

UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU

JANUAR 2 2025: REŠENJA

1. Na Ostrvu Istinozboraca i Duplih agenata slušamo razgovor osoba A, B, C, D, E i F .

A kaže B -u : C i D su iz istog plemena.

B kaže C -u : A i F su Dupli agenti.

C kaže D -u : Ako je E Istinozborac, tada je i F Istinozborac.

D kaže E -u : B i C nisu iz istog plemena.

Odrediti ko su Istinozborci, a ko Dupli agenti. Istinozborci uvek govore istinu, dok Dupli agenti govore istinu Istinozborcima, a lažu druge Duple agente.

Rešenje. Sa a označimo tačnost iskaza „ A je Istinozborac.”; b, c, d, e, f imaju slično značenje. Ako A kaže B -u izjavu tačnosti p , onda je $p = T$ ako i samo ako je bar jedan od A i B Istinozborac; dakle, $a \vee b = p$. Prema tome iz datih izjava imamo sledeći sistem iskaznih jednačina:

$$\begin{aligned}(1) \quad a \vee b &= c \leftrightarrow d; \\(2) \quad b \vee c &= \neg a \wedge \neg f; \\(3) \quad c \vee d &= e \rightarrow f; \\(4) \quad d \vee e &= b \vee c.\end{aligned}$$

Prodiskutujmo po slovu c .

1. slučaj: $c = T$. Iz (2) sledi $a = f = N$, pa iz (3) sledi $e = N$. Iz (1) sada sledi $b = d$, a iz (4) $d = \neg b$. Ova kontradikcija pokazuje da prvi slučaj nije moguć.

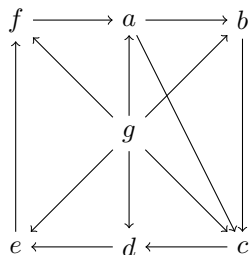
2. slučaj: $c = N$. Gornji sistem postaje:

$$\begin{aligned}(5) \quad a \vee b &= \neg d; \\(6) \quad b &= \neg a \wedge \neg f; \\(7) \quad d &= e \rightarrow f; \\(8) \quad d \vee e &= b.\end{aligned}$$

Ako je $d = T$, (5) povlači $b = N$. Ovo je u kontradikciji sa (8).

Dakle, $d = N$. Iz (7) sledi $e = T$ i $f = N$, pa je iz (8) $b = T$, pa iz (6) $a = N$, što je u skladu sa (5). Dakle, imamo rešenje $(a, b, c, d, e, f) = (N, T, N, N, T, N)$, tj. B i E su Istinozborci, a A, C, D, F Dupli agenti. ♣

2. Na dijagramu je dat model jezika $\mathcal{L} = \{q\}$, pri čemu je q binarni relacijski simbol predstavljen strelicom. Za svaki element modela napisati formulu koja ga definiše. Upotreba simbola $=$ je dozvoljena.



Rešenje. Element g je jedini element koji nema ulazne strelice, pa je definisan sa:

- $\varphi_g(x) := \neg \exists y q(y, x)$.

Uočimo formulu:

- $\varphi_a(x) := \exists yz(q(x, y) \wedge q(x, z) \wedge q(y, z)) \wedge \neg \varphi_g(x)$.

Jasno je da je a jedno rešenje formule $\varphi_a(x)$ ($y = b$ i $z = c$ svedoče egzistencijalne kvantifikatore u prvom konjunkt), a nije teško videti da je i jedino rešenje. Zaista, kako gornji graf nema petlje, $q(y, z)$ specijalno povlači $y \neq z$, pa prvi konjunkt povlači da iz x -a izlaze bar dve strelice, a drugi konjunkt povlači da x nije g . Jedini element sa ovim osobinama je a .

Sada b možemo da definišemo na sledeći način:

- $\varphi_b(x) := \exists yz(\varphi_a(y) \wedge q(y, x) \wedge q(y, z) \wedge q(x, z))$.

