

UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU

JUN 2 2025: REŠENJA

1. Odrediti broj logički neekvivalentnih formula $A(p, q, r)$ takvih da je formula:

$$\varphi := (\neg q \wedge (r \rightarrow p \wedge A)) \vee (\neg p \wedge q \wedge (\neg r \rightarrow A))$$

tačna u tačno četiri valuacije slova p, q, r . Zapisati dve takve formule.

Rešenje. Zapišimo tablicu formule φ u zavisnosti od vrednosti formule A :

p	q	r	A	$\neg q \wedge (r \rightarrow p \wedge A)$	$\neg p \wedge q \wedge (\neg r \rightarrow A)$	φ
n	n	n	a_1	$t \quad t \quad t \quad n$	$n \quad n \quad t \quad a_1$	t
n	n	t	a_2	$t \quad n \quad n \quad n$	$n \quad n \quad n \quad t$	n
n	t	n	a_3	$n \quad n \quad t \quad n$	$t \quad a_3 \quad t \quad a_3$	a_3
n	t	t	a_4	$n \quad n \quad n \quad n$	$t \quad t \quad n \quad t$	t
t	n	n	a_5	$t \quad t \quad t \quad a_5$	$n \quad n \quad t \quad a_5$	t
t	n	t	a_6	$t \quad a_6 \quad a_6 \quad a_6$	$n \quad n \quad n \quad t$	a_6
t	t	n	a_7	$n \quad n \quad t \quad a_7$	$n \quad n \quad t \quad a_7$	n
t	t	t	a_8	$n \quad n \quad a_8 \quad a_8$	$n \quad n \quad n \quad t$	n

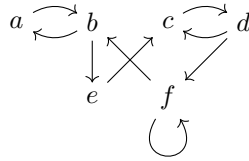
Dakle, da bi φ bila tačna u tačno četiri valuacije mora biti ili $a_3 = n$ i $a_6 = t$, ili $a_3 = t$ i $a_6 = n$; to su dve mogućnosti. Ostale vrednosti $a_1, a_2, a_4, a_5, a_7, a_8$ su proizvoljne (za njih imamo 2^6 mogućnosti), pa imamo $2 \cdot 2^6 = 128$ mogućih tablica za A , što znači da postoji 128 međusobno neekvivalentnih formula A koje zadovoljavaju uslov zadatka.

Za tražene dve formule možemo da uzmemo formule sa sledećim tablicama:

p	q	r	A	A_1	A_2
n	n	n	a_1	n	n
n	n	t	a_2	n	n
n	t	n	a_3	n	t
n	t	t	a_4	n	n
t	n	n	a_5	n	n
t	n	t	a_6	t	n
t	t	n	a_7	n	n
t	t	t	a_8	n	n

(Dakle, uzeli smo $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_7 = a_8 = n$, u prvoj formuli $a_3 = n$ i $a_6 = t$, a u drugoj $a_3 = t$ i $a_6 = n$.) Formule A_1 i A_2 možemo pročitati u KDNF: $A_1 = p \wedge \neg q \wedge r$, a $A_2 = \neg p \wedge q \wedge \neg r$. ♣

2. Na dijagramu je dat model jezika $\mathcal{L} = \{q\}$, pri čemu je q binarni relacijski simbol predstavljen strelicom. Za svaki element modela napisati formulu koja ga definiše. Upotreba simbola $=$ je dozvoljena.



Koji elementi zadovoljavaju formulu $\forall y(q(y, x) \rightarrow \neg q(x, y))$?

Rešenje. Element f jedini ima petlju, pa možemo da uzmemo:

- $\varphi_f(x) := q(x, x)$.

Jedini element koji nema petlju, a u koga ide strelica iz f je b , i, slično, jedini element koji nema petlju, a iz koga ide strelica u f je d , pa možemo da uzmemo:

- $\varphi_b(x) := \neg q(x, x) \wedge (\exists y)(\varphi_f(y) \wedge q(y, x))$, i
- $\varphi_d(x) := \neg q(x, x) \wedge (\exists y)(\varphi_f(y) \wedge q(x, y))$.

Sada je a određen kao element koji ima povratnu strelicu sa b , a c je određen kao element koji ima povratnu strelicu sa d :

- $\varphi_a(x) := (\exists y)(\varphi_b(y) \wedge q(x, y) \wedge q(y, x))$, i
- $\varphi_c(x) := (\exists y)(\varphi_d(y) \wedge q(x, y) \wedge q(y, x))$.

