

Teorija izračunljivosti

Slavko Moconja

MATF

2025/26.



1. Aritmetičke funkcije
2. Primitivno rekurzivne funkcije i relacije
3. Kodiranje
4. Problem duple rekurzije: Akermanova funkcija
5. Parcijalno rekurzivne funkcije i rekurzivne relacije
6. Registarske mašine
7. Tjuringove mašine
8. Rekurzivni skupovi / odlučivost
9. Rekurzivno nabrojivi skupovi / parcijalna odlučivost
10. m -svođenje
11. Aritmetička hijerarhija
12. Varijante Tjuringove mašine
13. Vremenska složenost



Aritmetičke funkcije



Oznake.

- ▶ $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- ▶ $\mathbb{N}^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid (\forall i = 1, \dots, n) a_i \in \mathbb{N}\}$, za $n \geq 1$;
- ▶ specijalno, $\mathbb{N}^0 = \{()\}$;
- ▶ $\mathbb{N}^1$ je prirodno identifikovan sa $\mathbb{N}$.

Definicija. n -arna parcijalna aritmetička funkcija, $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, je bilo koja funkcija $f : D_f \rightarrow \mathbb{N}$ gde $D_f \subseteq \mathbb{N}^n$; D_f je *domen* funkcije f .

Specijalno, ako je $D_f = \mathbb{N}^n$, onda je f *totalna*.

Komentar. Ako je f data nekim aritmetičkim izrazom (npr. $x - y$ ili $\frac{x}{y}$), D_f je najveći podskup od odgovarajućeg $\mathbb{N}^n$ za koji je izraz definisan.

Komentar. Totalna 0-arna funkcija je samo broj.



Oznake. Neka je f n -arna funkcija i $\vec{a} \in \mathbb{N}^n$.

- ▶ $f(\vec{a}) \uparrow$ znači $\vec{a} \notin D_f$;
- ▶ $f(\vec{a}) \downarrow$ znači $\vec{a} \in D_f$;
- ▶ $f(\vec{a}) \downarrow = b$ znači $\vec{a} \in D_f$ i $f(\vec{a}) = b$.

λ -notacija. Ako je f aritmetički izraz i $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $(\lambda \vec{x}) f$ je oznaka za n -arnu funkciju $\vec{x} \mapsto f(\vec{x})$.

Primer. Posmatrajmo izraz $x + 2y$.

- ▶ $x + 2y$ (ili čak $(\lambda) x + 2y$) označava broj (konstantu) $x + 2y$;
- ▶ $(\lambda xy) x + 2y$ označava binarnu funkciju $(x, y) \mapsto x + 2y$;
- ▶ $(\lambda yx) x + 2y$ označava binarnu funkciju $(y, x) \mapsto x + 2y$;
- ▶ $(\lambda x) x + 2y$ označava unarnu funkciju $x \mapsto x + 2y$ (y je parametar);
- ▶ $(\lambda xyz) x + 2y$ označava ternarnu funkciju $(x, y, z) \mapsto x + 2y$.



Definicija. Neka su $g_1, \dots, g_m$ n -arne i h m -arna funkcija. Definišemo njihovu *kompoziciju* da bude n -arna funkcija f data sa:

$$f(\vec{x}) := h(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x})).$$

Pišemo $f = h(g_1, g_2, \dots, g_m)$.

Komentar. Primetimo:

$$\vec{x} \in D_f \iff \vec{x} \in \bigcap_{i=1}^m D_{g_i} \wedge (g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x})) \in D_h.$$

Specijalno, kompozicija totalnih funkcija je totalna.



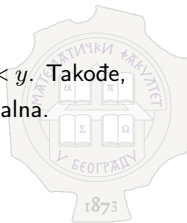
Definicija. Neka su g n -arna i h $(n+2)$ -arna funkcija. Neka je f $(n+1)$ -arna funkcija koja zadovoljava:

- ▶ $f(0, \vec{x}) := g(\vec{x})$;
- ▶ $f(y+1, \vec{x}) := h(y, f(y, \vec{x}), \vec{x})$.

Za f kažemo da je dobijena *primitivnom rekurzijom* od g i h ; pišemo $f = \text{rec}(g, h)$.

Komentar. Primetimo $(0, \vec{x}) \in D_f \iff \vec{x} \in D_g$, i
 $(y+1, \vec{x}) \in D_f \iff (y, x) \in D_f \wedge (y, f(y, \vec{x}), \vec{x}) \in D_h$.

Indukcijom lako vidimo da $(y, \vec{x}) \in D_f$ povlači $(z, \vec{x}) \in D_f$ za sve $z < y$. Takođe, funkcija dobijena primitivnom rekurzijom od totalnih funkcija je totalna.



