

UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU

ZADACI ZA VEŽBE I VEŽBU

1. ISKAZNA ALGEBRA

Ostrvo Istinozboraca i Lažova je sledeći logički kontekst. Pretpostavimo da se nalazimo na ostrvu na kome žive dva plemena: pleme Istinozboraca i pleme Lažova. Svaki stanovnik ostrva nalazi se u tačno jednom od ovih plemena. Stanovnici ostrva po svemu su isti, osim što Istinozborci uvek govore istinu, a Lažovi uvek lažu.

- 1.1. Neka je a istinitosna vrednost iskaza „ A je Istinozborac”, gde je A osoba sa Ostrva Istinozboraca i Lažova. Ako je poznato da je A izjavio iskaz tačnosti p , dokazati da je $a = p$.
- 1.2. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Istinozboraca i Lažova. Poznato je da su neki od njih dali sledeće iskaze:

A : B i F su Lažovi.

B : Bar jedan od C i D je Lažov.

C : E je Lažov ili je F Istinozborac.

D : Ako je E Lažov, onda je F Istinozborac.

E : F je Lažov, a C je Istinozborac.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.3. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Istinozboraca i Lažova. Poznato je da su neki od njih dali sledeće iskaze:

A : E i F nisu iz istog plemena.

B : F i E su iz istog plemena.

C : Tačno jedan od A i E je Lažov.

D : E je Lažov, a B je Istinozborac.

E : Ili je B Lažov ili je D Istinozborac.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.4. Da li postoji iskaz koji nijedan stanovnik na Ostrvu Istinozboraca i Lažova ne može da izgovori?
- 1.5. Koje pitanje stranac na Ostrvu Istinozboraca i Lažova treba da postavi stanovniku A kako bi iz njegovog odgovora sa sigurnošću mogao da zaključi iz kog je A plemena? Stanovniku A dozvoljeno je da odgovori samo sa da ili ne.
- 1.6. Stranac na Ostrvu Istinozboraca i Lažova sreće osobe A i B i pita osobu A „Da li ste oboje Lažovi?”. Osoba A je dala jedan od odgovora da ili ne, i stranac je na osnovu toga zaključio kojim plemenima pripadaju A i B . Kojim plemenima pripadaju A i B , i šta je osoba A odgovorila?
- 1.7. Stranac na Ostrvu Istinozboraca i Lažova sreće osobe A i B i pita osobu A „Da li ste oboje Lažovi?”. Osoba A je dala jedan od odgovora da ili ne, ali stranac ne može da zaključi kojim plemenima pripadaju A i B , pa postavlja drugo pitanje osobi A „Da li ste iz istog plemena?”. Osoba A ponovo daje odgovor da ili ne. Ovoga puta stranac je zaključio kojim plemenima pripadaju A i B . Kojim plemenima pripadaju A i B , i šta je osoba A odgovorila?

Na *Ostrvu Špijuna i Lažova* žive dva plemena: Špijuni i Lažovi. Kao i ranije, svaki stanovnik je u tačno jednom od plemena, Lažovi uvek lažu, a Špijuni govore istinu kada pričaju sa osobom iz svog plemena, a lažu kada pričaju sa osobom iz drugog plemena. Osim ovih osobina, stanovnici se ni po čemu drugom ne razlikuju.

- 1.8. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Špijun.” i „ B je Špijun.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Špijuna i Lažova. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , dokazati da je $a \wedge b = p$.
- 1.9. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Špijuna i Lažova. Poznato je da su izrečeni sledeći iskazi:

A je rekao B -u: Ako je C Špijun, onda je F Lažov.
 B je rekao C -u: D je Špijun ili je A Lažov.
 C je rekao D -u: Bar jedan od F i B je Lažov.
 D je rekao E -u: Ako je A Špijun, onda je i F Špijun.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.10. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Špijuna i Lažova. Poznato je da su izrečeni sledeći iskazi:

A je rekao B -u: F je Špijun, a C je Lažov.
 B je rekao C -u: Ako je A Lažov, onda je i F Lažov.
 C je rekao D -u: B i E su iz istog plemena.
 D je rekao E -u: F je Špijun ili je C Lažov.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.11. Naći primer iskaza koji na Ostrvu Špijuna i Lažova:
- nijedan Špijun ne može da kaže (ali Lažov može);
 - nijedan Lažov ne može da kaže (ali Špijun može);
 - nijedan Špijun ne može da čuje (ali Lažov može);
 - nijedan Lažov ne može da čuje (ali Špijun može);
 - niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Istinozboraca i Špijuna* žive pleme Istinozboraca koje kao i ranije uvek govori istinu, i pleme Špijuna, koje kao i ranije govore istinu samo osobama iz svog plemena.

