

UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU

JUN 1 2025: REŠENJA

1. Na Ostrvu Severnih i Južnih Špijuna slušamo razgovor osoba A, B, C, D, E i F .

A kaže B -u : Ako je E Severni Špijun, onda je i D Severni Špijun.

B kaže C -u : A je Severni Špijun ili je F Južni Špijun.

C kaže D -u : F i A su Južni Špijuni.

D kaže E -u : Tačno jedan od A i C je Severni Špijun.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici? Špijuni govore istinu pripadnicima svog plemena, dok ostale lažu.

Rešenje. Sa a označimo tačnost iskaza „ A je Severni Špijun.”; b, c, d, e, f imaju slično značenje. Ako A kaže B -u izjavu tačnosti p , onda je $p = T$ ako i samo ako $a = b$; dakle, $a \leftrightarrow b = p$. Prema tome iz datih izjava imamo sledeći sistem iskaznih jednačina:

- (1) $a \leftrightarrow b = e \rightarrow d$;
- (2) $b \leftrightarrow c = a \vee \neg f$;
- (3) $c \leftrightarrow d = \neg f \wedge \neg a$;
- (4) $d \leftrightarrow e = a \vee c$.

Prodiskutujemo po slovu a .

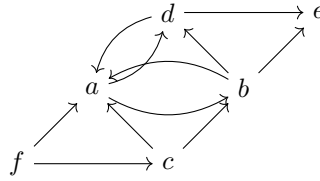
1. slučaj: $a = T$. Iz (2) sledi $b = c$, a iz (3) $c \neq d$; odatle $b \neq d$. Iz (1) je $b = e \rightarrow d$, pa imajući u vidu $b \neq d$, mora biti $d = N$ i $b = T$ (jer $d = T$ povlači $b = T$), pa je i $e = N$; sada i $c = b = T$. Ovo protivreči (4): $d \leftrightarrow e = N \leftrightarrow N = T$, dok $a \vee c = T \vee T = N$.

2. slučaj: $a = N$. Naš sistem postaje:

- (5) $\neg b = e \rightarrow d$;
- (6) $b \leftrightarrow c = \neg f$;
- (7) $c \leftrightarrow d = \neg f$;
- (8) $d \leftrightarrow e = c$.

Iz (6) i (7) sledi $b \leftrightarrow c = c \leftrightarrow d$, odakle $b = d$. Sada iz (5), imajući u vidu $b = d$, sledi $d = N$ i $b = N$ (jer $d = T$ povlači $\neg b = T$, tj. $b = N$, pa $b \neq d$), pa je i $e = N$. Iz (8) sledi $c = T$, pa iz (6) sledi $f = T$. Dobijeno rešenje je u skladu i sa (7). Dakle, $(a, b, c, d, e, f) = (N, N, T, N, N, T)$ je jedino rešenje sistema, tj. zaključujemo da su C i F Severni, a A, B, D i E Južni Špijuni. ♣

2. Na dijagramu je dat model jezika $\mathcal{L} = \{q\}$, pri čemu je q binarni relacijski simbol predstavljen strelicom. Za svaki element modela napisati formulu koja ga definiše. Upotreba simbola $=$ je dozvoljena.



Koji elementi zadovoljavaju formulu $\forall y(q(x, y) \rightarrow q(y, x))$?

Rešenje. Element f je jedini element koji nema ulazne strelice, pa je definisan sa:

- $\varphi_f(x) := \neg \exists y q(y, x)$,

dok je element e jedini element koji nema izlazne strelice, pa je definisan sa:

- $\varphi_e(x) := \neg \exists y q(x, y)$.

Posmatrajmo formulu $\varphi_c(x)$:

- $\varphi_c(x) := \exists yz(q(x, y) \wedge q(x, z) \wedge q(y, z) \wedge q(z, y))$.

Ona kaže da je x element od koga idu strelice ka elementima od kojih idu strelice od jednog ka drugom. Svedoci egzistencijalnog kvantifikatora mogu biti $\{y, z\} = \{a, b\}$ ili $\{y, z\} = \{a, d\}$. U prvom slučaju jedino može biti $x = c$, dok u drugom slučaju opisano x ne postoji. Dakle, c je jedini element koji zadovoljava $\varphi_c(x)$.

