Метрички простори

Идеја увођења метричких простора је углавном уопштавање појмова конвергенције, непрекидности и осталих, које смо дефинисали над скупом $\mathbb{R}$, на неке општије ситуације. Нама ће најважније бити уопштавање на вишедимензионални простор $\mathbb{R}^n$, чијом се анализом и бавимо у остатку курса. Како изучавање метричких простора није циљ овог курса, неће се претендовати на велику општост и прецизност око формулација тврђења и битније је ће бити да се уочи који су појмови важни да би анализа на неком скупу имала смисла.

Уколико посматрамо на дефиницију лимеса низа реалних бројева, која гласи

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon,$$

видимо да уколико би хтели да имамо аналоган појам у прозивољном простору, неопходна нам је функција која има слична својства као $|x-y|$. Како знамо да она представља растојање од тацке x до y, из њених основних својстава имамо основу за следећу дефиницију.

Дефиниција

Нека је X произвољан скуп и $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ функција која има следећа својства:

1. $d(x,y) \geqslant 0$,
2. $d(x,y) = 0$ ако и само ако је $x = y$,
3. $d(x,y) = d(y,x)$,
4. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$,

где су $x, y, z \in X$. Тада кажемо да је d метрика (растојање) на X, а пар (X,d) називамо метрички простор.

Аксиоме из претходне дефиниције осликавају основне ствари које очекујемо од растојања. Дакле, 1. и 2. кажу да је растојање ненегативан број као и да је нула само на истим тачкама. Својство 3. је да је растојање симетрично, тј. од x до y, је исто као од y до x, док је својство 4 неједнакост троугла позната од раније.

Претходне аксиоме нису нарочито рестриктивне, што се донекле може видети из наредних примера.

Примери

1. Као основни пример је наравно скуп $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) са метриком $d(x,y) = |x-y|$ и ову метрику називамо уобичајена метрика на $\mathbb{R}$. Сва наведена својства се директно проверавају.

2. Нама најважнији пример је $\mathbb{R}^n$. Уколико означимо са x и y векторе дате са $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$, растојање задајемо са

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},$$

што због Питагорине Теореме одговара уобичајеном растојању. Сва својства осим неједнакости троугла се директно виде. Неједнакост троугла следи из одговарајуће неједнакости Минковског

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2},$$

која следи из Коши - Шварцове неједнакости

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right).$$

Докази свих наведених неједнакости могу се наћи у уџбенику Математичка Анализа 1.

3. Заправо, на претходном скупу $\mathbb{R}^n$ можемо на више начина увести метрику. Још један начин је (у нотацији из претходног примера)

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p},$$

где је $p \geqslant 1$. Опет, једино проблематично својство је неједнакост троугла, која је опет аналогна одговарајућој неједнакости Минковског

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p},$$

која је тачна само у случају $p \geqslant 1$. Такође, још један начин да се уведе метрика је

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - y_k|.$$

Неједнакост троугла, која је опет једино нетривијално својство, следи из неједнакости

$$|x_k + y_k| \leqslant |x_k| + |y_k| \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |y_k|,$$

где је прва неједнакост обична неједнакост троугла за апсолутну вредност, а друга је само $|x_k| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|$ и аналогно за y. Самим тим број $\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k| + \max_{1\leqslant k\leqslant n}|y_k|$, који више не зависи од k, је већи од $|x_k+y_k|$ за свако $k=1,\dots,n$ а самим тим и од максималног. Одатле је

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k+y_k| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k| + \max_{1\leqslant k\leqslant n}|y_k|,$$

одакле се види и неједнакост троугла за d_∞. Може се показати да је $d_\infty(x,y) = \lim_{p\to\infty} d_p(x,y)$, одакле је мотивација за увођење ове ознаке.
4. Уколико са $C[a,b]$ означимо скуп свих функција $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ које су непрекидне, један од начина да уведемо метрику је

$$d_\infty(f,g) = \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|.$$

Претходна дефиниција је коректна, јер је функција $|f-g|$ непрекидна а одатле по Вајерштрасовој Теореми достиже поменути максимум. Доказ својстава из дефиниције метрике је даље аналоган претходном примеру.
5. Опет на скупу $C[a,b]$ можемо да уведемо метрику и са

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

за $p\geqslant 1$. Неједнакост троугла сада следи из интегралне неједнакост Минковског, што се опет може наћи у удзбенику. Приметимо да је овде важно да функције буду непрекидне да би важило својство 2, што се може видети и из наредног примера
6. Израз за претходну метрику има смисла и на ширем скупу, наиме уколико означимо са $\mathcal{R}[a,b]$ скуп свих функција које су Риман интеграбилне на $[a,b]$ (тј. имају скуп прекида мере нула), тада је и функција $|f-g|^p$ опет Риман интеграбилна, тј. дефинисано је

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Неједнакост троугла је тачна и у овом случају (опет из поменутих неједнакости), међутим, својство 2. из дефиниције не важи у овом простору. Заиста, уколико узмемо да је $f(x)=1$ за $x=a$ и $f(x)=0$ за $x\in(a,b]$, тада је f Риман интеграбилна, јер има прекид само у a, а такође је f различита од нула функције. Са друге стране је $d_p(f,0) = (\int_a^b f(x)^p dx)^{1/p} = 0$.
7. Уколико је X било који скуп, метрику можемо увести са

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, x\neq y \\ 0, x=y. \end{cases}.$$

У овом случају се све аксиоме директно провере, а ова метрика се назива дискретна метрика. Овај пример је врло вештачки, што се може видети и из тога што је ова метрика дефинисана на сваком скупу. Ипак, треба га имати у виду јер често може бити користан као контрапример за разна својства.