- 1.12. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Istinozborac.” i „ B je Istinozborac.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Istinozboraca i Špijuna. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , dokazati da je $b \rightarrow a = p$.
- 1.13. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Istinozboraca i Špijuna. Poznato je da su izrečeni sledeći iskazi:

A je rekao B -u: E je Istinozborac ili je C Špijun.
 B je rekao C -u: A je Istinozborac, a D je Špijun.
 C je rekao D -u: F i A su Špijuni.
 D je rekao E -u: Ili je A Istinozborac ili je F Špijun.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.14. Naći primer iskaza koji na Ostrvu Istinozboraca i Špijuna:
- nijedan Istinozborac ne može da kaže (ali Špijun može);
 - nijedan Špijun ne može da kaže (ali Istinozborac može);
 - nijedan Istinozborac ne može da čuje (ali Špijun može);
 - nijedan Špijun ne može da čuje (ali Istinozborac može);
 - niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Istinozboraca i Duplih agenata* žive pleme Istinozboraca, koji kao i ranije uvek govore istinu, i pleme Duplih agenata, koji govore istinu osobama koje nisu iz istog plemena, a lažu osobe iz svog plemena.

- 1.15. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Istinozborac.” i „ B je Istinozborac.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Istinozboraca i Duplih agenata. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , dokazati da je $a \vee b = p$.

- 1.16. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Istinozboraca i Duplih agenata. Poznato je da su izrečeni sledeći iskazi:

A je rekao B -u: F i D su Istinozborci.

B je rekao C -u: D i E su iz istog plemena.

C je rekao D -u: Bar jedan od F i A je Dupli agent.

D je rekao E -u: C je Istinozborac, a B je Dupli agent.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.17. Naći iskaz koji na Ostrvu Istinozboraca i Duplih agenata:

- a) nijedan Istinozborac ne može da kaže (ali Dupli agent može);
- b) nijedan Dupli agent ne može da kaže (ali Istinozborac može);
- c) nijedan Istinozborac ne može da čuje (ali Dupli agent može);
- d) nijedan Dupli agent ne može da čuje (ali Istinozborac može);
- e) niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Duplih agenata i Lažova* žive pleme Duplih agenata, koji kao i ranije govore istinu samo osobama koje nisu iz istog plemena, i pleme Lažova, koji kao i ranije uvek lažu.

- 1.18. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Dupli agent.” i „ B je Dupli agent.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Duplih agenata i Lažova. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , odrediti p u zavisnosti od a i b .

- 1.19. Naći iskaz koji na Ostrvu Duplih agenata i Lažova:

- a) nijedan Lažov ne može da kaže (ali Dupli agent može);
- b) nijedan Dupli agent ne može da kaže (ali Lažov može);
- c) nijedan Lažov ne može da čuje (ali Dupli agent može);
- d) nijedan Dupli agent ne može da čuje (ali Lažov može);
- e) niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Duplih agenata i Špijuna* žive pleme Duplih agenata, koji kao i ranije govore istinu samo osobama koje nisu iz istog plemena, i pleme Špijuna, koji kao i ranije govore istinu samo osobama iz svog plemena.

- 1.20. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Dupli agent.” i „ B je Dupli agent.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Duplih agenata i Špijuna. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , odrediti p u zavisnosti od a i b .

- 1.21. Naći iskaz koji na Ostrvu Duplih agenata i Špijuna niko ne može da kaže.

- 1.22. Da li na Ostrvu Duplih agenata i Špijuna postoji iskaz koji:

- a) Dupli agent može, a Špijun ne može da kaže;
- b) Dupli agent ne može, a Špijun može da kaže?

Na *Ostrvu Severnih i Južnih Špijuna* živi pleme Severnih Špijuna i pleme Južnih Špijuna. Svaki stanovnik govori istinu samo osobama iz svog plemena.

