Линеарна диференцијална једначина првог реда је једначина облика

(1) $$y'(x) + p(x)y(x) = q(x),$$

где су $p, q\colon I \to \mathbb{R}$ непрекидне функције на интервалу I. Уколико је још $q(x) = 0$, једначину називамо још и хомогена (иначе је нехомогена). Да би решили једначину (1), решавамо прво њен хомогени део, односно једначину $y' + p(x)y = 0$. Преуређивањем те једначине добија се

$$y' + p(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -p(x) \Leftrightarrow \big(\ln|y|\big)' = -p(x) \Leftrightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + C \Leftrightarrow |y| = e^C e^{-\int p(x)dx}.$$

Како је C произвољна константа, то је e^C произвољан позитиван број. Даље, како је израз на десној страни строго позитиван, и како је y непрекидна функција (и више, чим помињемо y' то подразумевамо да је она и диференцијабилна) то само y је или строго позитивно или строго негативно. На крају видимо још и да је $y(x) = 0$ такође решење. Из решења једначине, за свако x је $y(x) = \pm e^C e^{-\int p(x)dx}$, а због сталности знака y имамо да је или $y(x) = e^C e^{-\int p(x)dx}$ за све x, или $y(x) = -e^C e^{-\int p(x)dx}$ за све x. Како је e^C произвољан позитиван број и $-e^C$ произвољан негативан и како је још и $y = 0$ решење, то сва решења можемо једнаоставније записати са

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx},$$

где је $C \in \mathbb{R}$.

Решење нехомогене једначине може се даље наћи методом варијације константи, која се састоји од следећег. Претпоставимо да је C такође функција од x и заменимо тако добијено y у једначину (1). Добија се

$$\big(C(x)e^{-\int p(x)dx}\big)' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\big(-p(x)\big) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = C'(x)e^{-\int p(x)dx},$$

а да би $C(x)e^{-\int p(x)dx}$ било решење, последњи добијени израз треба да је једнак $q(x)$, односно да је $C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$. Одатле је

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$

а сва решења су облика

$$y(x) = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx}.$$

Напомена: Уколико је познато једно решење $y_1(x)$ једначине (1), сменом $y(x) = y_1(x) + z(x)$ се добија

$$\big(y_1(x) + z(x)\big)' + p(x)\big(y_1(x) + z(x)\big) = q(x) \Leftrightarrow y_1'(x) + z'(x) + p(x)y_1(x) + p(x)z(x) = q(x),$$

а како је y_1 решење то је $y_1'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, одакле имамо да је $z'(x) + p(x)z(x) = 0$, односно z је решење одговарајуће хомогене једначине.

Бернулијева једначина је једначина облика

(2) $$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^\alpha(x), \qquad \alpha \neq 0, 1,$$

где су опет p и q непрекидне функције на неком интервалу I. Сменом $u(x) = y^{1-\alpha}(x)$, добијамо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{du}{dy}}\frac{du}{dx}\frac{1}{(1-\alpha)y^{-\alpha}}\frac{du}{dx}.$$

Такође, директно видимо и да је $y^\alpha u = y$. Заменом тога у једначину (2) добија се

$$\frac{y^\alpha}{1-\alpha}\frac{du}{dx} + p(x)y^\alpha(x)u(x) = q(x)y^\alpha(x),$$

односно, скраћивањем y^α, се добија

$$\frac{1}{1-\alpha}u' + p(x)u(x) = q(x),$$

што је линеарна диференцијална једначина, коју знамо да решимо.

Рикатијева једначина је једначина облика

(3) $$y'(x) = p(x)y^2(x) + q(x)y(x) + r(x),$$

где су опет p, q и r непрекидне функције на неком интервалу I. Рикатијева једначина не може да се реши, прецизније, у општем случају не може (наравно, за одређене p, q и r може) експлицитно да се добије фамилија функција као у претходним случајевима која садржи сва решења Рикатијеве једначине. Ипак, њена решења имају одређено правилно понашање, што ћемо даље видети.

