

Značajne tačke trougla

Projekat iz Obrazovnog softvera

Stefan Mišković
Matematički fakultet, Beograd

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Osnovni pojmovi	2
2.1	Težišna duž	2
2.2	Visina trougla	2
2.3	Simetrala stranice	3
2.4	Simetrala ugla	3
3	Težište trougla	3
4	Ortocentar trougla	5
5	Centar opisane kružnice	6
6	Centar upisane kružnice	6
7	Veze između značajnih tačaka	7
7.1	Jednakokraki i jednakostranični trougao	7
7.2	Ojlerova prava	8
7.3	Kružnica devet tačaka	8
8	Zadaci	9
9	Zaključak	12

1 Uvod

Trougao je jedna od osnovnih geometrijskih figura, ali se u njegovoj naizgled jednostavnoj strukturi krije veliki broj zanimljivih osobina. Pored stranica i uglova, u trouglu se mogu posmatrati različite duži i prave određene njegovim temenima i stranicama. Njihovim konstruisanjem dolazi se do nekoliko tačaka koje imaju posebnu ulogu u geometriji trougla i koje se zato nazivaju značajnim tačkama trougla.

U ovom radu biće razmotrene četiri najpoznatije značajne tačke: težište, ortocentar, centar opisane kružnice i centar upisane kružnice. Svaka od njih nastaje na drugačiji način i ima svoje karakteristične osobine. Njihovo proučavanje omogućava da se bolje uoče veze između različitih elemenata trougla, ali i da se jednostavnije rešavaju brojni geometrijski problemi.

Najpre ćemo uvesti osnovne pojmove koji su potrebni za konstrukciju ovih tačaka, a zatim ćemo svaku od njih detaljnije razmotriti. Videćemo i kako njihov položaj zavisi od oblika trougla, šta se posebno događa kod jednakokrakog i jednakostraničnog trougla i kakve veze postoje između pojedinih značajnih tačaka. Na kraju će biti dati zadaci različite težine sa detaljnim rešenjima, u kojima će se primenjivati osobine obrađene u prethodnim delovima rada.

2 Osnovni pojmovi

Pre nego što pređemo na značajne tačke trougla, podsetićemo se nekoliko osnovnih pojmova koji će nam biti potrebni u nastavku. Posmatraćemo težišnu duž, visinu, simetralu stranice i simetralu ugla, a zatim ćemo pomoću njihovih osobina postepeno doći do značajnih tačaka trougla.

Neka je dat trougao ABC . Njegove stranice označavaćemo na uobičajen način sa $a = BC$, $b = CA$ i $c = AB$.

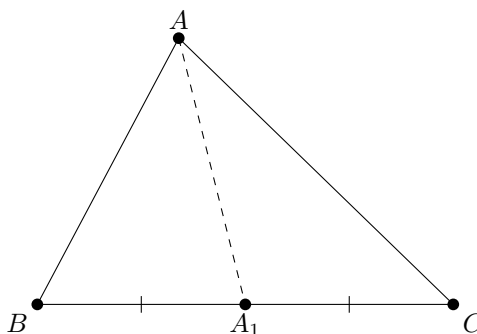
2.1 Težišna duž

Neka je A_1 središte stranice BC . Duž AA_1 , koja spaja teme A sa središtem njemu naspramne stranice, naziva se *težišna duž* koja odgovara temenu A . Njenu dužinu označavamo sa t_a .

Pošto je A_1 središte stranice BC , važi

$$BA_1 = A_1C.$$

Težišna duž AA_1 prikazana je na slici 1.



Slika 1: Težišna duž AA_1 trougla ABC

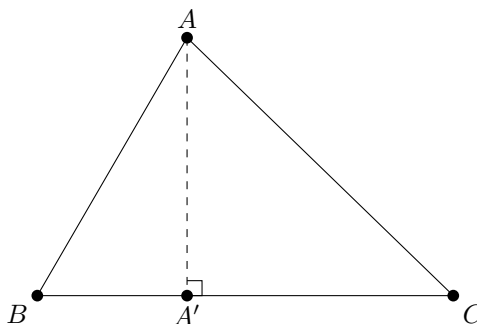
Na isti način određuju se težišne duži iz temena B i C . Svaki trougao ima tri težišne duži, a u narednoj sekciji videćemo da se one seku u jednoj tački.

2.2 Visina trougla

Iz temena A povucimo normalu na pravu BC . Ako je A' podnožje te normale, duž AA' naziva se *visina trougla* koja odgovara stranici a . Njenu dužinu označavamo sa h_a . Važi

$$AA' \perp BC.$$

Visina AA' prikazana je na slici 2.