Dalje je lako:

- $\varphi_c(x) := \exists y(\varphi_b(y) \wedge q(y, x))$;
- $\varphi_d(x) := \exists y(\varphi_c(y) \wedge q(y, x))$;
- $\varphi_e(x) := \exists y(\varphi_d(y) \wedge q(y, x))$;
- $\varphi_f(x) := \exists y(\varphi_e(y) \wedge q(y, x))$. ♣

3. U prirodnoj dedukciji dokazati sekvente:

a) $\vdash ((q \rightarrow r) \rightarrow p) \rightarrow (r \vee q \rightarrow p \vee (\neg p \rightarrow q))$;

b) $\forall x(s(x) \rightarrow \neg q(x)), \forall x(\neg p(x) \wedge q(x) \rightarrow s(x)), \exists x(p(x) \vee q(x)) \vdash \exists x p(x)$.

Rešenje. a) Jedan mogući dokaz je:

1	$(q \rightarrow r) \rightarrow p$	pp
2	$r \vee q$	pp
3	r	pp
4	q	pp
5	r	R(3)
6	$q \rightarrow r$	D(4-5)
7	p	MP(1,6)
8	$p \vee (\neg p \rightarrow q)$	$\vee_U(7)$
9	q	pp
10	$\neg p$	pp
11	q	R(9)
12	$\neg p \rightarrow q$	D(10-11)
13	$p \vee (\neg p \rightarrow q)$	$\vee_U(12)$
14	$p \vee (\neg p \rightarrow q)$	$\vee_E(2,3-8,9-13)$
15	$r \vee q \rightarrow p \vee (\neg p \rightarrow q)$	D(2-14)
16	$((q \rightarrow r) \rightarrow p) \rightarrow (r \vee q \rightarrow p \vee (\neg p \rightarrow q))$	D(1-15)

b) Jedan mogući dokaz je:

1	$\forall x(s(x) \rightarrow \neg q(x))$	premisa
2	$\forall x(\neg p(x) \wedge q(x) \rightarrow s(x))$	premisa
3	$\exists x(p(x) \vee q(x))$	premisa
4	$\boxed{a}$	nova promenljiva
5	$s(a) \rightarrow \neg q(a)$	I(1)
6	$\neg p(a) \wedge q(a) \rightarrow s(a)$	I(2)
7	$p(a) \vee q(a)$	pp
8	$\neg p(a)$	pp
9	$q(a)$	DS(7,8)
10	$\neg p(a) \wedge q(a)$	$\wedge_U(8,9)$
11	$s(a)$	MP(6,10)
12	$\neg q(a)$	MP(5,11)
13	$\perp$	$\neg_E(9,12)$
14	$p(a)$	RAA(8-13)
15	$\exists x p(x)$	$\exists_U(14)$
16	$p(a) \vee q(a) \rightarrow \exists x p(x)$	D(7-15)
17	$\forall x(p(x) \vee q(x) \rightarrow \exists x p(x))$	G(4-16)
18	$\exists x p(x)$	$\exists_E(3,17)$

ili drugačije zapisano:

1	$\forall x(s(x) \rightarrow \neg q(x))$	premissa
2	$\forall x(\neg p(x) \wedge q(x) \rightarrow s(x))$	premissa
3	$\exists x(p(x) \vee q(x))$	premissa
4	$\boxed{a} \quad p(a) \vee q(a)$	pp
5	$s(a) \rightarrow \neg q(a)$	I(1)
6	$\neg p(a) \wedge q(a) \rightarrow s(a)$	I(2)
7	$\neg p(a)$	pp
8	$q(a)$	DS(4,7)
9	$\neg p(a) \wedge q(a)$	$\wedge_U(7,8)$
10	$s(a)$	MP(6,9)
11	$\neg q(a)$	MP(5,10)
12	$\perp$	$\neg_E(8,11)$
13	$p(a)$	RAA(7–12)
14	$\exists x p(x)$	$\exists_U(13)$
15	$\exists x p(x)$	$\exists_E(3,4-14)$

Komentar. Prethodna dva izvođenja su različiti zapisi istog dokaza. Razlika proizilazi iz načina na koji je iskazano pravilo $\exists_E$. ♣

4. Neka je $f : X \rightarrow Y$, i neka je za $B \subseteq Y$, $g_B : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definisana sa $g_B(V) := f^{-1}[V \triangle B]$. Dokazati da su sledeći uslovi ekvivalentni:

- 1) f je „na”;
- 2) $(\forall B \subseteq Y) g_B$ je „1-1”;
- 3) $(\exists B \subseteq Y) g_B$ je „1-1”.