Прво, уколико је y_1 решење једначине (3), сменом $y(x) = y_1(x) + z(x)$ добијамо

$$\big(y_1(x) + z(x)\big)' = p(x)\big(y_1(x) + z(x)\big)^2 + q(x)\big(y_1(x) + z(x)\big) + r(x)$$
$$y_1'(x) + z'(x) = p(x)y_1^2(x) + p(x)2y_1(x)z(x) + p(x)z^2(x) + q(x)y_1(x) + q(x)z(x) + r(x).$$

Како је y_1 решење, то је $y_1' = p(x)y_1^2(x) + q(x)y_1(x) + r(x)$, а заменом у претходно добијену једначину даље имамо
$$z'(x) = p(x)2y_1(x)z(x) + p(x)z^2(x) + q(x)z(x),$$
што је Бернулијева једначина и може да се реши одговарајућом сменом. Дакле, уколико знамо партикуларно решење Рикатијеве једначине, можемо да нађемо опште.

Даље, уколико су позната два решења Риактијеве једначине y_1 и y_2, додатно се може упростити једначина. Како је
$$y_1'(x) = p(x)y_1^2(x) + q(x)y_1(x) + r(x)$$
$$y_2'(x) = p(x)y_2^2(x) + q(x)y_2(x) + r(x),$$
то одузимањем претходних израза од $y(x)$ даље добијамо
$$y'(x) - y_1'(x) = p(x)\big(y^2 - y_1^2(x)\big) + q(x)\big(y(x) - y_1(x)\big)$$
$$y'(x) - y_2'(x) = p(x)\big(y^2 - y_2^2(x)\big) + q(x)\big(y(x) - y_2(x)\big),$$
односно
$$y'(x) - y_1'(x) = \big(y(x) - y_1(x)\big)\Big(p(x)\big(y(x) + y_1(x)\big) + q(x)\Big)$$
$$y'(x) - y_2'(x) = \big(y(x) - y_2(x)\big)\Big(p(x)\big(y(x) + y_2(x)\big) + q(x)\Big).$$
Дељењем са $y(x) - y_1(x)$ и $y(x) - y_2(x)$ респективно обе једначине и интеграљењем добија се
$$\ln(y(x) - y_1(x)) = \int p(x)\big(y(x) + y_1(x)\big)dx + \int q(x)dx + C_1$$
$$\ln(y(x) - y_2(x)) = \int p(x)\big(y(x) + y_2(x)\big)dx + \int q(x)dx + C_2,$$
одакле, одузимањем претходне две једначине даље добијамо
$$\ln(y(x) - y_1(x)) - \ln(y(x) - y_2(x)) = \int p(x)\big(y_1(x) - y_2(x)\big)dx + C_1 - C_2.$$
Сређивањем и узимањем да је $C_1 - C_2$ опет произвољна константа, коју ћемо означити са C, добија се
$$\ln\frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)} = \int p(x)\big(y_1(x) - y_2(x)\big)dx + C,$$
односно
$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)} = Ce^{\int p(x)\big(y_1(x) - y_2(x)\big)dx},$$
где сличном аргументацијом као за линеарну једначину узимамо да је $C \in \mathbb{R}$. Одавде видимо да уколико знамо два решења, сва остала можемо једноставније него претходно, наћи из претходне формуле. На крају уколико су y_1, y_2 и y_3 решења Рикатијеве једначине, тада за свако решење y важи
$$\frac{\frac{y(x)-y_1(x)}{y(x)-y_2(x)}}{\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_2(x)}} = C,$$
где је $C \in \mathbb{R}$. Заиста, из претходног имамо да за произвољно решење y важи
$$\frac{y(x) - y_1(x)}{y(x) - y_2(x)} = Ce^{\int p(x)\big(y_1(x) - y_2(x)\big)dx},$$
а како је и y_3 решење, опет из претходне формуле је
$$\frac{y_3(x) - y_1(x)}{y_3(x) - y_2(x)} = Ce^{\int p(x)\big(y_1(x) - y_2(x)\big)dx}.$$
Дељењем та два израза добијамо жељено тврђење.