- 1.23. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Severni Špijun.” i „ B je Severni Špijun.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Severnih i Južnih Špijuna. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , odrediti p u zavisnosti od a i b .
- 1.24. Naći iskaz koji na Ostrvu Severnih i Južnih Špijuna:
- nijedan Severni Špijun ne može da kaže (ali Južni može);
 - nijedan Severni Špijun ne može da čuje (ali Južni može);
 - niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Severnih i Južnih Duplih agenata* živi pleme Severnih Duplih agenata i pleme Južnih Duplih agenata. Svaki stanovnik govori istinu samo osobama koje nisu iz njegovog plemena.

- 1.25. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Severni Dupli agent.” i „ B je Severni Dupli agent.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Severnih i Južnih Duplih agenata. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , odrediti p u zavisnosti od a i b .
- 1.26. Naći iskaz koji na Ostrvu Severnih i Južnih Duplih agenata:
- nijedan Severni Dupli agent ne može da kaže (ali Južni može);
 - nijedan Severni Dupli agent ne može da čuje (ali Južni može);
 - niko ne može da kaže.

2. ISKAZNE FORMULE

- 2.1. Napisati istinitosne tablice sledećih formula:

- | | |
|--|--|
| a) $(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$; | d) $(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$; |
| b) $\neg(p \wedge (q \vee r)) \wedge (r \vee p)$; | e) $(p \wedge (q \rightarrow r)) \vee ((\neg p \rightarrow q \wedge r) \wedge (\neg p \vee q))$; |
| c) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$; | f) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r))$. |

Da li su one zadovoljive, porecive, tautologije ili kontradikcije?

- 2.2. Dokazati da su sledeće formule tautologije:

- | | |
|--|---|
| a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$; | d) $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$; |
| b) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$; | e) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$; |
| c) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r)$; | f) $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$. |

- 2.3. Neka su φ i ψ iskazne formule takve da je φ zadovoljiva, ψ poreciva i $\models \varphi \rightarrow \psi$. Dokazati $\mathcal{P}(\varphi) \cap \mathcal{P}(\psi) \neq \emptyset$, tj. φ i ψ imaju bar jedno zajedničko slovo.

- 2.4. Dokazati da su sledeće formule ekvivalentne:

- | | |
|--|---|
| a) $\neg(\neg p \rightarrow q) \vee (p \wedge q) \text{ i } p \vee q \rightarrow p \wedge q$; | c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r) \text{ i } (p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg r)$; |
| b) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \text{ i } (p \wedge \neg q) \vee r$; | d) $p \leftrightarrow (q \vee r) \text{ i } p \vee (q \leftrightarrow r)$. |

- 2.5. Koristeći ekvivalentne transformacije dokazati da su sledeće formule tautologije:

- | | |
|--|--|
| a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$; | c) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$; |
| b) $(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \neg q)$; | d) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$. |

- 2.6. Odrediti neku DNF i neku KNF sledećih formula:

- | | |
|---|--|
| a) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$; | c) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$; |
| b) $(p \rightarrow q \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg p)$; | d) $p \wedge q \leftrightarrow r \vee s$. |

- 2.7. Zapisati KDNF i KKNF formule $\varphi = \varphi(p, q, r)$ (u formuli φ javljaju se slova p, q, r) ako je φ tačna samo u valuacijama u kojima su:

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| a) sva tri slova tačna; | c) samo jedno slovo tačno; |
| b) samo dva slova tačna; | d) neparno mnogo slova tačno. |