Slika 2: Visina AA' trougla ABC

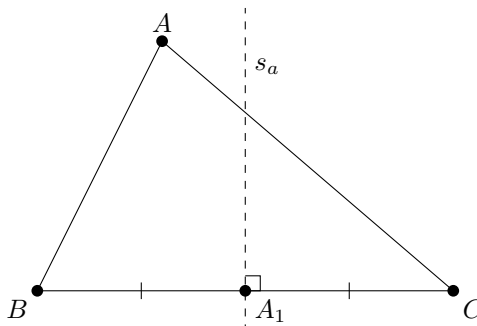
Svaki trougao ima tri visine. Kod oštroglog trougla podnožja svih visina nalaze se na njegovim stranicama. Kod pravouglog trougla dve visine poklapaju se sa katetama. Kod tupouglog trougla podnožja dve visine nalaze se na produžecima odgovarajućih stranica. Ove razlike biće važne kada budemo posmatrali položaj ortocentra.

2.3 Simetrala stranice

Simetrala stranice trougla je prava koja prolazi kroz središte te stranice i normalna je na nju. Simetralu stranice $a = BC$ označavaćemo sa s_a . Ona prolazi kroz tačku A_1 i važi

$$s_a \perp BC.$$

Simetrala stranice a prikazana je na slici 3.



Slika 3: Simetrala stranice a trougla ABC

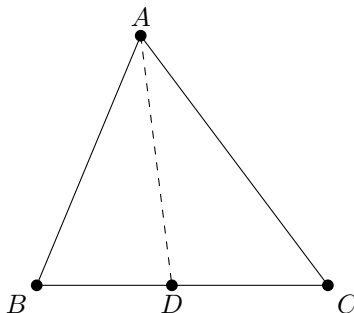
Svaka tačka simetrane duži jednako je udaljena od njenih krajeva. Zato je svaka tačka prave s_a jednako udaljena od temena B i C . Ovo svojstvo će nam kasnije omogućiti da jednostavno odredimo centar opisane kružnice.

2.4 Simetrala ugla

Simetrala ugla je poluprava koja polazi iz njegovog temena i deli ugao na dva jednaka dela. Neka simetrala ugla kod temena A trougla ABC seče stranicu BC u tački D . Tada važi

$$\angle BAD = \angle DAC.$$

Jedna takva simetrala prikazana je na slici 4.



Slika 4: Simetrala ugla $\angle BAC$ trougla ABC

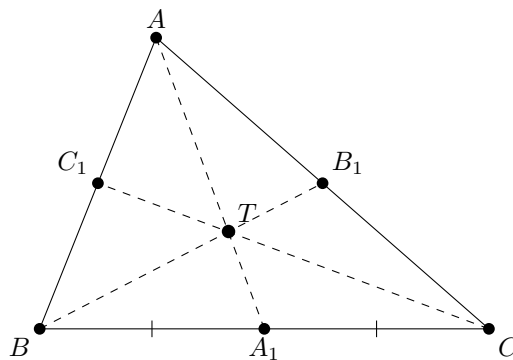
Svaka tačka simetrane ugla jednako je udaljena od pravih koje sadrže njegove krake. Kada ovo svojstvo primenimo na unutrašnje uglove trougla, dobićemo tačku koja je jednako udaljena od sve tri njegove stranice.

Težišne duži, visine i simetrane koje smo ovde opisali biće nam potrebne u nastavku. Prvo ćemo razmotriti težište trougla i osobine koje proizlaze iz preseka njegovih težišnih duži.

3 Težište trougla

U prethodnoj sekciji videli smo da svaki trougao ima tri težišne duži. Ako su A_1 , B_1 i C_1 redom središta stranica BC , CA i AB , onda su AA_1 , BB_1 i CC_1 težišne duži trougla ABC . Ove tri duži seku se u jednoj tački, koja se naziva *težište trougla* i označava se sa T .

Težište trougla prikazano je na slici 5. Ono se uvek nalazi u unutrašnjosti trougla.



Slika 5: Težište T trougla ABC

Pored toga što se sve tri težišne duži seku u istoj tački, težište ima još jedno važno svojstvo. Ono svaku težišnu duž deli u odnosu $2 : 1$, pri čemu je duži deo uvek bliži temenu trougla. Tako za težišnu duž AA_1 važi

$$AT : TA_1 = 2 : 1.$$

Analogno tome važi

$$BT : TB_1 = 2 : 1$$

i

$$CT : TC_1 = 2 : 1.$$

Ako je dužina težišne duži AA_1 jednaka t_a , iz ovog odnosa odmah dobijamo

$$AT = \frac{2}{3}t_a$$

i

$$TA_1 = \frac{1}{3}t_a.$$

Iste veze važe i za preostale dve težišne duži.

