 2x + 2y - 12xy - 19 = 0;$
- $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 4x + 3y - 7 = 0.$

8 Rastojanja i preseci likovi u ravni

8.1 Rastojanje tačke od prave, poluprave i duži

Pretpostavimo da je data tačka M i prava p . Rastojanje $d = d(M, p)$ tačke M od prave p jednako je rastojanju tačke M od njene projekcije N na pravu p . Sledećim teoremama dajemo formule za to rastojanje u zavisnosti od toga na koji je način zadata prava p .