Нотације ради, примери 1.-6. долазе од специјалнијег случаја. Наиме, уколико је V векторски простор (тј. простор у коме је дефинисано сабирање и множење скаларом) и ако постоји пресликавање $\|\cdot\|\colon V\to[0,+\infty)$ које задовољава
1. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ за сваки скалар λ и сваки вектор v,
2. $\|v\|=0 \Rightarrow v=0$,
3. $\|u+v\|\leqslant\|u\|+\|v\|$,
тада пресликавање $\|\cdot\|$ називамо норма, а пар $(V,\|\cdot\|)$ нормирани простор. У сваком нормираном простору је задата метрика са $d(u,v)=\|u-v\|$. У складу са тиме, користићемо и ознако $\|x\|_p$ за одговарајуће норме, тј. $\|x\|_p = (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p}$

Уколико имамо метрику на неком скупу, даље се неки основни појмови уводе аналогно као и случају скупа $\mathbb{R}$. Наиме, осим експлицитног записа са апсолутно вредношћу, дефиниције лимеса и непрекидности смо могли да задамо и преко околина. У складу са тиме имамо
Дефиниција Нека је (X,d) метрички простор, $a\in X$ и $r>0$. Отворена кугла (лопта) са центром у a полупречника r је скуп

$$K(a;r) = \{x\in X | d(x,a) < r\}.$$

Слично, затворена кугла је скуп

$$K[a;r] = \{x\in X | d(x,a) \leqslant r\}.$$

У принципу, уколико се помене кугла, подразумева се отворена кугла.
Примери
1. У скупу $\mathbb{R}$ са уобичајеном метриком је $K(a,r) = (a-r,a+r)$.
2. У скуповима $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ са метриком d_2 отворене кугле су кругови, односно лопте (одакле и долази нотација).
3. Уколико посматрамо метрике d_p на простору $\mathbb{R}^2$ и кугле у њима са центром у $(0,0)$ полупречника 1, у случају $p=1$ имамо да је $K(0;1) = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 | d_1(x,0) = |x_1|+|x_2| < 1\}$, што је отворена унутрашњост

квадрата са теменима у $(\pm 1,0)$ и $(0,\pm 1)$. Са друге стране, у метрици d_∞ имамо $K(0;1)=\{(x_1,x_2)||x_1|<1,|x_2|<1\}$, што је унутрашњост квадрата са теменима $(\pm 1,\pm 1)$. У осталим метрикама кугле се "шетају" између ова два крајња примера. Погледати исти пример и у књизи.
4. Уколико је (X,d) простор са дискретном метриком, директно из дефиниције имамо да је

$$K(a;r)=\begin{cases}\{a\}, r\leqslant 1\\ X, r>1.\end{cases}$$

Још неки примери могу се наћи у књизи.
Дефиниција За подскуп A метричког простора (X,d) кажемо да је ограничен уколико постоји кугла $K(a;r)$ таква да је $A\subset K(a;r)$.
Приметимо да је претходна дефиниција сагласна дефиницији ограничености коју смо имали на $\mathbb{R}$, (задате преко релације $\leqslant$). Из дефиниције имамо да су све кугле (отворене и затворене) ограничени скупови. Наравно, дефиниција ограничености зависи од метрике. Нпр. као што смо видели у претходном примеру, уколико у простор X уведемо дискретну метрику, тада је цео скуп X садржан у било којој кугли полупречника већег од 1, а самим тим и ограничен.
Дефиниција За подскуп U метричког простора (X,d) кажемо да је отворен уколико са сваком тачком која му припада садржи и неку куглу око те тачке. Прецизније, U је отворен ако важи

$$x\in U\Rightarrow \exists r>0\wedge K(x;r)\subset U.$$

Опет по аналогији са реалним случајем, отворене скупове називамо и околином неке тачке која му припада, док кугле $K(a;\varepsilon)$ називамо ε околином.
Пример
1. Цео скуп X као и празан скуп $\emptyset$ су отворени скупови у метричком простору (X,d). Прво, јер је свака кугла дефинисана као подскуп од X а за празан скуп из уобичајеног нетачно повлачи било шта је тачно.
2. Свака отворена кугла $K(a;r)$ је отворен скуп. Детаљи се могу наћи у примеру у уджбенику.
3. Скуп $A=\{x|d(x,a)>r\}$ је такође отворен. Нека је $x\in A$, односно нека је $d(x,a)>r$ и нека је $\delta<d(x,a)-r$. Покажимо да је тада $K(x,\delta)\subset A$. Заиста, уколико је $y\in K(x;\delta)$ из неједнакости троугла имамо да је