- 2.8. Odrediti sve međusobno neekvivalente formule $\varphi = \varphi(p, q, r)$ takve da je formula $\theta = (p \wedge q \leftrightarrow \varphi) \rightarrow q \wedge r$ tautologija.
- 2.9. Odrediti sve međusobno neekvivalente formule $\varphi = \varphi(p, q, r)$ takve da je formula $\theta = ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \varphi) \wedge (r \rightarrow \varphi)$ kontradikcija.
- 2.10. Koliko ima neekvivalentnih parova formula $\varphi = \varphi(p, q)$ i $\psi = \psi(p, q)$ takvih da je formula $\theta = (\varphi \rightarrow p) \vee (\psi \wedge q)$ tautologija? Ako je ψ kontradikcija, odrediti sve formule φ takve da je θ tautologija.
- 2.11. Dokazati da su sledeći skupovi potpuni:
- a) $\{\neg, \wedge\}$; d) $\{\perp, \rightarrow\}$; g) $\{\perp, \wedge, \leftrightarrow\}$; j) $\{\vee, \vee, \leftrightarrow\}$; m) $\{\downarrow\}$.
b) $\{\neg, \vee\}$; e) $\{\vee, \rightarrow\}$; h) $\{\top, \vee, \vee\}$; k) $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$;
c) $\{\neg, \rightarrow\}$; f) $\{\perp, \vee, \leftrightarrow\}$; i) $\{\top, \wedge, \vee\}$; l) $\{\mid\}$;
- 2.12. Označimo sa $\nrightarrow$ veznik dat ekvivalencijom $p \nrightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$, odnosno tablicom:

p	q	$p \nrightarrow q$
T	T	N
T	N	T
N	T	N
N	N	N

Dokazati da su sledeći skupovi potpuni:

- a) $\{\neg, \nrightarrow\}$; b) $\{\top, \nrightarrow\}$; c) $\{\rightarrow, \nrightarrow\}$; d) $\{\leftrightarrow, \nrightarrow\}$.
- 2.13. Dokazati da sledeći skupovi nisu potpuni:
- a) $\{\top, \perp, \wedge, \vee\}$; b) $\{\top, \perp, \neg, \vee, \leftrightarrow\}$; c) $\{\top, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; d) $\{\perp, \wedge, \vee, \nrightarrow, \vee\}$.
- 2.14. Neka je $\diamond$ proizvoljan binaran veznik (zadat jednom od šesnaest mogućih tablica). Ako je $\{\diamond\}$ potpun, dokazati da je $\diamond = \mid$ ili $\diamond = \downarrow$.

3. SKUPOVNE OPERACIJE

3.1. Za proizvoljne skupove A, B i C dokazati:

- a) $\emptyset \subseteq A$; c) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$;
b) $A \subseteq A$; d) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B$.

3.2. Za skupove A i B dokazati da su sledeći iskazi ekvivalentni:

- a) $A \subseteq B$; b) $A \cap B = A$; c) $A \cup B = B$; d) $A \setminus B = \emptyset$.

3.3. Po definiciji dokazati skupovne identitete:

- a) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; m) $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \setminus C)$;
b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; n) $A \setminus (B \Delta C) = (A \setminus B) \Delta (A \cap C)$;
c) $A \cap (A \cup B) = A$; o) $(A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \Delta (A \setminus B)$;
d) $A \cup (A \cap B) = A$; p) $(A \cup B) \Delta C = (A \Delta C) \Delta (B \setminus A)$;
e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; q) $(A \setminus B) \Delta C = (A \Delta C) \Delta (A \cap B)$;
f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; r) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$;
g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; s) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = A^c \setminus B$;
h) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; t) $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$;
i) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \setminus C)$; u) $(A \Delta B)^c = A^c \Delta B = A \Delta B^c$;
j) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; v) $A \Delta B = A^c \Delta B^c$;
k) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; w) $B \setminus A = A^c \cap B = A^c \setminus B^c$.
l) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;

3.4. Dokazati skupovne identitete:

- a) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

- b) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C) = (C \setminus A) \triangle (C \setminus B);$
 c) $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C) = (A \cup C) \triangle (B \cup C);$

3.5. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi.

- a) Ispitati u kom su odnosu skupovi $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup C.$
 b) Odrediti (neki jednostavan) potreban i dovoljan uslov da prethodna dva skupa budu jednaka?

3.6. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi.

- a) Dokazati $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap B) \cup C.$
 b) Gde je greška u sledećem „dokazu” obratne inkluzije?

Dokaz. Neka je $x \in (A \cap B) \cup C$ i dokažimo $x \in (A \cup B) \cap C.$ Pretpostavimo suprotno, $x \notin (A \cup B) \cap C.$ Tada $x \notin A \cup B$ i $x \notin C.$ Iz $x \in (A \cap B) \cup C$ i $x \notin C$ zaključujemo $x \in A \cap B,$ odakle $x \in A \cup B$ jer je $A \cap B \subseteq A \cup B.$ Kako smo već videli da $x \notin A \cup B,$ došli smo do kontradikcije. Dakle, $x \in (A \cup B) \cap C.$ $\square$

- c) Pod kojim uslovom će važiti $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup C?$

3.7. Neka su A, B i C proizvoljni skupovi.

- a) Dokazati $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \setminus C).$
 b) Gde je greška u sledećem „dokazu” obratne inkluzije?