Položaj težišta može se jednostavno opisati i pomoću koordinata. Neka su koordinate temena trougla $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ i $C(x_C, y_C)$. Tada su koordinate težišta jednake aritmetičkim sredinama odgovarajućih koordinata temena, pa je

$$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Ova formula može se dobiti upravo iz osobine da težište deli svaku težišnu duž u odnosu $2 : 1$. Na primer, središte stranice BC ima koordinate

$$A_1\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right).$$

Pošto se T nalazi na duži AA_1 i važi $AT : TA_1 = 2 : 1$, njegove koordinate dobijaju se kada se od temena A pređe dve trećine puta ka tački A_1 . Na taj način ponovo se dobija prethodna formula. Isti rezultat dobija se polazeći od bilo koje od preostale dve težišne duži, što potvrđuje da sve tri prolaze kroz istu tačku.

Težišne duži dele trougao i na oblasti jednakih površina. Svaka težišna duž deli trougao na dva trougla jednakih površina, pošto oni imaju jednake osnovice i zajedničku visinu. Kada se nacrtaju sve tri težišne duži, trougao se deli na šest manjih trouglova jednakih površina. Zato je površina svakog od njih jednaka šestini površine početnog trougla.

Naziv težište potiče i od njegovog fizičkog značenja. Kada bismo trougao posmatrali kao homogenu tanku ploču, odnosno ploču ravnomerne gustine, njegova tačka ravnoteže nalazila bi se upravo u težištu. Zbog toga se težište može posmatrati kao geometrijski centar mase trougaone površine [2].

Težište je, dakle, uvek unutrašnja tačka trougla, pripada svim trima težišnim dužima i svaku od njih deli u odnosu $2 : 1$. Ova svojstva korišćemo kasnije kada budemo posmatrali veze između različitih značajnih tačaka trougla.

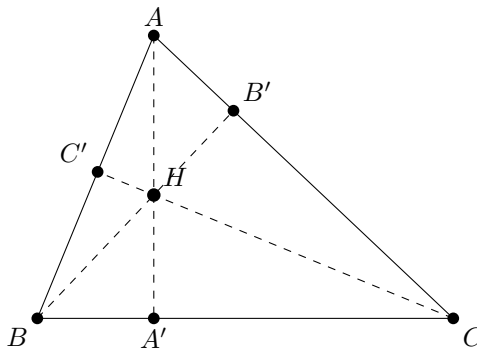
4 Ortocentar trougla

U prethodnoj sekciji videli smo da težišne duži svakog trougla prolaze kroz jednu zajedničku tačku. Slično svojstvo imaju i visine. Prave koje sadrže tri visine trougla seku se u jednoj tački, koja se naziva *ortocentar trougla* i označava se sa H .

Neka su A' , B' i C' podnožja visina iz temena A , B i C . Tada važi

$$AA' \perp BC, \quad BB' \perp CA, \quad CC' \perp AB,$$

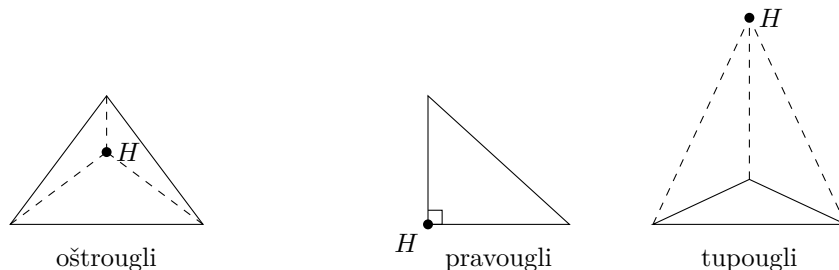
a sve tri prave AA' , BB' i CC' prolaze kroz ortocentar H . Ova situacija prikazana je na slici 6.



Slika 6: Ortocentar H oštroglog trougla ABC

Za razliku od težišta, koje se uvek nalazi u unutrašnjosti trougla, položaj ortocentra zavisi od njegovih uglova. Kod oštroglog trougla sve tri visine seku naspramne stranice, pa se ortocentar nalazi u unutrašnjosti trougla. Kod pravouglog trougla dve visine poklapaju se sa katetama, zbog čega je ortocentar upravo teme pravog ugla. Kod tupouglog trougla dve visine padaju na produžetke naspramnih stranica, pa se njihov presek nalazi izvan trougla.

Ova tri slučaja prikazana su na slici 7.



Slika 7: Položaj ortocentra kod različitih vrsta trouglova

Posebno je jednostavan slučaj pravouglog trougla. Ako je $\angle A = 90^\circ$, tada je $AB \perp AC$. Stranica AB zato istovremeno predstavlja visinu iz temena B , dok je AC visina iz temena C . Ove dve visine seku se u tački A , pa je $H = A$.