$$d(x,a)\leqslant d(a,y)+d(x,y)<d(a,y)+\delta,$$

односно $d(a,y)>d(x,a)-\delta$, што је веће од r, по избора δ.
Дефиниција Подскуп F метричког простора (X,d) је затворен, уколико је његов комплемент $X\setminus F$ отворен.
Пример
1. Из претходног примера имамо да су скупови X и $\emptyset$ такође и затворени.
2. Из трећег дела претходног примера имамо да су затворене кугле затворени скупови. Ово је тачно и за $r=0$, прецизније тачка $\{a\}$ је увек затворен скуп. Ово је последица друге аксиоме за метрику, јер уколико посматрамо скуп $U=X\setminus\{a\}$ и $x\in U$ тада је $d(x,a)=\delta>0$, одакле кугла $K(x;\delta/2)$ не садржи тачку a, односно $K(x;\delta/2)\subset U$.
Приметимо да отвореност и затвореност нису искључиви појмови (чак и кад занемаримо очигледан пар $\emptyset$ и X). Нпр, уколико посматрамо простор са дискретном метриком у њему су тачке и отворени скупови, јер представљају кугле било ког полупречника строго мањег од 1. Касније ћемо више прецизирати када долази до ове ситуације.
За отворене и затворене скупове важи
Теорема
Унија произвољно много и пресек коначно много отворених скупова су опет отворени скупови.
Пресек произвољно много и унија коначно много затворених скупова су опет затворени скупови.
Доказ се може наћи у уджбенику.
Опет, по аналогији имамо следећу
Дефиниција Нека је (X,d) метрички простор и $A\subset X$. За тачку a кажемо да је тачка нагомилавања скупа A уколико у свакој околини тачке се налази бесконачно много тачака скупа A (или, еквивалентно барем једна различита од тачке a). Скуп свих тачака нагомилавања скупа A означавамо са A'. Скуп $A\cup A'$ називамо затворењем (адхеренцијом) скупа A и означавамо га са $\overline{A}$.
Важна карактеризација затворених скупова исказана је у следећој теореми.
Теорема Подскуп F метричког простора (X,d) је затворен ако и само ако је $F=\overline{F}$, односно ако и само ако садржи све своје тачке нагомилавања.
Доказ - књига.
Вратимо се сада раније дефинисаним метрикама d_p на скупу $\mathbb{R}^n$. Тада, за свако $p\geqslant 1$ и све $x,y\in\mathbb{R}^n$ важи

$$d_\infty(x,y)\leqslant d_p(x,y)\leqslant n^{1/p}d_\infty(x,y).$$

Обе неједнакости следе из дефиниције датих метрика. Прва, како је d_∞ максимум од израза $|x_k - y_k|$ и он се достиже за неко нпр. k_0 за које је $1 \leqslant k_0 \leqslant n$. Тада имамо

$$d_\infty(x,y)^p = |x_{k_0} - y_{k_0}|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p,$$

јер смо у последњем кораку додали ненегативне сабирке. Тада прва неједнакост следи узмањем p-тог корена.

Друга наведена неједнакост следи из тога што је $|x_k - y_k| \leqslant \max |x_k - y_k| = d_\infty(x,y)$, а одатле је

$$d_p(x,y)^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} d_\infty(x,y)^p = n d_\infty(x,y)^p,$$

и опет узмањем одговарајућег корена добијамо наведену неједнакост. Овакве метрике се називају еквивалентне.

Из претходне неједнакости имамо да свака кугла у $\mathbb{R}^n$ у метрици d_p садржи неку куглу у метрици d_∞ и обрнуто. Заиста, уколико означимо са K^p кугле у метрици d_p претходну неједнакост можемо тумачити као

$$K^\infty(a; r/n^{1/p}) \subset K^p(a,r) \subset K^\infty(a,r).$$

Што се прве инклузије тиче, уколико је $x \in K^\infty(a; r/n^{1/p})$, тада је $d_p(x,a) \leqslant n^{1/p} d_\infty(x,a) < n^{1/p} r / n^{1/p} = r$. Друга се слично показује.

Одавде видимо да су отворене кугле у метрици d_p отворени скупови у $\mathbb{R}^n$ и са метриком d_∞, а и обрнуто, кугле у метричком простору $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ су отверени скупови у метричком простору $(\mathbb{R}^n, d_p)$. Како кугле одређују све отворене скупове, одавде заправо имамо да су отворени скупови у метричким просторима $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ и $(\mathbb{R}^n, d_p)$ исти, иако су метрике различите.

Уколико је (X,d) метрички простор и $A \subset X$, тада рестрикција метрике d на $A \times A$ задовољава све аксиоме из дефиниције метричког простора (директно се види да су аксиоме такве да ако важе на већем важе и на мањем скупу). Метрички простор (A,d) називамо потпростором метричког простора (X,d).

Напомена Појмови отворености и затворености скупова су релативни, тј. зависе од амбијентног простора. Примера ради, скуп $(0,1)$ није затворен у метричком простору $(\mathbb{R}, d)$ са уобичајеном метриком $d(x,y) = |x - y|$ (јер не садржи тачке 0 и 1 које су му тачке нагомилавања). Са друге стране, он јесте затворен у метричком простору $((0,1), d)$, јер као што се видело у примерима, цео скуп је увек затворен скуп у себи. Још детаља погледати и у књизи.

Конвергенција

Као што је већ било речи на почетку. помоћу појма метрике, аналогно као у случају реалних бројева, уводимо појам граничне вредности

Дефиниција За низ тачака x_n метричког простора (X,d) кажемо да конвергира ка тачки x и пишемо $\lim_{n\to\infty} x_n = x, x_n \to x, ...$ уколико важи

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Претходни закључак је еквивалентан томе да је $x_n \in K(x;\varepsilon)$, па је опет као и у случају реалних бројева, претходна дефиниција еквивалентна томе да за сваки отворен скуп U такав да је $x \in U$, постоји N такво да $n > N \Rightarrow x_n \in U$.

Такође, директно се види да важи еквиваленција $x_n \to x \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$, где је прва гранична вредност у простору X а друга у прсотору $\mathbb{R}$ са уобичајеном метриком.