Dokaz. Neka $x \in A \setminus (B \setminus C).$ Tada $x \in A$ i $x \notin B \setminus C,$ pa $x \notin B$ i $x \notin C.$ Iz $x \in A$ i $x \notin B$ imamo $x \in A \setminus B,$ pa kako i $x \notin C$ zaključujemo $x \in (A \setminus B) \setminus C.$ $\square$

- c) Pod kojim uslovom važi $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)?$

3.8. Ispitati pod kojim uslovom važi $A \triangle C = B \triangle C.$

3.9. Dokazati $(A \triangle B) \cup C \supseteq (A \cup C) \triangle (B \cup C).$ Pod kojim uslovom važi jednakost?

3.10. (Opštinsko takmičenje iz matematike za učenike srednjih škola 2021.) Neka su A i B neprazni skupovi takvi da $A \not\subseteq B$ i $B \not\subseteq A.$ Neka su skupovi X_n i $Y_n, n \geq 1,$ definisani sa:

$$X_n = \underbrace{A \setminus (B \setminus (A \setminus (B \setminus \dots)))}_{n \text{ skupova}} \text{ i } Y_n = \underbrace{A \triangle (B \triangle (A \triangle (B \triangle \dots)))}_{n \text{ skupova}}.$$

Za svako $n \geq 1$ ispitati u kom su odnosu skupovi X_n i $Y_n.$

3.11. Koristeći metod tautologije dokazati:

- a) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C);$ c) $A \cup (B \setminus C) \supseteq (A \cup B) \setminus (A \cup C);$
 b) $(A \setminus C) \triangle (B \setminus C) = (A \cup C) \triangle (B \cup C);$ d) $(A \setminus B)^c \cap C \supseteq (A \cap C)^c \setminus (B \cap C)^c.$

3.12. Svođenjem na ANF dokazati skupovne identitete:

- a) $(A \setminus B) \setminus (B \setminus C) = A \setminus B;$ c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$
 b) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A;$ d) $(A^c \cup (A^c \setminus B))^c = A.$

3.13. Svođenjem na ANF dokazati inkluzije:

- a) $A \cup (B \triangle C) \supseteq (A \cup B) \triangle (A \cup C);$ c) $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$
 b) $A \setminus (B \setminus C) \supseteq (A \setminus B) \setminus (A \setminus C);$ d) $A \setminus (B \cap C) \supseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$

3.14. Korišćenjem ANF ispitati kada važi jednakost u inkluzijama iz prethodnog zadatka.

3.15. Neka su A i B proizvoljni skupovi. Dokazati:

- a) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ i $A \in \mathcal{P}(A);$ d) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$
 b) $A \subseteq B$ akko $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B);$ e) Dokazati i da jednakost u d) važi akko $A \subseteq B$ ili $B \subseteq A.$
 c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B);$

3.16. Ako je $A \subseteq C$ i $B \subseteq D,$ dokazati $A \times B \subseteq C \times D.$

3.17. Neka je $A \times B \subseteq C \times D.$

- a) Gde je greška u sledećem „dokazu” da je $A \subseteq C?$

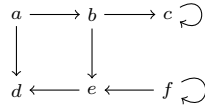
Dokaz. Neka je $a \in A$ proizvoljan element. Izaberimo $b \in B.$ Tada $(a, b) \in A \times B,$ pa kako je $A \times B \subseteq C \times D,$ zaključujemo $(a, b) \in C \times D.$ Specijalno, to znači da $a \in C.$ Dakle, $A \subseteq C.$ $\square$

- b) Pod kojim uslovom bi prethodni dokaz bio tačan?