Definicija. Neka je g $(n + 1)$ -arna funkcija. Definišemo n -arnu funkciju f sa:

$$f(\vec{x}) := \min\{y \mid (\forall z < y) \, g(z, \vec{x}) \downarrow \wedge g(y, \vec{x}) \downarrow = 0\}.$$

Za f kažemo da je dobijena *minimizacijom* od g ; pišemo

$$f(\vec{x}) = (\mu y)(g(y, \vec{x}) = 0).$$

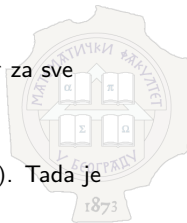
Komentar. Primetimo:

$$\vec{x} \in D_f \iff (\exists y)((\forall z \leq y) (z, \vec{x}) \in D_g \wedge g(y, \vec{x}) = 0).$$

Čak i ako je funkcija g totalna, f ne mora biti.

Primer. Neka je $f(x) := (\mu y) \, x + y = 0$, tada je $f(0) = 0$, ali $f(n) \uparrow$ za sve $n > 0$.

Primer. Neka je $g(y, x) = \begin{cases} x - y & x \geq y \\ \uparrow & x < y \end{cases}$ i $f(x) = (\mu y)(g(y, x) = 0)$. Tada je $f = \text{id}_{\mathbb{N}}$.



Definicija. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}^n$. *Karakteristična funkcija* skupa S je totalna n -arna funkcija $\chi_S : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ data sa:

$$\chi_S(\vec{x}) := \begin{cases} 1 & \vec{x} \in S \\ 0 & \vec{x} \notin S \end{cases}.$$



Primitivno rekurzivne funkcije i relacije



Definicija. Osnovne aritmetičke funkcije su:

- ▶ konstanta $0 = (\lambda) 0$;
- ▶ *sledbenik* $S := (\lambda x) x + 1$;
- ▶ *projekcije* $\pi_i^n = (\lambda x_1 x_2 \dots x_n) x_i$, za sve $1 \leq i \leq n$.

Komentar. Sve osnovne funkcije su totalne.



Definicija. Klasa *primitivno rekurzivnih funkcija* je najmanja klasa koja sadrži osnovne funkcije i zatvorena je za kompoziciju i primitivnu rekurziju.

Alternativno, primitivno rekurzivne funkcije možemo da definišemo rekurentno na sledeći način:

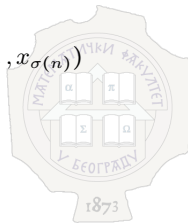
- ▶ osnovne funkcije su primitivno rekurzivne;
- ▶ ako su n -arne $g_1, \dots, g_m$ i m -arna h primitivno rekurzivne, onda je i $h(g_1, \dots, g_m)$ primitivno rekurzivna;
- ▶ ako su n -arna g i $(n + 2)$ -arna h primitivno rekurzivne, onda je i $\text{rec}(g, h)$ primitivno rekurzivna;
- ▶ primitivno rekurzivne funkcije dobijaju se primenom prethodnih pravila konačno mnogo puta.

1. Tvđenje. Primitivno rekurzivne funkcije su totalne.



Primeri primitivno rekurzivnih funkcija I

- a. Konstanta $k = (\lambda) k$ je primitivno rekurzivna jer $k = \underbrace{S(S(\dots S(0) \dots))}_{k \text{ komada}}$.
- b. Unarna konstantna funkcija $C_k = (\lambda x) k$ je primitivno rekurzivna jer $C_k = \text{rec}(k, \pi_2^2)$.
- C_0 označavamo i sa Z .
- c. n -arna konstantna funkcija $C_k^n := (\lambda x_1 \dots x_n) k$ je primitivno rekurzivna jer $C_k^n = C_k(\pi_1^n)$.
- d. Ako je f primitivno rekurzivna n -arna funkcija i $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$, onda je i $(\lambda x_1 \dots x_m) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ primitivno rekurzivna jer je jednaka $f(\pi_{\sigma(1)}^m, \dots, \pi_{\sigma(n)}^m)$.



Primeri primitivno rekurzivnih funkcija II

e. Sabiranje $(\lambda yx) y + x$ je primitivno rekurzivno jer:

- ▶ $0 + x = x = \pi_1^1(x)$ i
- ▶ $(y + 1) + x = S(y, x) = S(\pi_2^3(y, y + x, x)),$

pa je $(\lambda yx) y + x = \text{rec}(\pi_1^1, S(\pi_2^3)).$

f. Množenje $(\lambda yx) yx$ je primitivno rekurzivno jer:

- ▶ $0 \cdot x = 0 = Z(x)$ i
- ▶ $(y + 1)x = yx + x = ((\lambda yx) y + x)(\pi_2^3(y, yx, x), \pi_3^3(y, yx, x)),$

pa je $(\lambda yx) yx = \text{rec}(Z, ((\lambda yx) y + x)(\pi_2^3, \pi_3^3)).$

g. Prethodnik $P(y) := \begin{cases} 0 & y = 0 \\ y - 1 & y > 0 \end{cases}$ je primitivno rekurzivna jer:

- ▶ $P(0) = 0$ i
- ▶ $P(y + 1) = y = \pi_1^2(y, P(y)),$

pa je $P = \text{rec}(0, \pi_1^2).$

2. Zadatak. Dokazati da se sabiranje ne može definisati koristeći samo osnovne funkcije i kompoziciju.



Primeri primitivno rekurzivnih funkcija III

h. Stepenovanje $(\lambda yx) x^y$ je primitivno rekurzivna.