Примери

1. Нека је $x_m, x \in \mathbb{R}^n$, односно $x_m = (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, посматран са метриком d_∞. Тада $x_m \to x$ ако и само ако за свако $k = 1, \ldots, n$ имамо да низ координата x_k^m конвергира ка x_k у уобичајеној метрици. Заиста, уколико $d_\infty(x_m, x) \to 0$, то је $d_\infty(x_m, x) < \varepsilon$ за све $m > M$, а расписивањем метрике имамо да је заправо $max_k |x_k^m - x_k| < \varepsilon$. Како је максимум мањи од ε, тим пре за свако k је $|x_k^m - x_k| < \varepsilon$, тј. $x_k^m \to x_k$ у $\mathbb{R}$. Што се другог смера тиче, уколико за свако k имамо да $x_k^m \to x_k$, тада за $\varepsilon > 0$ имамо да за свако k постоји M_k такво да за $m > M_k$ важи $|x_k^m - x_k| < \varepsilon$. Уколико означимо $M = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$, за $m > M$ је тада $|x_k^m - x_k| < \varepsilon$ за свако $k = 1, \ldots, n$. Самим тим и максимум тог скупа је тада мањи од ε. Како су отворени скупови исти у свим метрикама d_p, а како је конвергенција низова одређена само са отвореним скуповима, то заправо имамо да

$$d_p(x_m, x) \to 0 \Leftrightarrow x_k^m \to x,$$

односно конвергенција у $\mathbb{R}^n$ у метрици d_p еквивалентна је конвергенцији по координатама (која се назива још и тачка по тачка конвергенција).

2. Да ситуација није увек тако једноставна као малопре можемо видети на примеру метричког простора $C[0,1]$ са метриком d_infty нпр. на низу функција $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Уколико фиксирамо $x \in [0,1]$ (једну координату) и пустимо да $n \to \infty$, тада имамо да $\frac{nx}{1+n^2x^2} \to 0$, јер је у бројиоцу n а у имениоцу n^2 (осим

за $x=0$, али тада је већ $f_n(0)=0$). Са друге стране је

$$f_n\Big(\frac{1}{n}\Big)=\frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2},$$

а одатле је $d_\infty(f_n,0)=\max_x|f_n(x)-0|\geqslant f_n(1/n)=1/2$, што не тежи нули. Дакле f_n не конвергира ка нула функцији у $(C[a,b],d_\infty)$. Са друге стране, као и у претходном примеру се показује да уколико $d_\infty(f_n,f)\to 0$, тада $f_n(x)\to f(x)$ за свако x.

Основне особине лимеса остају на снази и у метричким просторима, докази су аналогни као у случају реалних низова, а могу се погледати и у књизи.

Теорема

1. Ако низ конвергира, гранична вредност је јединствена.
2. Конвергентан низ је ограничен (тј. скуп његових вредности је ограничен скуп).

Тачке нагомилавања низова се аналогно дефинишу, као граничне вредности поднизова и аналогно имамо

Став

1. Тачка $x\in X$ је тачка нагомилавања низа x_n ако и само ако за сваку околину U тачке x и за свако N постоји $n>N$ такво да је $x_n\in U$.
2. Тачка $x\in X$ је тачка нагомилавања скупа $A\subset X$ ако и само ако постоји низ различитих тачака скупа A који конвергира ка x.
3. Тачка $x\in X$ припада затворењу скупа A (назива се и адхерентна тачка) ако и само ако постоји низ тачака скупа A који конвергира ка x.

Својство 3. директно следи из тога што тачка x припада затворењу скупа A ако и само ако му већ припада (у ком случају можемо узети да је низ константан) или му је тачка нагомилавања, када се своди на 2.

Лимес функције

Дефиниција Нека су (X,d_X) и (Y,d_Y) метрички простори, $A\subset X, f\colon A\to Y$ и a тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је $b\in Y$ лимес (гранична вредност...) функције f у тачки a, ако за сваку околину V тачке b постоји околина U тачке a таква да важи

$$\forall x\in A, x\in U\setminus\{a\}\Rightarrow f(x)\in V.$$

Као и у реалном случају, имамо еквивалентне облике преко $\varepsilon-\delta$ дефиниције, тј

$$\lim_{x\to}f(x)=b\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0, 0<d_X(x,a)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),b)<\varepsilon,$$

а као и у случају низова имамо и

$$\lim_{x\to}f(x)=b\Leftrightarrow\lim_{x\to a}d_Y(f(x),b)\to 0,$$

где је други лимес, лимес реалне функције.

Аналогно реалним функцијама имамо

Теорема Уколико функција има граничну вредност у некој тачки, она је једнозначна.

Уколико функција има границну вредност у некој тачки тада постоји околина те тачке на којој је функција ограничена.

И аналогно важе Хајнеова Теорема и Теорема о смени променљиве

Теорема Нека су X и Y метрички простори, $A\subset X, f\colon A\to Y$ и $a\in A$ тачка нагомилавања скупа A. Тада је $\lim_{x\to a}f(x)=b$ ако и само ако за сваки низ $x_n\in A\setminus\{a\}$ који конвергира ка a важи да је $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b$

Теорема Нека су X,Y и Z метрички простори и нека је још

1. $B\subset Y$ и $b\in Y$ тачка нагомилавања скупа $B, g\colon B\to Z$ и $\lim_{y\to b}g(y)=c$.
2. $A\subset X$ и $a\in X$ т.н. скупа $A, f\colon A\to B$ и за сваку околину V тачке b постоји околина U тачке a таква да је $f(U\setminus\{a\})\subset V\setminus\{b\}$.

Тада је $\lim_{x\to a}g\circ f(x)=c$.