- c) Da li važi $A \subseteq C$? Ako važi, dati dokaz, a ako ne važi, dati kontraprimer.
- 3.18. Neka su A, B, C skupovi. Dokazati identitete:
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ i $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
 - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ i $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
 - $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ i $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;
 - $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$ i $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$.
- 3.19. Neka su A, B, C, D skupovi. U kom odnosu su skupovi:
- $(A \cap B) \times (C \cap D)$ i $(A \times C) \cap (B \times D)$;
 - $(A \cup B) \times (C \cup D)$ i $(A \times C) \cup (B \times D)$;
 - $(A \setminus B) \times (C \setminus D)$ i $(A \times C) \setminus (B \times D)$;
 - $(A \triangle B) \times (C \triangle D)$ i $(A \times C) \triangle (B \times D)$?
- 3.20. Neka su A, B, C, D skupovi. Zapisati sledeće skupove kao kombinaciju skupova $A \times C, A \times D, B \times C, B \times D$ koristeći operacije $\cap, \cup, \setminus, \triangle$:
- $(A \cup B) \times (C \cup D)$;
 - $(A \setminus B) \times (C \setminus D)$;
 - $(A \triangle B) \times (C \triangle D)$;
 - $(A \cap B) \times (C \cup D)$;
 - $(A \cap B) \times (C \setminus D)$;
 - $(A \triangle B) \times (C \setminus D)$.

4. FORMULE PRVOG REDA

- 4.1. Ako sa $p(x)$ označimo predikat „ x je pas”, a sa $m(x)$ predikat „ x je mešanac” (gde je univerzum diskursa za promenljivu x npr. skup svih životinja), zapisati sledeće iskaze:
- Svi mešanci su psi.
 - Neki pas je mešanac.
 - Nijedan pas nije mešanac.
 - Neki pas nije mešanac.
 - Nisu svi psi mešanci.
 - Ne postoji pas koji nije mešanac.
- 4.2. Označimo $l(x)$: „ x laje”, $m(x)$: „ x maše repom” i $u(x)$: „ x ujeda”, gde je univerzum diskursa svih promenljivih skup svih pasa. Pročitati sledeće rečenice:
- $(\forall x) l(x)$;
 - $(\exists x) \neg u(x)$;
 - $(\forall x) \neg(m(x) \wedge l(x))$;
 - $(\exists x)(m(x) \wedge \neg u(x))$;
 - $(\exists x)(l(x) \wedge m(x))$;
 - $(\forall x)(l(x) \rightarrow \neg u(x))$.
- 4.3. Koristeći predikate $m(x)$: „ x je muško”, $r(x, y)$: „ x je roditelj od y ” i $b(x, y)$: „ x i y su u braku”, gde je univerzum diskursa svih promenljivih skup svih ljudi, zapisati simbolički sledeće predikate:
- x je otac od y ;
 - x je baba po ocu od y ;
 - x je rođeni brat od y ;
 - x je ujak od y ;
 - x je svastika od y ;
 - x je zet od y .
- Šta znače predikati dati sa:
- $\neg m(x) \wedge \neg r(x, y) \wedge (\exists z)(m(z) \wedge b(x, z) \wedge r(z, y))$;
 - $\neg m(x) \wedge (\exists z)(z \neq x \wedge r(z, y) \wedge (\exists u)(r(u, x) \wedge r(u, z)))$;
 - $x \neq y \wedge m(x) \wedge m(y) \wedge (\exists z)(\exists u)[z \neq u \wedge \neg m(z) \wedge \neg m(u) \wedge (\exists v)(r(v, z) \wedge r(v, u)) \wedge b(x, z) \wedge b(y, u)]$;
 - $\neg m(x) \wedge m(y) \wedge (\exists z)(\exists u)[z \neq x \wedge u \neq y \wedge \neg m(z) \wedge b(z, y) \wedge m(u) \wedge b(u, x) \wedge (\exists v)(r(v, z) \wedge r(v, u))]$?
- 4.4. Zapisati simbolički sledeće iskaze podrazumevajući da je univerzum diskursa svih promenljivih skup realnih brojeva:
- Svaki nenula realan broj ima multiplikativan inverz.
 - Kvadrat svakog realnog broja većeg od 1 veći je od njega samog.
 - Kvadrat svakog realnog broja iz $(0, 1)$ manji je od njega samog.
 - Svaki pozitivan realan broj je kvadrat nekog negativnog broja.
 - Jednačina $x^2 = 1$ ima i pozitivno i negativno rešenje.
- 4.5. Na jeziku $\mathcal{L} = \{p\}$, $\text{ar}(p) = 2$, data je formula $\varphi = \varphi(x)$ i model $\mathbb{M}$ predstavljen grafom:



gde je domen $M = \{a, b, c, d, e, f\}$, a predikat p^M predstavljen je strelicom, tj. $p^M(u, v)$ je tačno akko $u \rightarrow v$.
Odrediti tačnost formule φ u svim valuacijama promenljive x , gde je φ :