Sada a možemo da opišemo kao element u koga dolaze strelice i iz f i iz c :

- $\varphi_a(x) := \exists yz(\varphi_f(y) \wedge \varphi_c(z) \wedge q(y, x) \wedge q(z, x))$,

element b možemo da opišemo kao element u koga dolaze strelice i iz c i iz a :

- $\varphi_b(x) := \exists yz(\varphi_c(y) \wedge \varphi_a(z) \wedge q(y, x) \wedge q(z, x))$,

a element d možemo da opišemo kao element u koga dolaze strelice i iz a i iz b :

- $\varphi_d(x) := \exists yz(\varphi_a(y) \wedge \varphi_b(z) \wedge q(y, x) \wedge q(z, x))$.

Da bismo odgovorili na drugi deo zadatka treba da razumemo šta kaže formula $\forall y(q(x, y) \rightarrow q(y, x))$: kadgod iz x ide strelica do y , onda se i iz y vraća strelica do x . Ova osobina očigledno je tačna za $x = a$, jer iz a idu strelice do b i d , i u oba slučaja postoji i povratna strelica. Ova osobina nije tačna za $x = b$ jer iz b ide strelica do npr. d , ali se iz d ne vraća do b . Slično, $x = c$, $x = d$ i $x = f$ nisu rešenja date formule. Konačno $x = e$ jeste rešenje date formule iz prostog razloga što iz e ne izlaze strelice. Dakle, data formula definiše skup $\{a, e\}$. ♣

3. U prirodnoj dedukciji dokazati sekvente:

a) $s \vee p, p \wedge q \rightarrow \neg s, s \rightarrow q, \neg(s \wedge r) \vdash \neg s \leftrightarrow p \vee r$;

b) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \leftrightarrow R(x)), \forall x(P(x) \vee R(x)) \vdash \exists x R(x)$.

Rešenje. a) Jedan mogući dokaz je:

1	$s \vee p$	premise
2	$p \wedge q \rightarrow \neg s$	premise
3	$s \rightarrow q$	premise
4	$\neg(s \wedge r)$	premise
5	$\neg s$	pp
6	p	DS(1,5)
7	$p \vee r$	$\vee_U(6)$
8	$\neg s \rightarrow p \vee r$	D(5-7)
9	$p \vee r$	pp
10	$\neg \neg s$	pp
11	$\neg s \vee \neg r$	DM(4)
12	$\neg r$	DS(10,11)
13	p	DS(9,12)
14	$\neg(p \wedge q)$	MT(2,10)
15	$\neg p \vee \neg q$	DM(14)
16	$\neg \neg p$	$\neg \neg_U(13)$
17	$\neg q$	DS(15,16)
18	$\neg s$	MT(3,17)
19	$\perp$	$\neg_E(10,18)$
20	$\neg s$	RAA(10-19)
21	$p \vee r \rightarrow \neg s$	D(9-20)
22	$\neg s \leftrightarrow p \vee r$	$\leftrightarrow_U(8,21)$

b) Jedan mogući dokaz je:

1	$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa
2	$\forall x(Q(x) \leftrightarrow R(x))$	premissa
3	$\forall x(P(x) \vee R(x))$	premissa
4	$\boxed{a}$	nova promenljiva
5	$Q(a) \leftrightarrow R(a)$	I(2)
6	$P(a) \vee R(a)$	I(3)
7	$P(a) \rightarrow Q(a)$	pp
8	$\neg R(a)$	pp
9	$Q(a) \rightarrow R(a)$	$\leftrightarrow_E(5)$
10	$\neg Q(a)$	MT(8,9)
11	$\neg P(a)$	MT(7,10)
12	$R(a)$	DS(6,11)
13	$\perp$	$\neg_E(8,12)$
14	$R(a)$	RAA(8–13)
15	$\exists x R(x)$	$\exists_U(14)$
16	$(P(a) \rightarrow Q(a)) \rightarrow \exists x R(x)$	D(7–15)
17	$\forall x[(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists x R(x)]$	G(4–16)
18	$\exists x R(x)$	$\exists_E(1,17)$

ili drugačije zapisano:

1	$\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$	premissa
2	$\forall x(Q(x) \leftrightarrow R(x))$	premissa
3	$\forall x(P(x) \vee R(x))$	premissa
4	$\boxed{a} \quad P(a) \rightarrow Q(a)$	pp
5	$Q(a) \leftrightarrow R(a)$	I(2)
6	$P(a) \vee R(a)$	I(3)
7	$\neg R(a)$	pp
8	$Q(a) \rightarrow R(a)$	$\leftrightarrow_E(5)$
9	$\neg Q(a)$	MT(7,8)
10	$\neg P(a)$	MT(4,9)
11	$R(a)$	DS(6,10)
12	$\perp$	$\neg_E(7,11)$
13	$R(a)$	RAA(7–12)
14	$\exists x R(x)$	$\exists_U(13)$
15	$\exists x R(x)$	$\exists_E(1,4–14)$

Komentar. Prethodna dva izvođenja su različiti zapisi istog dokaza. Razlika proizilazi iz načina na koji je iskazano pravilo $\exists_E$. ♣

4. Dokazati da skupovna jednačina $X \cap (A \Delta B) = X \cup (A \cap C)$ po X ima rešenja ako i samo ako je $A \cap B \cap C = \emptyset$. Ukoliko je $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ i $C = \{3, 4, 6\}$, odrediti broj rešenja.

Rešenje. Ako je X rešenje date jednačine, primetimo dve stvari:

$$A \cap C \subseteq X \cup (A \cap C) = X \cap (A \Delta B) \subseteq X \text{ i } X \subseteq X \cup (A \cap C) = X \cap (A \Delta B) \subseteq A \Delta B.$$

Dakle, ako je X rešenje, ono mora da zadovoljava:

$$(\dagger) \quad A \cap C \subseteq X \subseteq A \Delta B.$$

Sa druge strane, ako X zadovoljava uslov $(\dagger)$, očigledno je:

$$X \cap (A \Delta B) = X = X \cup (A \cap C).$$

Dakle, X je rešenje jednačine ako i samo ako zadovoljava uslov $(\dagger)$.

Iz prethodnog pasusa sledi da jednačina ima rešenje ako i samo ako postoji X koje zadovoljava $(\dagger)$, što je, sa druge strane, očigledno ekvivalentno sa $A \cap C \subseteq A \Delta B$. Dakle, rešenje jednačine postoji ako i samo ako $A \cap C \subseteq A \Delta B$, pa je, za prvi deo zadatka, dovoljno da dokažemo da je poslednje ekvivalentno sa $A \cap B \cap C = \emptyset$.

To možemo da dokažemo koristeći ANF: $A \cap C \subseteq A \Delta B \iff (A \cap C) \cap (A \Delta B) = A \cap C \iff AC(A + B) = AC \iff AC + ABC = AC \iff ABC = 0 \iff A \cap B \cap C = \emptyset$. Direktan dokaz takođe nije težak. Time smo završili prvi deo zadatka.

U drugom delu zadatka, primetimo da $A \cap B \cap C = \emptyset$, pa jednačina zaista ima rešenja, i prema gornjoj analizi sva rešenja su skupovi X koji zadovoljavaju $(\dagger)$, tj. koji zadovoljavaju:

$$\{3\} \subseteq X \subseteq \{1, 3, 4, 5\}.$$

Nije teško direktno popisati sve takve skupove i videti da ih ima osam, ali nije teško ni videti da su rešenja data sa $X = \{3\} \cup Y$, gde $Y \subseteq \{1, 4, 5\}$, pa ih ima osam jer tročlani skupovi imaju $2^3 = 8$ podskupova. ♣

5. Na skupu $\mathbb{Z}$ data je relacija ρ sa: $x \rho y \iff x^4 y^2 - 9x^2 = x^2 y^4 - 9y^2$. Dokazati da je ρ ekvivalencija i odrediti klase elemenata 0 i 1.