Примери

1. Нека је X метрички простор, $A\subset X$ и $f\colon A\to\mathbb{R}^n$, где у $\mathbb{R}^n$ узимамо неку од d_p метрика. Тада је $f(x)=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ нека тачка n- димензионалног простора, те су дефинисане функције $y_k=f_k(x)$. Заправо, дефинисана је пројекција на k-у координату $\pi_k\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ са $\pi_k((x_1,\dots,x_n))=x_k$, а даље је $f_k=\pi_k\circ f$. Нека је x_n низ који конвергира ка a што је тачка нагомилавања скупа A. Тада је $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=b$ ако и само ако (по примеру за конвергенцију низова у d_∞ метрици) за све $k=1,\dots,n$ важи $\lim_{n\to\infty}f_k(x_n)=b_k$, односно уколико је $\lim_{x\to a}f_k(x)=b_k$. Дакле, уколико је кодомен функције $\mathbb{R}^n$, конвергенцију сводимо на конвергенцију координатних функција, које су једноставније (кодомен им је $\mathbb{R}$).
2. Са друге стране, уколико је $A\subset\mathbb{R}^n$ и $f\colon A\to Y$ (овакве функције називамо функцијама више реалних променљивих) ситуација није директна као у претходном примеру. Нпр. посматрајмо функцију $f(x,y)\colon\mathbb{R}^2\setminus(0,0)\mapsto\mathbb{R}\colon\frac{xy}{x^2+y^2}$, и њену граничну вредност у $(0,0)$. Уколико је посматрамо само као функцију од y, тј. уколико фиксирамо x, имамо да је $f(0,y)=0$, па је самим тим лимес ове функције нула, а исто се дешава и ако прво фиксирамо y па x. Овакви лимеси се називају поновљени лимеси и означавамо их са $\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=0$ у овом случају. Са друге стране, лимес функције у смислу дефиниције лимеса не постоји. Примера ради, уколико узмемо низове $x_n=(1/n,0)$ и $y_n=(1/n,1/n)$, тада $f(x_n)=0\to 0$, док

је $f(y_n) = 1/2$, што не тежи нули.

Комплетност

Опет по аналогији из реалног случаја уводимо појам Кошијевог низа.
Дефиниција Нека је (X, d) метрички простор и x_n низ тачака из X. За x_n кажемо да је Кошијев уколико за свако $\varepsilon > 0$ постоји N, такво да за $m, n > N$ важи $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.
Теорема 1. Сваки конвергентан низ је Кошијев.
2. Сваки Кошијев низ је ограничен.
3. Ако Кошијев низ има конвергентан подниз тада и он сам конвергира.
Доказ се може наћи у књизи, а идејно је исти као и у реалном случају.
Дефиниција За метрички простор X кажемо да је комплетан уколико у њему сваки Кошијев низ конвергира.
Примери
1. $\mathbb{R}$ је комплетан, што је показано раније.
2. $\mathbb{Q}$ посматран као потпростор од $\mathbb{R}$ није комплетан. Нпр. низ $(1 + 1/n)^n$ је низ рационалних бројева који конвергира ка e што није рационалан број. Самим тим тај низ не конвергира у $\mathbb{Q}$.
3. $\mathbb{R}^n$ је комплетан у свакој метрици d_p. Заиста, нека је x_m Кошијев низ у $\mathbb{R}^n$, тј $d_p(x_{m_1}, x_{m_2}) < \varepsilon$, за све $m_1, m_2 > M$. Ако низ опет распишемо по координата, тј. ако је $x_m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m)$, за свако фиксирано $k = 1, \dots, n$ имамо

$$|x_k^{m_1} - x_k^{m_2}|^p \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j^{m_1} - x_j^{m_2}|^p = d_p^p(x_{m_1}, x_{m_2}) < \varepsilon^p,$$

односно узимањем p-ог корена, имамо да је низ x_k^m кошијев у $\mathbb{R}$ одакле конвергира. Самим тим по претходном, како сваки низ координата конвергира, имамо и да низ x_m конвергира у $\mathbb{R}^n$.
4. Уколико у простор $C[a, b]$ уведемо неку од интегралних метрика, нпр. $d(f, g) = \int_a^b |f - g| dx$, он није комплетан. Пример је на $C[-1, 1]$ и може се узети

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, x \in [-1, -1/n] \\ nx, x \in [-1/n, 1/n] \\ 1, x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

Тада је f_n Кошијев, јер, може видети да је $|f_n(x)| \leqslant 1$, а за $n, m > N$ функције f_n и f_m се разликују највише на интервалу $[-1/N, 1/N]$. Одатле је $d(f_n, f_m) \leqslant \int_{-1/N}^{1/N} |f_n - f_m| dx \leqslant \int_{-1/N}^{1/N} 2dx = 4/N$, што тежи нули. Са друге стране ако би постојало f која је непрекидна на $[-1, 1]$ таква да $d(f_n, f) \to 0$, тада би f морала да буде једнака -1 на интервалу $[-1, 0)$. Заиста, уколико узмемо $x \in [-1, 0)$ и ако би $f(x) \neq -1$, за довољно велико N би $x \in [-1.-1/n]$ за све $n > N$. Тада би $d(f_n, f) = \int_{-1}^{1} |f_n - f| dx \geqslant \int_{-1}^{-1/N} |f_n - f| dx = \int_{-1}^{-1/N} |-1 - f| dx$, јер је f_n једнака -1 на датом интервалу. Како је подинтегрална функција непрекидна и барем у једној тачки x није једнака нули, по својствима интеграла имамо да је $\int_{-1}^{-1/N} | - 1 - f| dx = c > 0$. Одатле би имали да $d(f_n, f)$ не тежи нули. Дакле f мора бити једнака -1 на $[-1, 0)$ а слично мора бити једнака 1 на $(0, 1]$, што је у контрадикцији са непрекидношћу f. Дакле, овај простор није комплетан. Слично се дешава и у осталим интегралним метрикама.
Са друге стране, исти простор са метриком d_∞ јесте комплетан, али то је тематика којом се нећемо бавити на овом курсу.
Наравно, важи и Кошијев принцип егзистенције лимеса за функције и он се аналогно формулише и показује.
Важност комплетних простора за сада показујемо једном Теоремом, која ће нам бити битна касније и један је од основних резултата теорије. Њен доказ погледати у књизи
Банахова Теорема о непокретној тачки
Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $f\colon X \to X$ функција за коју постоји број $q \in (0, 1)$ такав да је $d(f(x), f(y)) \leqslant q \cdot d(x, y)$. Тада постоји јединствено $x \in X$ за које је $f(x) = x$.
Јединствено x из формулације се назива непокретна тачка функције f, одакле је и назив Теореме.