Ako trougao nije pravougli, ortocentar ima i zanimljivu vezu sa trouglovima koje možemo dobiti kada jednu njegovu tačku zamenimo tačkom H . Ako je H ortocentar trougla ABC , tada je, na primer, A ortocentar trougla BCH . Zaista, iz

$$AH \perp BC, \quad BH \perp AC, \quad CH \perp AB$$

vidimo da su prave AH , BA i CA visine trougla BCH , a sve prolaze kroz tačku A . Na isti način može se pokazati da je svaka od tačaka A , B , C i H ortocentar trougla određenog preostalim trima tačkama [4].

Podnožja visina A' , B' i C' takođe će nam biti važna u nastavku. Kod oštroglog trougla ona se nalaze na njegovim stranicama i određuju jedan novi trougao. Ovim tačkama vrtićemo se kasnije kada budemo razmatrali kružnicu devet tačaka.

Ortocentar je, dakle, određen visinama trougla, ali se, za razliku od težišta, ne mora nalaziti u njegovoj unutrašnjosti. Njegov položaj neposredno zavisi od toga da li je trougao oštrogli, pravougli ili tupougli. U narednoj sekciji razmotrićemo centar opisane kružnice, čiji se položaj takođe menja u zavisnosti od vrste trougla.

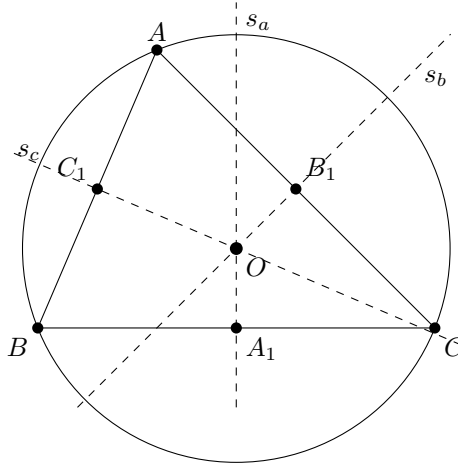
5 Centar opisane kružnice

U prethodnoj sekciji videli smo da se visine trougla seku u ortocentru. Sada ćemo posmatrati simetrale njegovih stranica. Tri simetrale stranica svakog trougla seku se u jednoj tački. Ta tačka naziva se *centar opisane kružnice* i označava se sa O .

Neka su s_a , s_b i s_c simetrale stranica a , b i c . Njihova zajednička tačka O prikazana je na slici 8. Pošto je svaka tačka simetrale duži jednako udaljena od njenih krajeva, iz $O \in s_a$ sledi $OB = OC$, a iz $O \in s_b$ sledi $OC = OA$. Zato važi

$$OA = OB = OC.$$

Zajedničku dužinu ovih duži označavamo sa R . Kružnica sa centrom u tački O i poluprečnikom R prolazi kroz sva tri temena trougla i naziva se *opisana kružnica trougla*.



Slika 8: Centar O i opisana kružnica trougla ABC

Za određivanje tačke O dovoljno je posmatrati simetrale dve stranice. Njihov presek jednako je udaljen od sva tri temena, pa pripada i simetrali treće stranice. Na taj način ujedno vidimo da se oko svakog trougla može opisati tačno jedna kružnica.

Kao i kod ortocentra, položaj centra opisane kružnice zavisi od vrste trougla. Kod oštroglog trougla tačka O nalazi se u njegovoj unutrašnjosti. Kod pravouglog trougla nalazi se na hipotenuzi, tačno u njenom središtu, dok se kod tupouglog trougla nalazi izvan trougla.

Posebno je važan slučaj pravouglog trougla. Ako je $\angle A = 90^\circ$, tada je stranica $a = BC$ hipotenuza. Ona je ujedno prečnik opisane kružnice, pa je njen centar središte hipotenuze. Po oznakama koje smo ranije uveli to je tačka A_1 . Zato u ovom slučaju važi $O = A_1$ i

$$R = \frac{a}{2}.$$

Centar opisane kružnice je, prema tome, jedina tačka ravni koja je jednako udaljena od sva tri temena trougla. Njegov položaj zavisi od uglova trougla, ali opisana kružnica postoji za svaki trougao i uvek prolazi kroz sva tri njegova temena. U narednoj sekciji razmotrićemo centar upisane kružnice, koji je povezan sa simetralama unutrašnjih uglova trougla.

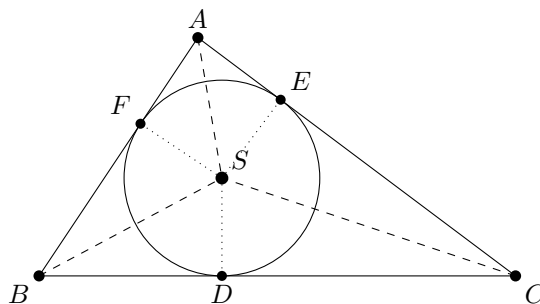
6 Centar upisane kružnice

U prethodnim sekcijama videli smo da se težišne duži, visine i simetrale stranica trougla seku u po jednoj zajedničkoj tački. Isto važi i za simetrale njegovih unutrašnjih uglova. Njihova zajednička tačka naziva se *centar upisane kružnice* i označava se sa S .