Rešenje. Raspišimo uslov kojim je definisana ρ :

$$\begin{aligned} x \rho y &\iff x^4 y^2 - 9x^2 = x^2 y^4 - 9y^2 \\ &\iff x^2(x^2 y^2 - 9) = y^2(x^2 y^2 - 9) \\ &\iff x^2(x^2 y^2 - 9) - y^2(x^2 y^2 - 9) = 0 \\ &\iff (x^2 - y^2)(x^2 y^2 - 9) = 0 \\ &\iff x^2 = y^2 \vee x^2 y^2 = 9. \end{aligned}$$

Refleksivnost i simetričnost su sada potpuno očigledne. Za tranzitivnost pretpostavimo $x \rho y$ i $y \rho z$, tj. $x^2 = y^2 \vee x^2 y^2 = 9$ i $y^2 = z^2 \vee y^2 z^2 = 9$. Formalno imamo četiri slučaja. Ako je $x^2 = y^2$ i $y^2 = z^2$, sledi $x^2 = z^2$ pa i $x \rho z$. Ako je $x^2 = y^2$ i $y^2 z^2 = 9$, sledi $x^2 z^2 = 9$ pa i $x \rho z$. Ako je $x^2 y^2 = 9$ i $y^2 = z^2$, opet sledi $x^2 z^2 = 9$ pa i $x \rho z$. Poslednji slučaj je ako $x^2 y^2 = 9$ i $y^2 z^2 = 9$. Tada je očigledno $y^2 \neq 0$, pa je $x^2 = \frac{9}{y^2} = z^2$, i opet sledi $x \rho z$. Dakle, ρ jeste ekvivalencija.

Za račun $[0]_\rho$ imamo:

$$x \in [0]_\rho \iff x \rho 0 \iff x^2 = 0^2 \vee x^2 \cdot 0^2 = 9 \iff x^2 = 0 \iff x = 0,$$

pa je $[0]_\rho = \{0\}$. Za račun $[1]_\rho$ imamo:

$$x \in [1]_\rho \iff x \rho 1 \iff x^2 = 1^2 \vee x^2 \cdot 1^2 = 9 \iff x^2 = 1 \vee x^2 = 9 \iff x = \pm 1 \vee x = \pm 3,$$

pa je $[1]_\rho = \{-1, 1, -3, 3\}$. ♣

6. Dokazati da je sledeća formula valjana:

$$\varphi := \forall x(p(x) \rightarrow \forall y q(x, y)) \wedge \forall x(r(x) \rightarrow \exists y \neg q(x, y)) \rightarrow (\exists x r(x) \rightarrow \exists x(r(x) \wedge \neg p(x))).$$

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, data formula ima kontramodel K . Neka je v proizvoljna valuacija u K takva da $\hat{v}(\varphi) = N$. Tada je:

- (1) $\hat{v}(\forall x(p(x) \rightarrow \forall y q(x, y))) = T$,
- (2) $\hat{v}(\forall x(r(x) \rightarrow \exists y \neg q(x, y))) = T$, i
- (3) $\hat{v}(\exists x r(x) \rightarrow \exists x(r(x) \wedge \neg p(x))) = N$, tj.
- (4) $\hat{v}(\exists x r(x)) = T$, i
- (5) $\hat{v}(\exists x(r(x) \wedge \neg p(x))) = N$.

Iz (4) postoji element $a \in K$ takav da:

$$(6) \hat{v}_{a/x}(r(x)) = T.$$

Iz (2) imamo $\hat{v}_{a/x}(r(x) \rightarrow \exists y \neg q(x, y)) = T$, što zajedno sa (6) daje:

$$(7) \hat{v}_{a/x}(\exists y \neg q(x, y)) = T.$$

Iz (7) postoji $b \in K$ tako da $\hat{v}_{a/x, b/y}(\neg q(x, y)) = T$, tj. $\hat{v}_{a/x, b/y}(q(x, y)) = N$ odakle sledi:

$$(8) \hat{v}_{a/x}(\forall y q(x, y)) = N.$$

Iz (1) imamo $\hat{v}_{a/x}(p(x) \rightarrow \forall y q(x, y)) = T$, što zajedno sa (8) daje:

$$(9) \hat{v}_{a/x}(p(x)) = N, \text{ tj. } \hat{v}_{a/x}(\neg p(x)) = T.$$

Sada iz (6) i (9) sledi $\hat{v}_{a/x}(r(x) \wedge \neg p(x)) = T$, odakle $\hat{v}(\exists x(r(x) \wedge \neg p(x))) = T$. Poslednje je u kontradikciji sa (5). ♣