Konačno, e je element koji nije nijedan od prethodnih:

- $\varphi_e(x) := \neg \varphi_a(x) \wedge \neg \varphi_b(x) \wedge \neg \varphi_c(x) \wedge \neg \varphi_d(x) \wedge \neg \varphi_f(x)$.

Da bismo videli koji elementi zadovoljavaju formulu $\forall y(q(y, x) \rightarrow \neg q(x, y))$ prođemo malo o njoj. Dakle, x bi trebalo da bude element za koji važi sledeća osobina: kadgod iz nekog element ide strelica u x , ne sme da postoji povratna strelica. Dakle, primera radi, a ne zadovoljava ovu osobinu: iz b ide strelica u a , ali se i iz a strelica vraća u b . Slično, b , c i d ne zadovoljavaju željenu osobinu. Element f takođe ne zadovoljava željenu osobinu jer je petlja sama sebi povratna strelica. Konačno, element e ima željenu osobinu: jedina strelica koja ulazi u e je iz b , ali iz e -a nema povratne strelice ka b . Dakle, odgovor je: jedino e zadovoljava datu formulu. ♣

3. U prirodnoj dedukciji dokazati sekvente:

a) $\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$;

b) $\forall x(p(x) \rightarrow q(x)), \exists x((r(x) \rightarrow q(x)) \vee p(x)) \vdash \forall x r(x) \rightarrow \exists x q(x)$.

Rešenje. a) Dokažimo dve leme $L1 : \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi$ i $L2 : \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \neg\psi$:

1	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	premise	1	$\neg(\varphi \rightarrow \psi)$	premise
2	$\neg\varphi$	pp	2	ψ	pp
3	φ	pp	3	φ	pp
4	$\perp$	$\neg_E(2,3)$	4	ψ	R(2)
5	ψ	EFQ(4)	5	$\varphi \rightarrow \psi$	D(3-4)
6	$\varphi \rightarrow \psi$	D(3-5)	6	$\perp$	$\neg_E(1,5)$
7	$\perp$	$\neg_E(1,6)$	7	$\neg\psi$	$\neg_U(2-6)$
8	ϕ	RAA(2-7)			

Sada je jedan mogući dokaz našeg sekventa:

1	$p \wedge q \rightarrow r$	pp
2	$\neg((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$	pp
3	$\neg(p \rightarrow r) \wedge \neg(q \rightarrow r)$	DM(2)
4	$\neg(p \rightarrow r)$	$\wedge_E(3)$
5	$\neg(q \rightarrow r)$	$\wedge_E(3)$
6	p	L1(4)
7	$\neg r$	L2(4)
8	q	L1(5)
9	$p \wedge q$	$\wedge_U(6,8)$
10	r	MP(1,9)
11	$\perp$	$\neg_E(7,10)$
12	$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$	RAA(2-11)
13	$(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$	D(1-12)

b) Jedan mogući dokaz je:

1	$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$	premisa
2	$\exists x((r(x) \rightarrow q(x)) \vee p(x))$	premisa
3	$\forall x r(x)$	pp
4	$\boxed{a}$	nova promenljiva
5	$(r(a) \rightarrow q(a)) \vee p(a)$	pp
6	$p(a) \rightarrow q(a)$	I(1)
7	$r(a)$	I(3)
8	$r(a) \rightarrow q(a)$	pp
9	$q(a)$	MP(7,8)
10	$p(a)$	pp
11	$q(a)$	MP(6,10)
12	$q(a)$	$\vee_E(5,8-9,10-11)$
13	$\exists x q(x)$	$\exists_U(12)$
14	$((r(a) \rightarrow q(a)) \vee p(a)) \rightarrow \exists x q(x)$	D(5-13)
15	$\forall x ((r(x) \rightarrow q(x)) \vee p(x)) \rightarrow \exists x q(x)$	G(4-14)
16	$\exists x r(x)$	$\exists_E(2,15)$
17	$\forall x r(x) \rightarrow \exists x q(x)$	D(3-16)

ili drugačije zapisano:

1	$\forall x(p(x) \rightarrow q(x))$	premisa
2	$\exists x((r(x) \rightarrow q(x)) \vee p(x))$	premisa
3	$\forall x r(x)$	pp
4	$\boxed{a} (r(a) \rightarrow q(a)) \vee p(a)$	pp
5	$p(a) \rightarrow q(a)$	I(1)
6	$r(a)$	I(3)
7	$r(a) \rightarrow q(a)$	pp
8	$q(a)$	MP(6,7)
9	$p(a)$	pp
10	$q(a)$	MP(5,9)
11	$q(a)$	$\vee_E(4,7-8,9-10)$
12	$\exists x q(x)$	$\exists_U(11)$
13	$\exists x q(x)$	$\exists_E(2,4-12)$
14	$\forall x r(x) \rightarrow \exists x q(x)$	D(3-13)

Komentar. Prethodna dva izvođenja su različiti zapisi istog dokaza. Razlika proizilazi iz načina na koji je iskazano pravilo $\exists_E$. ♣

4. Neka je $f : X \rightarrow Y$. Dokazati da je f „na” ako i samo ako za sve $A \subseteq Y$ važi $f[X \setminus f^{-1}[A]] = Y \setminus A$.

Rešenje. $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo da je f „na”. Neka je $A \subseteq Y$ proizvoljan podskup, i dokažimo $f[X \setminus f^{-1}[A]] = Y \setminus A$.

$(\subseteq)$ Neka $y \in f[X \setminus f^{-1}[A]]$. To znači da je $y = f(x)$ za neko $x \in X \setminus f^{-1}[A]$. Iz $x \notin f^{-1}[A]$ sledi $f(x) \notin A$, pa $y = f(x) \in Y \setminus A$.

$(\supseteq)$ Neka $y \in Y \setminus A$. Kako je f „na”, postoji $x \in X$ tako da $f(x) = y$. Iz $f(x) = y \notin A$ sledi $x \notin f^{-1}[A]$, pa $x \in X \setminus f^{-1}[A]$, odakle $y = f(x) \in f[X \setminus f^{-1}[A]]$.

$(\Leftarrow)$ Pretpostavimo dati uslov, i posmatrajmo specijalan slučaj za $A = \emptyset$. Za $A = \emptyset$ je i $f^{-1}[A] = \emptyset$, pa se dati uslov svodi na $f[X] = Y$, što znači da je f „na”. ♣

5. Konstruisati bijekciju između $\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2, 3\}$ i skupa $S = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \leq m\}$.

Rešenje. Postoji mnogo načina na koji možemo da postupimo, jedan od njih je da konstruišemo niz bijekcija:

$$\mathbb{Z} \times \{0, 1, 2, 3\} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{N} \xrightarrow{h} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{k} S;$$

tada je $k \circ h \circ g \circ f$ željena bijekcija. Za g i h možete uzeti vaše omiljene odgovarajuće bijekcije; primeri takvih bijekcija su dobro poznati. Za $f : \mathbb{Z} \times \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$ možemo uzeti:

$$f(m, r) := 4m + r.$$

Da bismo videli da je f 1-1, pretpostavimo $f(m, r) = f(m', r')$, tj. $4m + r = 4m' + r'$. Tada je $4(m - m') = r' - r$, odakle $4 \mid r' - r$, pa kako je $-3 \leq r' - r \leq 3$ zaključujemo $r' - r = 0$, tj. $r = r'$. Odatle je i $4(m - m') = 0$, tj. $m = m'$. Dakle, $(m, r) = (m', r')$; f jeste 1-1. Da bismo videli da je f na, uzmimo proizvoljno $n \in \mathbb{Z}$. Stavimo $m = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ i $r = n - 4m$. Tada je $0 \leq r < 4$ i $n = 4m + r = f(m, r)$; f jeste na.

Za $k : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow S$ možemo da uzmemo:

$$k(m, n) := (m + n, n).$$

Primetimo da je k dobro definisana funkcija, tj. za $m, n \in \mathbb{N}$ zaista $(m + n, n) \in S$ jer očigledno $n \leq m + n$. Da bismo videli da je k 1-1, pretpostavimo $k(m, n) = k(m', n')$, tj. $(m + n, n) = (m' + n', n')$. Tada je $m + n = m' + n'$ i $n = n'$, odakle sledi i $m = m'$. Dakle, $(m, n) = (m', n')$; k jeste 1-1. Da bismo videli da je k na, uzmimo proizvoljno $(m, n) \in S$. Tada $m, n \in \mathbb{N}$ i $n \leq m$, odakle sledi i $m - n \in \mathbb{N}$. Sada je $k(m - n, n) = (m - n + n, n) = (m, n)$; f jeste na. ♣

6. Odrediti model i kontramodel formule $\varphi := (\forall x p(x) \rightarrow \forall y \exists x q(x, y)) \rightarrow \exists x (p(x) \rightarrow \forall y q(x, y))$.