Pošto tačka S pripada simetrali svakog unutrašnjeg ugla, jednako je udaljena od pravih koje sadrže stranice trougla. Ako su D , E i F podnožja normala iz tačke S na stranice BC , CA i AB , tada važi

$$SD = SE = SF.$$

Zajedničku dužinu ovih duži označavamo sa r . Kružnica sa centrom u tački S i poluprečnikom r dodiruje sve tri stranice trougla i naziva se *upisana kružnica trougla*. Centar i upisana kružnica prikazani su na slici 9.



Slika 9: Centar S i upisana kružnica trougla ABC

Centar upisane kružnice uvek se nalazi u unutrašnjosti trougla. To sledi iz činjenice da se simetrale unutrašnjih uglova nalaze unutar njih i seku se u zajedničkoj tački. Za razliku od ortocentra i centra opisane kružnice, njegov položaj zato ne može preći na stranice ili izvan trougla kada se oblik trougla menja.

Tačke D , E i F su tačke dodira upisane kružnice sa stranicama trougla. Poluprečnici povučeni do tačaka dodira normalni su na odgovarajuće stranice, pa važi

$$SD \perp BC, \quad SE \perp CA, \quad SF \perp AB.$$

Iz ovih osobina može se dobiti i korisna veza između poluprečnika upisane kružnice i površine trougla. Duži SA , SB i SC dele trougao ABC na tri manja trougla. Svaki od njih ima visinu r u odnosu na odgovarajuću stranicu. Ako površinu trougla označimo sa P , tada je

$$P = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = r \frac{a+b+c}{2}.$$

Ako sa s označimo poluobim trougla, odnosno

$$s = \frac{a+b+c}{2},$$

dobijamo

$$P = rs.$$

Centar upisane kružnice je, dakle, jedina tačka u unutrašnjosti trougla koja je jednako udaljena od sve tri njegove stranice. Upravo ta osobina omogućava da se u svaki trougao upiše tačno jedna kružnica. U narednoj sekciji upoređićemo položaje značajnih tačaka i razmotriti veze koje među njima postoje.

7 Veze između značajnih tačaka

Do sada smo težište, ortocentar, centar opisane i centar upisane kružnice posmatrali odvojeno. Kada ih posmatramo zajedno, vidi se da njihov raspored zavisi od oblika trougla i da između nekih od njih postoje posebne veze.

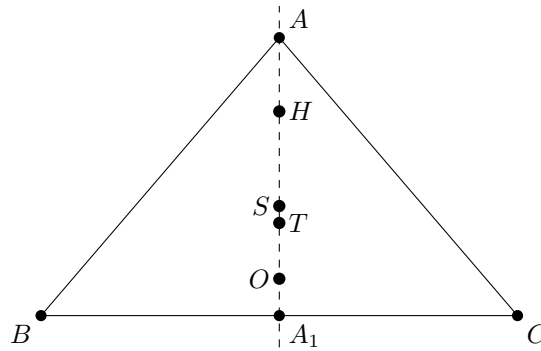
Težište T i centar upisane kružnice S uvek se nalaze u unutrašnjosti trougla. Ako je trougao oštrogli, u njegovoj unutrašnjosti nalaze se i ortocentar H i centar opisane kružnice O . Kod pravouglog trougla ortocentar je teme pravog ugla, a centar opisane kružnice je središte hipotenuze. Kod tupouglog trougla i H i O nalaze se izvan trougla. Kod jednakokrakog i jednakostraničnog trougla raspored ovih tačaka postaje još jednostavniji.

7.1 Jednakokraki i jednakostranični trougao

Neka je trougao ABC jednakokraki i neka važi $AB = AC$. Ako je A_1 središte osnovice BC , duž AA_1 istovremeno je težišna duž i visina, poluprava AA_1 je simetrala ugla kod temena A , dok je prava AA_1 simetrala stranice BC . Zato se težište T , ortocentar H , centar opisane kružnice O i centar upisane kružnice S nalaze na istoj pravoj. Ova situacija prikazana je na slici 10.

Kod jednakostraničnog trougla svaka težišna duž istovremeno je i visina, odgovarajuća poluprava je simetrala ugla, dok prava koja sadrži težišnu duž predstavlja simetralu naspramne stranice. Zbog toga se sve četiri značajne tačke poklapaju, pa važi

$$T = H = O = S.$$



Slika 10: Značajne tačke jednakokrakog trougla na osi simetrije

7.2 Ojlerova prava

Između težišta, ortocentra i centra opisane kružnice postoji veza koja važi za svaki trougao. Ako trougao nije jednakokrak, tačke O , T i H nalaze se na istoj pravoj, koja se naziva *Ojlerova prava*.

