Надокнада из Математике 2б

Оријентација равни и површи

Нека је дата раван α и нека вектори $u_1, u_2 \in \alpha$ чине базу дате равни, тј. нека је још $rang[u_1 u_2] = 2$. Казехемо да је база (u_1, u_2) позитивно оријентисана, укоилко крећуци се од вектора u_1 ка вектору u_2, оним углом који је мањи од π, идемо у смеру супротном од кретања казаљке на сату. У најједноставнијем примеру, дакле у $\mathbb{R}^2$, видимо да је уобичајена оријентација $((1,0),(0,1))$, односно кад идемо од $x-$осе ка $y-$оси, позитивна, јер угао којим се крећемо износи $\pi/2$. Уколико се раван α додатно налази у простору $\mathbb{R}^3$, по правилу три прста, видимо да оријентација заправо само одређује смер векторског производа $u_1 \times u_2$. Отуда, избором једне стране равни, односно једног смера вектора нормале, изабрали смо и оријентацију дате равни.

У случају површи, идеја је суштински иста. Дакле, нека је задата површ S у простору $\mathbb{R}^3$, у свакој тачки површи можемо у тангентном простору у тој тачки изабрати неку оријентацију. Уколико је површ S задата параметарски као $\{r(u,v) | (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2\}$, природан избор за векторе базе тангентних простора су вектори $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$. Као и случају равни, оријентацију у свакој тачки $x \in S$ одређује вектор нормале и означимо даље са $n(x)$ и $-n(x)$ два избора вектора нормале дужине 1. Уколико можемо да изаберемо $n(x)$ у свакој тачки, тако да крећући се дуж произвољне затворене криве C, вектор $n(x)$ се непрекидно мења за $x \in C$ и на крају се враћа у почетни положај, кажемо да је површ S оријентабилна или двострана, јер у датом случају имамо два избора вектора нормале. У супротном кажемо да није оријентабилна, а примери се могу наци у књизи као и наравно по интернету. За оријентабилну површ којој је изабрана једна страна кажемо да је оријентисана.

Површински интеграл друге врсте

Нека је задата глатка оријентабилна површ $S \subset \mathbb{R}^3$ параметарски са

$$r(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v)) \qquad (u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

и нека је f непрекидна реална функција дефинисана на површи S. Нека је $n(x,y,z)$ изабрано векторско поље јединичних нормала на површ S у одговарајућој тачки. Нека је даље $P = \{P_i | i = 1, \ldots, n\}$ подела области D и $S_i = r(P_i)$ њоме индукована подела површи S и нека су још изабране тачке $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$. Даље означимо са $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ углове које вектор нормале $n(x_i, y_i, z_i)$ заклапа са координатним осама. Посматрајмо интегралне суме

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cos \alpha_i \mu(S_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cos \beta_i \mu(S_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cos \gamma_i \mu(S_i).$$

Лимеси претходних интегралних сума, када параметар поделе тежи нули (прецизније $max_{i=1,\ldots,n}\mu(S_i)$) називају се површинским интегралима функције f по површи S и означавају се (за сада) респективно са

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\alpha(x,y,z))dS$$

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\beta(x,y,z))dS$$

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\gamma(x,y,z))dS,$$

где је $\alpha(x,y,z)$ угао који вектор нормале n површи S у тачки (x,y,z) заклапа са x осом, и аналогно β и γ.

Као и сви претходни типов интеграла, површински интеграл друге врсте је линеаран (јер је сума линеарна). Као и криволинијски интеграл друге врсте зависи од оријентације, односно избором вектора $-n$ све суме мењају знак, па самим тим и интеграл мења знак. Отуд он нема својсвта монотоности површинског интеграла прве врсте

Даље, директно из дефиниције и формуле за рачунање површинског интеграла прве врсте имамо да је

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\alpha(x,y,z))dS = \iint_D f(r_1(u,v),r_2(u,v),r_3(u,v))\|n\|dudv.$$

У специјалном случају, уколико је површ S график функције, тј $S = \{(x,y,z(x,y))|(x,y)\in D\}$, директним рачуном (детаље погледати у књизи), може се показати да је

$$\iint_S f(x,y,z)\cos(\gamma(x,y,z))dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy,$$

одакле се интеграл $\iint_S f(x,y,z)\cos(\gamma(x,y,z))dS$ уобичајено записује са $\iint_S f(x,y,z)dxdy$. Слично се може добити и за $\iint_S f(x,y,z)\cos(\alpha(x,y,z))dS$ и $\iint_S f(x,y,z)\cos(\beta(x,y,z))dS$ одакле се долази до уобичајеног записа површинског интеграла друге врсте са

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy,$$

где су P,Q,R непрекидне функције дефинисане на површи S.