Rešenje. Model je lako uočiti: Uzmimo $D = \{a\}$ i $M = (D, p^M, q^M)$ gde smo interpretirali $p^M(a) = N$ (i $q^M(a, a)$ proizvoljno). Neka je v proizvoljna (zapravo, jedna jedina!) valuacija. Tada je $\hat{v}_{a/x}[p(x) \rightarrow \forall y q(x, y)] = T$ prosto jer je $p^M(a) = N$, pa je $\hat{v}[\exists x (p(x) \rightarrow \forall y q(x, y))] = T$, odakle je i $\hat{v}(\varphi) = T$.

Da bismo napravili kontramodel, razmotrićemo pažljivije formulu φ . Treba da namestimo model tako da je $\forall x p(x) \rightarrow \forall y \exists x q(x, y)$ tačna, a $\exists x (p(x) \rightarrow \forall y q(x, y))$ netačna formula. Razmotrimo ovaj drugi zahtev. $\exists x (p(x) \rightarrow \forall y q(x, y))$ je netačna znači da za sve elemente domena x formula $p(x) \rightarrow \forall y q(x, y)$ mora da bude netačna, tj. $p(x)$ mora da bude tačna a $\forall y q(x, y)$ netačna; specijalno, zaključujemo da $p(x)$ mora da bude uvek tačno. Kako $\forall y q(x, y)$ mora da bude uvek netačno: za svako x mora da postoji neki element y tako da je $q(x, y)$ netačno; ako posmatramo q kao tablicu istinitosnih vrednosti, ovo znači da u svakoj vrsti tablice mora da stoji bar jedno N . Pogledajmo sada levu stranu implikacije φ . Kako smo već zaključili $\forall x p(x)$ će morati da bude tačna formula, pa kako bi implikacija ostala tačna, moramo da namestimo i da je $\forall y \exists x q(x, y)$ tačna, što znači da za svako y mora da postoji x tako da je $q(x, y)$ tačna; ako posmatramo q kao tablicu, ovo znači da u svakoj koloni tablice treba da stoji bar jedno T . Sada nije teško videti da ne možemo da konstruišemo jednočlani kontramodel, ali možemo dvočlani. Neka je $D = \{a, b\}$ i $K = (D, p^K, q^K)$ gde:

x	$p^K(x)$		$q^K(x, y)$	$x \setminus y$	a	b
a	T	i		a	N	T
b	T			b	T	N

Dokažimo i formalno da je K kontramodel za φ . Neka je v proizvoljna valuacija. Kako je i $\hat{v}_{a/x}(p(x)) = T$ i $\hat{v}_{b/x}(p(x)) = T$, $\hat{v}(\forall x p(x)) = T$. Neka je $d \in D$ proizvoljno; za $e \in D$, $e \neq d$, je $\hat{v}_{d/y, e/x}(q(x, y)) = T$, pa je $\hat{v}_{d/y}(\exists x q(x, y)) = T$, odakle je $\hat{v}(\forall y \exists x q(x, y)) = T$ jer je d bilo proizvoljno. Dakle, za levu stranu implikacije φ imamo $\hat{v}[\forall x p(x) \rightarrow \forall y \exists x q(x, y)] = T$.

Pređimo na desnu stranu implikacije. Neka je $d \in D$ proizvoljno. Sa jedne strane je $\hat{v}_{d/x}(p(x)) = T$, a sa druge je $\hat{v}_{d/x}(\forall y q(x, y)) = N$ jer je $\hat{v}_{d/x, d/y}(q(x, y)) = N$. Dakle, $\hat{v}_{d/x}[p(x) \rightarrow \forall y q(x, y)] = N$, odakle je $\hat{v}[\exists x (p(x) \rightarrow \forall y q(x, y))] = N$ jer je d bilo proizvoljno.

Dakle, iz prethodna dva pasusa sledi $\hat{v}(\varphi) = N$, tj. K jeste kontramodel za φ . ♣