Težište T nalazi se između tačaka O i H i deli duž OH tako da važi

$$OT : TH = 1 : 2.$$

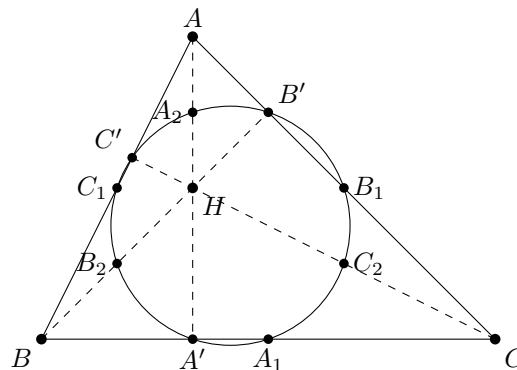
Drugim rečima, rastojanje od težišta do ortocentra dva puta je veće od rastojanja od centra opisane kružnice do težišta [3].

Kod jednakokrakog trougla koji nije jednakokrak Ojlerova prava poklapa se sa osom simetrije, pa se u tom slučaju na istoj pravoj nalazi i centar upisane kružnice S . Kod jednakokrakog trougla tačke O , T i H se poklapaju, pa Ojlerova prava nije jednoznačno određena.

7.3 Kružnica devet tačaka

Sa prethodno razmatranim elementima trougla povezana je i jedna poznata kružnica. Posmatrajmo središta stranica A_1 , B_1 i C_1 , podnožja visina A' , B' i C' , kao i središta duži AH , BH i CH . Ova poslednja tri središta označićemo redom sa A_2 , B_2 i C_2 . Svih devet tačaka pripada jednoj kružnici, koja se naziva *kružnica devet tačaka* [5]. Kod posebnih trouglova neke od ovih tačaka mogu se poklopiti, ali kružnica i tada postoji.

Na slici 11 prikazane su ove tri grupe tačaka. Isprekidanim linijama prikazane su visine trougla, pa se na istom crtežu vide i njihova podnožja i ortocentar H .



Slika 11: Kružnica devet tačaka trougla ABC

Centar kružnice devet tačaka nalazi se na sredini duži OH . Ako trougao nije jednakokrak, ovaj centar pripada i Ojlerovoj pravoj. Poluprečnik kružnice devet tačaka jednak je polovini poluprečnika opisane kružnice [1].

Kružnica devet tačaka povezuje nekoliko elemenata trougla koje smo do sada posmatrali odvojeno. Na istoj kružnici nalaze se središta stranica, podnožja visina i središta duži koje spajaju temena sa ortocentrom. Zajedno sa Ojlerovom pravom, ona pokazuje da između značajnih tačaka i drugih elemenata trougla postoje pravilne veze koje postaju uočljive tek kada ih posmatramo zajedno.

8 Zadaci

1. U trouglu ABC težišna duž AA_1 ima dužinu 15 cm. Odrediti dužine AT i TA_1 , gde je T težište trougla.

Rešenje. Težište deli svaku težišnu duž u odnosu 2 : 1, pri čemu se duži deo nalazi uz teme trougla. Zato je $AT : TA_1 = 2 : 1$.

Ako označimo $TA_1 = x$, tada je $AT = 2x$. Pošto je $AT + TA_1 = 15$, dobijamo

$$2x + x = 15,$$

pa je $x = 5$. Prema tome, $AT = 10$ cm i $TA_1 = 5$ cm.

2. Data su temena trougla $A(-2, 1)$, $B(4, 1)$ i $C(1, 7)$. Odrediti koordinate njegovog težišta.

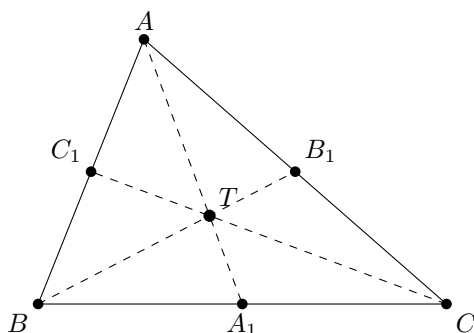
Rešenje. Koordinate težišta jednake su aritmetičkim sredinama odgovarajućih koordinata temena. Zato je

$$T\left(\frac{-2+4+1}{3}, \frac{1+1+7}{3}\right) = T(1, 3).$$

3. Površina trougla ABC jednaka je 72 cm^2 , a T je njegovo težište. Odrediti površine trouglova ABT , BCT i CAT .

Rešenje. Kao što se vidi na slici 12, tri težišne duži dele trougao ABC na šest manjih trouglova jednakih površina. Površina svakog od njih je

$$\frac{72}{6} = 12 \text{ cm}^2.$$



Slika 12: Težišne duži trougla ABC

Svaki od trouglova ABT , BCT i CAT sastoji se od po dva takva trougla. Zato je

$$P_{ABT} = P_{BCT} = P_{CAT} = 24 \text{ cm}^2.$$

4. Odrediti položaj ortocentra H i centra opisane kružnice O za trougao čiji su uglovi 50° , 60° i 70° , a zatim za trougao čiji su uglovi 110° , 30° i 40° .