Rešenje. Dovoljno je da dokažemo ciklus implikacija $1) \implies 2) \implies 3) \implies 1)$. Kako je $2) \implies 3)$ očigledno, treba da dokažemo preostale dve implikacije.

$1) \implies 2)$: Pretpostavimo da je f „na”, i pretpostavimo da je $B \subseteq Y$ proizvoljno; dokazujemo da je g_B „1-1”. Neka su $V, V' \subseteq Y$ takvi da $V \neq V'$; treba da dokažemo $g_B(V) \neq g_B(V')$, tj. $f^{-1}[V \triangle B] \neq f^{-1}[V' \triangle B]$. Kako je $V \neq V'$, postoji element koji jeste u jednom od ovih skupova, a nije u drugom; bez umanjenja opštosti, neka je $y \in Y$ element takav da $y \in V$ i $y \notin V'$. Kako je f „na”, postoji element $x \in X$ takav da $y = f(x)$; dakle, $f(x) \in V$ i $f(x) \notin V'$. Razmatramo dva slučaja:

1. slučaj: $f(x) \in B$. Tada $f(x) \notin V \triangle B$ i $f(x) \in V' \triangle B$, pa $x \notin f^{-1}[V \triangle B]$ i $x \in f^{-1}[V' \triangle B]$; dakle, $f^{-1}[V \triangle B] \neq f^{-1}[V' \triangle B]$.

2. slučaj: $f(x) \notin B$. Sada $f(x) \in V \triangle B$ i $f(x) \notin V' \triangle B$, pa $x \in f^{-1}[V \triangle B]$ i $x \notin f^{-1}[V' \triangle B]$; opet, $f^{-1}[V \triangle B] \neq f^{-1}[V' \triangle B]$.

Završili smo dokaz implikacije $1) \implies 2)$.

$3) \implies 1)$: Neka je $B \subseteq Y$ skup takav da je g_B „1-1”. Kako dokazujemo da je f „na”, uzmimo proizvoljno $y \in Y$; treba da dokažemo da postoji $x \in X$ takvo da $f(x) = y$. Primetimo da je:

$$g_B(B) = f^{-1}[B \triangle B] = f^{-1}[\emptyset] = \emptyset,$$

pa kako je g_B „1-1”, za svako $V \subseteq Y$ takvo da $V \neq B$ važi $g_B(V) \neq \emptyset$, tj. $f^{-1}[V \triangle B] \neq \emptyset$ (*). Imamo dva slučaja:

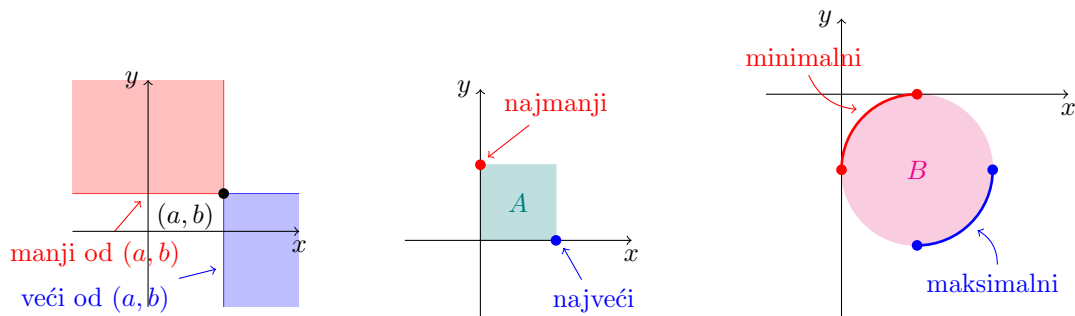
1. slučaj: $y \in B$. Neka je $V = B \setminus \{y\}$. Tada $V \neq B$ i $V \triangle B = \{y\}$, pa iz (*) sledi $f^{-1}[\{y\}] \neq \emptyset$. Dakle, postoji $x \in f^{-1}[\{y\}]$, tj. $f(x) \in \{y\}$, tj. $f(x) = y$.