Непрекидност

Са дефиницијом појма граничне вредности, директно као и раније, можемо даље увести појам непрекидности.
Дефиниција
Нека су X и Y метрички простори и $f\colon X \to Y$. За функцију f кажемо да је непрекидна у тачки $a \in X$, ако за сваку околину V тачке $f(a)$ постоји околина U тачке a таква да је $f(U) \subset V$.
Наравно имамо аналогну $\varepsilon - \delta$ дефиницију

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Као и у реалном случају, разлика појма непрекидности и постојања граничне вредности је у томе што a не мора бити тачка нагомилавања домена функције, док са друге стране f мора бити дефинисана у тачки a. Уз те додатне претпоставке, имамо аналогно

Теорема Нека је $f\colon X \to Y$ и нека је $a \in X$ тачка нагомилавања скупа X. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

1. Функција f је непрекидна у тачки a.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
3. За сваки низ $x_n \in X$, такав да $x_n \to x$, важи $f(x_n) \to f(x)$.

Примери

1. Приметимо да су претходно дефинисане функције $\pi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дате са $\pi_k(x) = x_k$ непрекидне, јер као што смо већ користили имамо да за свако $p \geqslant 1$ важи

$$|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x_k - y_k| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p} = d_p(x, y).$$

Одатле, као и код Липшицових функција у реалном случају, уколико за $\varepsilon > 0$ узмемо да је $\delta = \varepsilon$ добијамо да је

$$|\pi_k(x) - \pi_k(a)| \leqslant d_p(x, a) < \delta = \varepsilon,$$

т.ј $\pi_k(x) \to \pi_k(a)$.

2. Уколико је X метрички простор и ако посматрамо функцију $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, тада из претходног примера, уколико је f непрекидна биће непрекидне и функције $f_k = \pi_k \circ f\colon X \to \mathbb{R}$, као композиције непрекидних функција (прецизно ћемо формулисати касније). Са друге стране, из одговарајућег примера код конвергенције низова видимо да важи и обрнуто, наиме уколико су функције f_k непрекидне у тачки a, т.ј. да $f_k(x) \to f(a)$, тада ће и $f(x)$ да конвергира ка $f(a)$. Дакле, оваква функција f је непрекидна ако и само ако су функције f_k непрекидне.

Опет, основна својства непрекидних функција су аналогна као у реалном случају, само адекватно реформулисана.

Став Ако је функција $f\colon X \to Y$ непрекидна у тачки $a \in X$, тада постоји околина U тачке a на којој је f ограничен, тј. скуп вредности $f(U)$ је ограничен скуп у Y.

Став Нека су функције $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ непрекидне у $a \in X$ и $f(a) \in Y$ респективно. Тада је функција $g \circ f$ непрекидна у $a \in X$.

Претходно тврђење је само реформулација Теореме о смени променљиве.

Из раније познатих својстава лимеса реалних бројева и претходних тврђења даље имамо

Став Нека су $f, g\colon X \to \mathbb{R}^n$ непрекидне у тачки $a \in X$ и $\alpha\colon X \to \mathbb{R}$ исто непрекидна у a. Тада су функције $f + g, \alpha f, \|f\|_p$ непрекидне у тачки a.

Уместо доказа, покажимо да је норма увек непрекидно пресликавање. Из неједнакости троугла имамо да за $x, y \in \mathbb{R}^n$ важи

$$\|x\|_p = \|x - y + y\|_p \leqslant \|x - y\|_p + \|y\|_p,$$

тј. $\|x\|_p - \|y\|_p \leqslant \|x - y\|_p$. Заменом x и y добијамо и $\|y\|_p - \|x\|_p \leqslant \|x - y\|_p$, одакле следи и $|\|x\|_p - \|y\|_p| \leqslant \|x - y\|_p$. Одавде следи да је норма непрекидна, потпуно аналогно као што је у претходном примеру следило да је пројекција непрекидна функција.

Став Нека је X метрички простор и $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ непрекидне у тачки a. Тада су и функције $f \cdot g$ и f/g непрекдне у a (друга ако је $g(a) \neq 0$).

За нека даља својства непрекидности, посматраћемо функције које су непрекидне на скупу, тј. у свакој тачки метричког простора X. За почетак имамо једну важну карактеризацију тог случаја

Теорема Нека су X и Y метрички простори и $f\colon X \to Y$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:

1. f је непрекидна на X.
2. За сваки отворен скуп $U \subset Y$ је скуп $f^{-1}(U)$ такође отворен.
3. За сваки затворен скуп $F \subset Y$ је скуп $f^{-1}(F)$ такође затворен.

Доказ погледати у књизи.

Компактност

Приметимо да за нека финија својства непрекидних функција, која су исказана у теоремама Вајерштраса, Коши - Болцана и Кантора, осим непрекидности, важно је и какав је скуп на коме посматрамо дату функцију, конкретно важно је да ли је функција дефинисана на интервалу или сегменту итд. Да би добили аналогије тих теорема у Метричким просторима, неопходно је даље увести нека финија својства самих простора. Отуда

Дефиниција Нека је X метрички простор и $A \subset X$. За скуп A кажемо да је компактан уколико се из сваког покривања A отвореним скуповима може издвојити коначан потпокривач.