Rešenje. U prvom slučaju sva tri ugla manja su od 90° , pa je trougao oštroglog. Kod oštroglog trougla i ortocentar H i centar opisane kružnice O nalaze se u njegovoj unutrašnjosti.

U drugom slučaju jedan ugao iznosi 110° , pa je trougao tupouglog. Kod tupouglog trougla i ortocentar H i centar opisane kružnice O nalaze se izvan trougla.

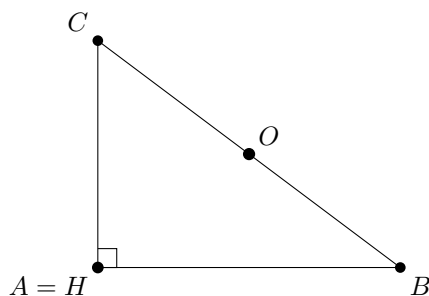
5. Trougao ABC je pravougli sa pravim uglom kod temena A , a hipotenuza BC ima dužinu 10 cm. Odrediti položaj ortocentra H , položaj centra opisane kružnice O i poluprečnik opisane kružnice.

Rešenje. Kod pravouglog trougla dve visine poklapaju se sa katetama, pa je njihov presek teme pravog ugla. Zato je $H = A$.

Centar opisane kružnice pravouglog trougla nalazi se u središtu hipotenuze, kao što je prikazano na slici 13. Zato je O središte duži BC .

Pošto je hipotenuza prečnik opisane kružnice, njen poluprečnik je

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}.$$



Slika 13: Ortocentar i centar opisane kružnice pravouglog trougla

6. Stranice trougla imaju dužine 13 cm, 14 cm i 15 cm, a njegova površina iznosi 84 cm^2 . Odrediti poluprečnik upisane kružnice.

Rešenje. Poluobim trougla je

$$s = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21 \text{ cm.}$$

Za površinu trougla važi $P = rs$, pa je

$$r = \frac{P}{s} = \frac{84}{21} = 4 \text{ cm.}$$

7. Centar opisane kružnice jednog trougla je $O(-2, 1)$, a njegov ortocentar $H(4, 7)$. Koristeći osobine Ojlerove prave odrediti koordinate težišta T .

Rešenje. Tačke O , T i H nalaze se na Ojlerovoj pravoj, a težište deli duž OH tako da je $OT : TH = 1 : 2$. Zato se T nalazi na jednoj trećini duži OH , računajući od tačke O .

Za prvu koordinatu dobijamo

$$x_T = -2 + \frac{1}{3}(4 - (-2)) = 0,$$

dok je druga koordinata

$$y_T = 1 + \frac{1}{3}(7 - 1) = 3.$$

Prema tome, težište trougla je

$$T(0, 3).$$

8. Centar opisane kružnice jednog trougla je $O(1, -2)$, ortocentar je $H(7, 4)$, a poluprečnik opisane kružnice iznosi 12 cm. Odrediti koordinate centra kružnice devet tačaka i njen poluprečnik. Navesti i tri grupe tačaka kroz koje ova kružnica prolazi.

Rešenje. Centar kružnice devet tačaka nalazi se na sredini duži OH . Njegove koordinate su zato

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{-2+4}{2} \right) = (4, 1).$$

Poluprečnik kružnice devet tačaka jednak je polovini poluprečnika opisane kružnice, pa iznosi

$$\frac{12}{2} = 6 \text{ cm.}$$

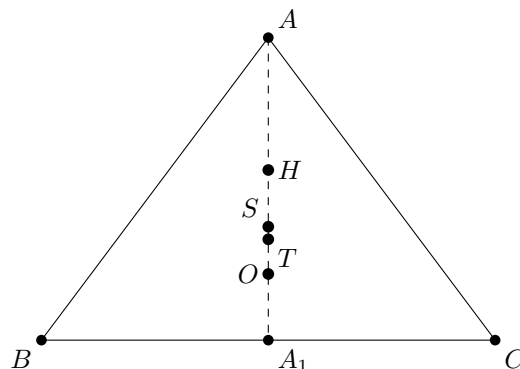
Kružnica devet tačaka prolazi kroz središta tri stranice trougla, podnožja njegove tri visine i središta duži koje spajaju temena sa ortocentrom.