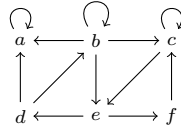
- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $p(x, x)$; | c) $(\forall y) p(y, x)$; | e) $(\exists y) \neg p(x, y)$; |
| b) $(\exists y) p(y, x)$; | d) $\neg(\exists y) p(x, y)$; | f) $(\forall y) \neg p(y, x)$. |

4.6. Izračunati vrednosti sledećih formula $\varphi = \varphi(x)$ u svim valuacijama promenljive x u modelu iz zadatka 4.5.:

- | | |
|---|---|
| a) $(\forall y)(\neg p(x, x) \rightarrow \neg p(x, y))$; | d) $(\exists y)(\exists z)(p(x, y) \wedge p(x, z))$; |
| b) $(\forall y)(p(y, x) \rightarrow p(x, x))$; | e) $(\exists y)(\exists z)(p(x, y) \wedge p(x, z) \wedge y \neq z)$; |
| c) $(\exists y)(\exists z)(p(x, y) \wedge p(y, z))$; | f) $(\exists y)(\exists z)(p(y, x) \wedge p(z, x) \wedge p(y, z))$. |

4.7. Za svaki element u modela iz zadatka 4.5. odrediti po jednu formulu $\varphi_u = \varphi_u(x)$ koja je tačna samo u valuaciji $v(x) = u$. Uraditi zadatak sa i bez korišćenja simbola jednakosti.

4.8. Dat je model jezika $\mathcal{L} = \{p\}$, $\text{ar}(p) = 2$, sledećim grafom:

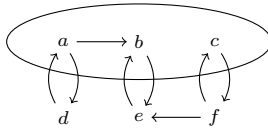


Odrediti vrednosti sledećih formula u svim valuacijama x :

- $(\exists y)(p(y, y) \wedge p(y, x))$;
- $(\exists y)(\neg p(y, y) \wedge p(x, y))$;
- $(\exists y)(\neg p(x, x) \wedge p(y, x))$;
- $(\exists y)(\exists z)(p(x, y) \wedge p(y, y) \wedge p(y, z) \wedge x \neq z)$;
- $(\exists y)(\exists z)(\exists u)(p(y, x) \wedge p(z, x) \wedge p(u, x) \wedge y \neq z \wedge z \neq u)$;
- $(\exists y)(\exists z)(\exists u)(p(y, y) \wedge p(y, z) \wedge \neg p(z, z) \wedge p(z, x))$.

4.9. Za svaki element u modela iz zadatka 4.8. odrediti po jednu formulu $\varphi_u = \varphi_u(x)$ koja je tačna samo u valuaciji $v(x) = u$. Uraditi zadatak sa i bez korišćenja simbola jednakosti.

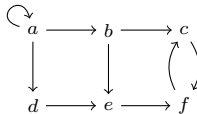
4.10. Dat je model jezika $\mathcal{L} = \{p, q\}$, $\text{ar}(p) = 2$ i $\text{ar}(q) = 1$, sledećim grafom:



gde je predikat p dat strelicama, a predikat q tačan je za zaokružene elemente. Za svaki element u datog modela odrediti formulu $\varphi_u = \varphi_u(x)$ koja je tačna samo u valuaciji $v(x) = u$.

4.11. Gde je greška u datom „rešenju” sledećeg zadatka:

Dat je model jezika $\mathcal{L} = \{p\}$, $\text{ar}(p) = 2$, sledećim grafom:



Odrediti vrednosti sledećih formula u svim valuacijama x :

- $(\exists y)(p(x, y) \wedge p(y, x))$;
- $(\exists y)(\exists z)(p(x, y) \wedge p(x, z))$;
- $(\exists y)(\exists z)(p(x, y) \wedge p(y, z) \wedge x \neq y \wedge y \neq z)$.