Прецизније, уколико су U_i, за $i \in I$, отворени скупови, такви да је $A \subset \cup_i U_i$, тада постојие $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$, такви да је $A \subset \cup_{j=1}^{k} U_{i_j}$.

Примери

1. Основни пример компактног скупа је сегмент $[a, b]$, што је само реформулација Борел - Лебегове леме.

2. n- димензионални сегмент $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ је компактан подскуп од $\mathbb{R}^n$. Доказ се може погледати у књизи, а након што прођемо кроз основна својства компактних скупова, видећемо још један начин да то покажемо.
Иако смо компактност дефинисали релативно, она заправо не зависи од амбијентног простора. Прецизније
Став Подскуп A метричког простора (X, d) је компактан ако и само ако је компактан у себи, тј. метричком простору (A, d).
Доказ Уместо формалног доказа, приметимо да је кугла у метричком простору A заправо пресек кугле истог полупречника и центра у простору X са A. Прецизније

$$K_A(a; r) = \{x \in A | d(x, a) < r\} = \{x \in X | d(x, a) < r\} \cap A = K_X(x; r) \cap A.$$

Како су отворени скупови заправо уније кугли, из претходног се види да је тада сваки отворен скуп у A заправо пресек отвореног скупа у X са скупом A, тј.

$$U_A \quad \text{је отворен у} \quad (A, d) \Leftrightarrow U_A = A \cap U_X, U_X \quad \text{је отворен у} \quad (X, d).$$

Одавде видимо да ако имамо фамилију отворених скупова која покрива метрички простор (A, d) је исто као да имамо фамилију отворених скупова у X која покрива подскуп A. Одатле и следи закључак става.
Нека основна својства компактних скупова су
Став
1. Компактан подскуп метричког простора је затворен.
2. Компактан подскуп метричког простора је ограничен.
3. Затворен подскуп компактног метричког простора је компактан.

Доказ Доказаћемо само 2, остало се може наћи у књизи. Нека је дакле A компактан подскуп метричког простора X. Уколико он не би био ограничен, тада он не би био садржан ни у једнос кугли, а одатле за неко $a \in X$ ни за једно $n \in \mathbb{N}$ не би важило $A \subset K(a; n)$. Са друге стране је $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} K(a; n)$, јер је свака тачка из X на коначном растојању од тачке a, а онда је то растојање мање од неког природног броја. Тим пре је $A \subset \cup_{n \in \mathbb{N}} K(a; n)$, а онда због компактности се може извући коначан потпокривач, тј. $A \subset \cup_{k=1}^{N} K(a; n_k) = K(a; n_N)$, јер је индекс n_N највећи, те самим тим су све претходне кугле садржане унјој јер она има највэи полупречник а све имају исти центар. Међутим, то би значило да је A ограничен, што је контрадикција.
Својства 1. и 2. нису довољна да би неко подскуп био компактан (нпр. у простору са дискретном метриком су сви подскупови затворени и ограничени, а компактни су самоконачни), али у нама најважнијем случају важи
Став Подскуп A простора $(\mathbb{R}^n, d_p)$ је компактан ако и само ако је затворен и ограничен.
Један смер је тачан у сваком метричком простору. Са друге стране, уколико је A ограничен, он је садрзахн у неком n- димензионалном сегменту I, а пошто је затворен у $\mathbb{R}^n$ биће затворен и у простору (I, d_p) (заправо, аналогно отвореним скуповима, уколико је A потпростор од X, тада је F_A затворен у A ако и само ако је $F_A = A \cap F_X$, где је F_X затворен у X). Све у свему одатле је A затворен подскуп комапктног скупа, чиме је и сам компактан по претходном ставу.
Претходни резултат не зависи од метрике d_p, што је и очекивано. Комапктност је формулисана само у терминима отворених скупова, који су исти у свим метрикама d_p, одакле смо и очекивали да су у свим тим метрикама исти и комапктни скупови.
Важно својство комапктних скупова је следеће
Став Нека је X комапктан метрички простор. Тада:
1. Сваки његов бесконачан подскуп има тачку нагомилавања.
2. Сваки његов низ има тачку нагомилавања.

Да су 1. и 2. еквивалентни показује се аналогно реалном случају. Такође, доказ целог става се може наћи у књизи. Са друге стране, важи и обрнуто, што ћемо користити без доказа, да је метрички простор комапктан ако и само ако сваки низ има тачку нагомилавања (или ти конвергентан подниз).
Из тога лако можемо показати да је n-димензионални сегмент $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ компактан. Заиста, узмимо произвољан низ $x_m \in I$ и распишимо га координатно $x_m = (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m)$. Тада је низ x_1^m садржан у $[a_1, b_1]$ те има конвергентан подниз $x_1^{m_k}$ по Болцано-Вајерштрасовој леми. Ако сада посматрамо низ x_{m_k} знамо да њему прва координата конвергира, док се његове друге координате $x_2^{m_k}$ налазе у сегменту $[a_2, b_2]$, па опет по истој Теореми тај низ има конвергентан подниз. Наставком поступка, после n корака добијамо подниз чије све координате конвергирају, односно и он сам конвергира.
Важно својство непрекидних функција је да чувају компактне подскупове.
Теорема Непрекидна слика компактнок скупа је комапктан скуп. Прецизније, уколико је $f\colon X \to Y$ непрекидна функција и $A \subset X$ компактан, тада је и $f(A)$ компактан подскуп од Y.
Доказ погледати у књизи.
Претходна Теорема је у суштини варијанта Вајерштрасове Теореме. Заиста како је $f(A)$ затворен и ограничен, у случају је $Y = \mathbb{R}$, како супремум и инфимум увек припадају затворењу, то они морају припадати и слици $f(A)$, односно ф достиже максимум и минимум на компактном скупу.
Равномерна непрекидност