2. slučaj: $y \notin B$. Neka je $V = B \cup \{y\}$. Opet $V \neq B$ i $V \triangle B = \{y\}$, pa završavamo posao kao u prethodnom slučaju.

Završili smo i dokaz implikacije $3) \implies 1)$. ♣

5. Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je data relacija poretka ρ sa $(x, y) \rho (s, t)$ ako i samo ako $x \leq s$ i $y \geq t$. Odrediti najmanji, najveći, minimalne i maksimalne elemente skupa $A = [0, 1] \times [0, 1]$ i $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1\}$.

Rešenje. Po definiciji $(x, y) \rho (a, b) \iff x \leq a \wedge y \geq b$, tj. (x, y) je ρ -manja od (a, b) ako i samo ako se nalazi „levo-gore” od (a, b) . Slično, (x, y) je ρ -veća od (a, b) ako i samo ako se nalazi „desno-dole” od (a, b) (slika levo).



Imajući u vidu prethodno, nije teško приметiti da je $(0, 1)$ najmanji, a $(1, 0)$ najveći element kvadrata A . Zaista, $(x, y) \in A \iff 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1$, pa iz $0 \leq x \wedge y \leq 1$ sledi $(0, 1) \rho (x, y)$, a iz $x \leq 1 \wedge 0 \leq y$ sledi $(x, y) \rho (1, 0)$; kako je (x, y) bilo proizvoljno, sledi $(0, 1)$ je najmanji, a $(1, 0)$ najveći element od A . Samim tim, $(0, 1)$ je jedini minimalni, a $(1, 0)$ jedini maksimalni element u A (slika u sredini).

Ponovo, imajući u vidu prvi pasus, vidimo da B nema najmanji i najveći element, i da su minimalni i maksimalni elementi u B predstavljeni na slici desno. ♣

6. Dokazati da je sledeća formula valjana:

$$\varphi := \neg \exists x (Q(x) \vee S(x)) \wedge \forall x \exists y (\neg R(x, y) \wedge \neg S(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y).$$

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, data formula ima kontramodel K . Neka je v proizvoljna valuacija u K takva da $\hat{v}(\varphi) = N$. Tada je:

$$(1) \quad \hat{v}(\neg \exists x (Q(x) \vee S(x))) = T, \text{ tj. } \hat{v}(\exists x (Q(x) \vee S(x))) = N,$$

$$(2) \quad \hat{v}(\forall x \exists y (\neg R(x, y) \wedge \neg S(x) \rightarrow Q(x))) = T, \text{ i}$$

$$(3) \quad \hat{v}(\forall x \exists y R(x, y)) = N.$$

Iz (3) postoji element $a \in K$ takav da:

$$(4) \quad \hat{v}_{a/x}(\exists y R(x, y)) = N.$$

Iz (2) sada sledi:

$$(5) \quad \hat{v}_{a/x}(\exists y (\neg R(x, y) \wedge \neg S(x) \rightarrow Q(x))) = T.$$

pa odatle postoji element $b \in K$ takav da:

$$(6) \quad \hat{v}_{a/x, b/y}(\neg R(x, y) \wedge \neg S(x) \rightarrow Q(x)) = T, \text{ tj. } \neg R^K(a, b) \wedge \neg S^K(a) \rightarrow Q^K(a) = T.$$

Iz (1) imamo $\hat{v}_{a/x}(Q(x) \vee S(x)) = N$, tj. $Q^K(a) = S^K(a) = N$, dok iz (4) sledi $\hat{v}_{a/x, b/y}(R(x, y)) = N$, tj. $R^K(a, b) = N$. Sada je:

$$\neg R^K(a, b) \wedge \neg S^K(a) \rightarrow Q^K(a) = \neg N \wedge \neg N \rightarrow N = T \wedge T \rightarrow N = T \rightarrow N = N,$$

što protivreči (6). Ova kontradikcija završava dokaz. ♣