Још један елегантан запис површинског интеграла друге врсте је тзв. векторски. Директно из дефиниције видимо да уколико означимо са $v(x,y,z) = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ да је уједно и

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint_S \langle v,n\rangle dS,$$

где је други интеграл одговарајући површински интеграл прве врсте а $n(x,y,z)$ је јединични вектор нормал. У нотацији из претходног, како је n јединични вектор, то је његов координатни запис заправо $(\cos(\alpha(x,y,z)),\cos(\beta(x,y,z)),\cos(\gamma(x,y,z))$ па директно из дефиниције добијамо да интегралне суме површинског интеграла друге врсте представљају исте интегралне суме као за поменути површински интеграл прве врсте.

Градијент, дивергенција, ротор

Нека је $u\colon U \to \mathbb{R}$, где је $U \subset \mathbb{R}^3$ област диференцијабилна функција.

Градијент функције u је векторско поље дато са

$$\mathrm{grad}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Уколико је дата функција, односно векторско поље, $v\colon U \to \mathbb{R}^3, v(x,y,z) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$ где је U опет област у $\mathbb{R}^3$, дивергенција од v, у ознаци div$v$ је функција дата са

$$\mathrm{div}v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

На крају, ротор векторског поља v је векторско поље rot$v$ дато са

$$\mathrm{rot}v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right).$$

Уколико формално означимо са $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ и дати формални израз посматрамо као вектор, претходне формуле се могу лакш записати са

$$\mathrm{grad}u = \nabla u, \qquad \mathrm{div}v = \langle \nabla, v\rangle, \qquad \mathrm{rot}v = \nabla \times v,$$

где последњи израз означава векторски производ у $\mathbb{R}^3$. Претходне ознаке су формалне, а правила рачунања са њима су иста као са векторима и скаларима, осим што када израз $\frac{\partial}{\partial x}$ упарујемо са одговарајућом координатом не множимо већ диференцирамо. Основна правила рачунања са претходним операцијама могу се наћи у књизи.

Стоксова формула и формула Гауса - Остроградског

Нека је S глатка оријентабилна површ, ограничена са део по део глатком кривом Г. Претпоставимо да се S може бијективно пресликати на сваку од координатних равни. Нека су функције P, Q, R непрекидно диференцијабилне у некој области U, која садржи површ S. Тада важи Стоксова формула

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial Z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

Оријентација је таква да приликом обиласка криве Г површ S остаје са леве стране.

Доказ претходне једнакости може се наћи у књизи.

Претходна формула уопштава Гринову формулу на површи које нису обавезно садржане у равни $O_x y$. Наиме у том случају вектор номрале је паралелан вектору правца z осе, па заклапа угао $\pi/2$ са преостале две координатне осе, откуда прва два сабирка из површинског интеграла из Стоксове формуле су нула.

Слично као и код Гринове формуле, Стоксова формула је тачна и за површи које су унија површи које могу бијективно да се испројектују на све координатне равни. Наиме, у том случају површински интеграл са десне стране биће збир површинских интеграла по одговарајућим деловима површи, док се криволинијски међусобно скрате као у Гриновој формули.

На крају, коришћењем векторског записа, Стоксова формула се може једноставније записати, дакле нека је $v = (P, Q, R)$ и n јединични вектор нормале на површ S. Тада је

$$\int_\Gamma \langle v, dr\rangle = \iint_S \langle n, \mathrm{rot} v\rangle dS.$$

Нека је $V \subset \mathbb{R}^3$ област дата са $V = \{(x, y, z) | \phi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y), (x, y) \in D\}$, где је D обласу у $\mathbb{R}^2$ ограничена део по део глатком кривом Γ. Означимо даље

$$S_1 : (x, y, \phi(x, y)), (x, y) \in D$$
$$S_2 : (x, y, \psi(x, y)), (x, y) \in D$$
$$S_3 : (x, y, z), (x, y) \in \Gamma, \phi(x, y) \leqslant z \leqslant \psi(x, y),$$

И нека је $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. Неформалније, S је цилиндар чије су базе графици функција ϕ и ψ а површ S_3 представља омотач тог цилиндра. Овакву област V називамо z елементарном. Уколико је R функција дефинисана на V која је нерпекидна заједно са парцијалним изводом $\frac{\partial R}{\partial z}$ тада је

$$\iint_S R dx dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz,$$

где је оријентација одређена спољном страном површи S. Доказ ове формуле може се наћи у књизи, а идејно је сличан доказу Гринове формуле, односно добија се адекватном применом Фубинијеве теореме. Аналогно се дефинишу x и y елементарне области и аналогно, област називамо елементарном уколико је елемнтарна у односу на све три осе. За такве области важи

$$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx dy dz,$$

где је у првом интегралу узета спољна страна површи S, која ограничава област V. Претходна формула се назива формула Гауса - Остроградског.

Слично као Гринова и Стоксова формула и претходна формула важиза области које су дисјунктна унија елементарних области.

У векторском запису претходна формула се своди на

$$\iint_S \langle v, n\rangle dS = \iiint_V \mathrm{div} v dx dy dz,$$

где је коришћена иста нотација као у претходном тексту.