Слично реалном случају, дефинишемо и
Дефиниција Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори. За функцију $f\colon X \to Y$ кажемо да је равномерно непрекидна уколико за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да

$$(x_1, x_2 \in X) d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Мотивација је иста као у реалном случају, дакле да избор δ не зависи од тачке до тачке, као што је тако у случају обичне непрекидности. Важи аналогија Канторове Теореме
Теорема Нека је X компактан метрички простор и $f\colon X \to Y$ непрекидна функција. Тада је f равномерно непрекидна.
Доказ Доказ је исти као у реалном случају, па пролазимо само кроз основне црте. Претпоставимо супротно, да постоји ε такво да за свако δ постоје x_1, x_2 такви да је $d(x_1, x_2) < \delta$ и $d(f(x_1), f(x_2)) \geqslant \varepsilon$. Уколико бирамо $\delta = 1/n$ имамо низове x_1^n и x_2^n за које важи претходно. Како је X компактан, то низ x_1^n има конвергентан подниз $x_1^{n_k} \to x$ а како је $d(x_1^{n_k}, x_2^{n_k}) < 1/n$, то и $x_2^{n_k}$ конвергира ка x, али то је контрадикција са непрекидношћу f у x.

Повезаност

Уколико се сада вратимо на Коши - Болцанову Теорему, видимо да је за њену формулацију битно да домен функције нема прекид, прецизније да ако садржи две тачке, садржи и све тачке између њих. Својство које је иза тога називамо повезаност. Прецизније
Дефиниција За метрички простор X кажемо да је нповезан уколико постоје непразни, дисјунктни отворени скупови $U, V \subset X$, такви да је $U \cup V = X$. Уколико такви скупови не постоје, за простор X кажемо да је повезан.
Уколико постоје скупови U и V из дефиниције неповезаности, кажемо још и да они чине дисконексију простора X.
Примери:
1. Приметимо да уколико имамо $A \subset \mathbb{R}$ такав да постоје $x, y \in A$ и $a \notin A$ за које је $x < a < y$, тада A није повезан. Заиста, скупови $U = (-\infty, a) \cap A$ и $V = (a, +\infty) \cap A$ су непразни (једном припада барем x другом барем y), отворени (јер је $(-\infty, a)$ отворен у $\mathbb{R}$, одакле је $(-\infty, a) \cap A$ отворен у A и слично за V), дисјунктни и у унији чине цео скуп A. Одавде видимо да је подскуп A од $\mathbb{R}$ повезан ако и само ако важи $x, y \in A \Rightarrow [x, y] \subset A$, а може се показати да су једини скупови који то задовољавају интервали (отворени, затворени и полуотворени са обе стране), што ћемо надаље узети да је познато.
2. Приметимо да је било који простор са дискретном метриком неповезан (уколико садржи барем две тачке). То следи из претходно примећеног да су у њему тачке и отворени и затворени скупови. Специјално, скуп $D = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ са уобичајеном метриком није повезан.
Повезаност може еквивалентно да се реформулише на неколико начина, прецизније важи
Став Следећа својства метричког простора су еквивалентна:
1. X је повезан.
2. X не може да се представи као унија два дисјунктна непразна затворена подскупа.
3. $\emptyset$ и X су једини истовремено отворени и затворени подскупови од X.
4. Не постоји непрекидно сурјективно пресликавање $f\colon X \to D$, где је D метрички простор из претходног примера.
Својства 1-3 се директно проверавају. Уколико скупови U и V чине дисконексију, како су дисјунктни и унија им је цео простор, то мора бити $U^c = V$ и $V^c = U$. Одатле су они и затворени, одакле имамо еквиваленцију 1 и 2. Даље ако постоји скуп који је отворен и затворен истовремено, тада је и његов комплемент отворен и затворен истовремено, те опет они чине дисконексију. За више детаља, као и еквиваленцију 4. са осталима, погледати књигу.
Још један природан начин дефинисања повезаности је следећи.
Дефиниција За метрички простор X кажемо да је путно повезан уколико за сваке две тачке $x, y \in X$ постоји непрекидно пресликавање $\gamma\colon [0, 1] \to X$, такво да је $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$.
Важи импликација да је сваки путно повезан простор уједно и повезан. Доказ, се може погледати у књизи. Обрнуто не мора да важи, али у већини разумних простора јесте тачно да ако је X повезан тада је и путно повезан. Нама од важности је да је то тачно за отворене подскупове од $\mathbb{R}^n$, што нећемо доказивати.
Непрекидна пресликавања чувају повезаност скупова, што је и иначе најбитније за доказ да путна повезаност повлачи обичну повезаност. Прецизније важи
Теорема Нека је $f\colon X \to Y$ непрекидна функција и X повезан простор. Тада је и $f(X)$ повезан.
Доказ се своди на то да уколико имамо дисконексију скупа $f(X)$, тада ће инверзне слике скупова који чине дисконексију чинити дисконексију од X. Детаљи се наравно могу наћи у књизи.
Претходна Теорема представља неку аналогију Коши Болцанове Теореме. Заправо комбинујући претходну теорему са одговарајућим својством компактности добијамо
Став Нека је X компактан и повезан метрички простор и $f\colon X \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је $f(X) = [m, M]$, где је m минимум а M максимум функције f.

Заиста, како је X повезан, то је и $f(X)$ повезан а одатле мора да буде интервал. Даље, $f(X)$ је компактан, а једини компактни интервали су сегменти $[a, b]$. Одатле и следи закључак.