Rešenje. a) Formula iz a) tvrdi da je x takvo da postoji y tako da:



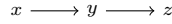
Sa grafa vidimo da je ova formula tačna u valuacijama $v(x) = c$ i $v(x) = f$, dok je u svim ostalim valuacijama netačna.

b) Formula iz b) tvrdi da je x takvo da postoje elementi y i z tako da:



Sa grafa vidimo da je formula tačna ako x uzima vrednosti a i b , dok je u ostalim valuacijama netačna.

c) Formula iz c) tvrdi da je x takvo da postoje elementi y i z tako da:



i pri tome su ovo tri različita elementa. Sa grafa vidimo da je formula tačna ako x uzima vrednosti a , b , d i e , dok je u ostalim valuacijama netačna. $\square$

4.12. Odrediti po jedan model i jedan kontramodel za sledeće formule:

- $(\exists x)((\forall y)p(x, y) \leftrightarrow (\forall y)p(y, x));$
- $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(p(x, y) \wedge p(y, z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z);$
- $(\exists x)\neg(p(x) \rightarrow q(x)) \vee (\forall x)(\neg r(x) \vee \neg p(x)) \vee (\forall x)(r(x) \wedge q(x));$
- $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge (\exists x)(q(x) \rightarrow r(x)) \rightarrow (\forall x)(p(x) \rightarrow r(x));$
- $(\forall x)(q(x) \wedge \neg(\forall y)p(x, y)) \wedge \neg(\exists x)(\forall y)(p(x, y) \rightarrow r(x)).$

4.13. Neka je φ formula u kojoj x nije slobodno. Dokazati da su sledeće formule valjane:

- $\varphi \leftrightarrow (\forall x)\varphi;$
- $\varphi \leftrightarrow (\exists x)\varphi.$

4.14. (Osnovne valjane formule) Dokazati da su sledeće formule valjane, gde su φ i ψ proizvoljne formule:

- $\neg(\forall x)\varphi \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi;$
- $\neg(\exists x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi;$
- $(\forall x)(\forall y)\varphi \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)\varphi;$
- $(\exists x)(\exists y)\varphi \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)\varphi;$
- $(\exists x)(\forall y)\varphi \rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi;$
- $(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi;$
- $(\exists x)(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi;$
- $(\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi \rightarrow (\forall x)(\varphi \vee \psi);$
- $(\exists x)(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi.$

4.15. Odrediti kontramodele za sledeće formule:

- $(\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow (\exists y)(\forall x)p(x, y);$
- $(\forall x)(q(x) \vee r(x)) \rightarrow (\forall x)q(x) \vee (\forall x)r(x);$
- $(\exists x)q(x) \wedge (\exists x)r(x) \rightarrow (\exists x)(q(x) \wedge r(x)).$

4.16. Dokazati da su sledeće formule valjane:

- $(\exists x)p(x) \wedge (\forall x)(p(x) \rightarrow q(x) \vee r(x)) \rightarrow (\exists x)q(x) \vee (\exists x)r(x);$
- $(\forall x)(p(x) \rightarrow (\forall y)q(x, y)) \wedge (\forall x)(\exists y)(q(x, y) \rightarrow \neg r(x)) \rightarrow ((\exists x)r(x) \rightarrow (\exists x)(r(x) \wedge \neg p(x)));$
- $(\forall x)(\exists y)p(x, y) \wedge (\forall x)(\forall y)(p(x, y) \rightarrow q(x, y)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)q(x, y).$

4.17. Primenom ekvivalentnih zamena dokazati:

- $(\exists x)(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\forall x)\varphi \rightarrow (\exists x)\psi;$
- $(\forall x)\varphi \rightarrow ((\forall x)\psi \rightarrow (\exists x)\theta) \equiv (\exists x)(\varphi \wedge \psi \rightarrow \theta);$
- $(\exists x)\varphi \rightarrow (\forall x)\psi \equiv (\exists x)\neg\psi \rightarrow (\forall x)\neg\varphi.$

4.18. Odrediti po jedan PNF sledećih formula:

- $(\exists x)p(x, y) \rightarrow (q(x) \rightarrow \neg(\exists y)p(x, y));$
- $(\exists x)p(x) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)q(x, y);$
- $\neg((\exists x)p(x, y) \rightarrow \neg(\forall z)((\forall u)q(u, y, z) \rightarrow \neg(\exists v)r(v))).$