9. Jednakokraki trougao ABC ima osnovicu $BC = 12 \text{ cm}$. Neka je A_1 središte osnovice i neka je $AA_1 = 8 \text{ cm}$. Odrediti rastojanja A_1O , A_1T , A_1S i A_1H .

Rešenje. Pošto je trougao jednakokraki, prava AA_1 je njegova osa simetrije i na njoj se nalaze tačke O , T , S i H (videti sliku 14).

Težište deli težišnu duž AA_1 u odnosu $2 : 1$, pa je

$$A_1T = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{8}{3} \text{ cm.}$$



Slika 14: Značajne tačke jednakokrakog trougla iz zadatka 9

Za određivanje centra upisane kružnice najpre računamo dužinu kraka. Pošto je $A_1B = 6$ cm, iz Pitagorine teoreme dobijamo

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm.}$$

Površina trougla je $P = 12 \cdot 8/2 = 48 \text{ cm}^2$, a njegov poluobim je

$$s = \frac{10 + 10 + 12}{2} = 16 \text{ cm.}$$

Iz $P = rs$ sledi $r = 3$ cm. Pošto se S nalazi na osi simetrije, a duž SA_1 je normalna na osnovicu BC , dobijamo

$$A_1S = 3 \text{ cm.}$$

Pošto je

$$12^2 < 10^2 + 10^2,$$

trougao je oštrogli, pa se centar opisane kružnice O nalazi u njegovoj unutrašnjosti. Neka je $A_1O = x$. Tada je $OA = 8 - x$. Pošto je O centar opisane kružnice, važi $OA = OB$, dok iz pravouglog trougla OA_1B dobijamo $OB^2 = x^2 + 6^2$. Zato je

$$(8 - x)^2 = x^2 + 36,$$

odakle sledi

$$A_1O = x = \frac{7}{4} \text{ cm.}$$

Na Ojlerovoj pravoj važi $OT : TH = 1 : 2$. Kako je

$$OT = A_1T - A_1O = \frac{8}{3} - \frac{7}{4} = \frac{11}{12} \text{ cm,}$$

dobijamo $TH = 11/6$ cm. Zato je

$$A_1H = A_1T + TH = \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{9}{2} \text{ cm.}$$

10. Dokazati da je trougao jednakokraničan ako se njegov ortocentar H i centar opisane kružnice O poklapaju.

Rešenje. Pretpostavimo da je $H = O$. Pošto je H ortocentar, prava AH normalna je na stranicu BC . Sa druge strane, centar opisane kružnice O pripada simetrali stranice BC , koja je takođe normalna na BC .

Pošto je $H = O$, prava AH i simetrala stranice BC prolaze kroz istu tačku i obe su normalne na BC . Zbog toga se poklapaju. Teme A zato pripada simetrali stranice BC , pa je

$$AB = AC.$$

Na isti način, posmatranjem prave BH i simetrale stranice AC , dobijamo

$$BA = BC.$$

Prema tome,

$$AB = BC = CA,$$

pa je trougao ABC jednakokraničan.

9 Zaključak

Značajne tačke trougla predstavljaju dobar primer kako se iz nekoliko jednostavnih geometrijskih pojmova mogu dobiti zanimljive i međusobno povezane osobine. Polazeći od težišnih duži, visina i simetrala, u radu smo upoznali težište, ortocentar, centar opisane kružnice i centar upisane kružnice i videli po čemu je svaka od ovih tačaka posebna.

Njihov položaj i međusobni odnosi dodatno pokazuju koliko oblik trougla utiče na njegove geometrijske osobine. Posebno jednostavne pravilnosti javljaju se kod jednakokrakog i jednakokraničnog trougla, dok Ojlerova prava i kružnica devet tačaka povezuju elemente koji na prvi pogled ne moraju delovati povezano.

Kroz zadatke su primenjene najvažnije osobine obrađenih tačaka i povezani rezultati iz različitih delova rada. Na taj način značajne tačke trougla mogu se posmatrati ne samo kao pojedinačne geometrijske konstrukcije, već kao deo jedne povezane celine koja omogućava bolje razumevanje geometrije trougla.

Literatura

- [1] Altshiller-Court, N. (1952). *College geometry: An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle* (2nd ed.). Barnes & Noble.
- [2] Beardon, A. F. (2025). The three centroids of a polygonal lamina: In memory of Nick Lord. *The Mathematical Gazette*, 109(575), 308–315. <https://doi.org/10.1017/mag.2025.10081>
- [3] Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry revisited*. Mathematical Association of America. <https://doi.org/10.5948/UP09780883859346>
- [4] Johnson, R. A. (1929). *Modern geometry: An elementary treatise on the geometry of the triangle and the circle*. Houghton Mifflin.
- [5] Venema, G. A. (2013). *Exploring advanced Euclidean geometry with GeoGebra*. Mathematical Association of America. <https://doi.org/10.5948/9781614441113>