NB. $0^0 := 1$.

i. *Odsečeni minus* $(\lambda xy) x \dot{-} y := \begin{cases} x - y & x \geq y \\ 0 & x < y \end{cases}$ je primitivno rekurzivna.

j. $(\lambda xy) \min(x, y)$ i $(\lambda xy) \max(x, y)$ su primitivno rekurzivne.

k. *Signum* $(\lambda x) \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ i obratni signum

$(\lambda x) \overline{\operatorname{sgn}}(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ su primitivno rekurzivne.

l. *Apsolutna razlika* $(\lambda xy) |x - y|$ je primitivno rekurzivna.

m. *Faktorijel* $(\lambda x) x!$ je primitivno rekurzivna.

NB. $0! := 1$.

3. Zadatak. Dokazati h–m.



n. Funkcije:

$$\text{kol}(x, y) := \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \text{količnik pri deljenju } x \text{ sa } y & y > 0 \end{cases} \quad \text{i}$$

$$\text{ost}(x, y) := \begin{cases} 0 & y = 0 \\ \text{ostatak pri deljenju } x \text{ sa } y & y > 0 \end{cases}$$

su primitivno rekurzivne.

4. Zadatak. Dokazati n.



Definicija. n -arna relacija (predikat) je bilo koji podskup $R \subseteq \mathbb{N}^n$; njen komplement je relacija $R^c = \mathbb{N}^n \setminus R$.

Relacija R je *primitivno rekurzivna* ako je χ_R primitivno rekurzivna funkcija.

5. Zadatak. Ako su R i S primitivno rekurzivne relacije, onda su i R^c , $R \cap S$, $R \cup S$ i $R \setminus S$ primitivno rekurzivne.

6. Zadatak. Sledeće relacije su primitivno rekurzivne:

- a. $\{(x, y): x = y\}$ i $\{(x, y): x \neq y\}$;
- b. $\{(x, y): x \leq y\}$ i $\{(x, y): x < y\}$;
- c. $\{(x, y): x \mid y\}$;
- d. $\{x: x \text{ je prost broj}\}$.



7. Tvrdjenje. Neka je f $(n + 1)$ -arna primitivno rekurzivna funkcija. Tada su:

a. $(\lambda y \vec{x}) \sum_{t < y} f(t, \vec{x});$

b. $(\lambda y \vec{x}) \prod_{t < y} f(t, \vec{x});$

NB. $\sum_{t < 0} - := 0$ i $\prod_{t < 0} - := 1;$

c. $(\lambda y \vec{x}) ((\mu t < y) f(t, \vec{x}) = 0),$ gde:

$$((\mu t < y) f(t, \vec{x}) = 0) := \begin{cases} \min\{t < y: f(t, \vec{x}) = 0\} & \text{skup levo } \neq \emptyset; \\ y & \text{inače} \end{cases};$$

su primitivno rekurzivne funkcije.

Dokaz. Na tabli. ♣

Za funkcije u prethodnom tvrđenju kažemo da su dobijene ograničenom sumom, ograničenim proizvodom, odnosno ograničenom minimizacijom.



8. Posledica. Neka je R $(n + 1)$ -arna primitivno rekurzivna relacija. Tada su:

- a. $\{(y, \vec{x}): (\exists t < y) R(t, \vec{x})\};$
- b. $\{(y, \vec{x}): (\forall t < y) R(t, \vec{x})\};$
- c. $(\lambda y \vec{x})((\mu t < y) R(t, \vec{x})),$ gde:

$$(\mu t < y) R(t, \vec{x}) := \begin{cases} \min\{t < y: R(t, \vec{x})\} & \text{skup levo} \neq \emptyset; \\ y & \text{inače} \end{cases};$$

primitivno rekurzivne relacije, odnosno funkcija.

Dokaz. Na tabli. ♣



9. Tvrdjenje. Funkcija $(\lambda xyz) C(x, y; z)$ data sa:

$$C(x, y; z) := \begin{cases} x & z = 0 \\ y & z > 0 \end{cases}$$

je primitivno rekurzivna.

Dokaz. Na tabli. ♣

10. Posledica. Neka su g, h n -arne primitivno rekurzivne funkcije i R n -arna primitivno rekurzivna relacija, onda je funkcija f data sa:

$$f(\vec{x}) := \begin{cases} g(\vec{x}) & R(\vec{x}) \\ h(\vec{x}) & \neg R(\vec{x}) \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.

Dokaz. Na tabli. ♣

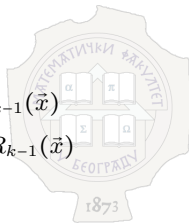


11. Zadatak.

- a. Neka je f binarna primitivno rekurzivna funkcija. Dokazati da je i $(\lambda x) \sum_{t < x} f(t, x)$ primitivno rekurzivna.
- b. Neka je (p_n) niz prostih brojeva. Dokazati da je funkcija $(\lambda n) p_n$ primitivno rekurzivna.
- c. Neka su $g_1, \dots, g_k$ n -arne primitivno rekurzivne funkcije i $R_1, \dots, R_{k-1}$ n -arni primitivno rekurzivni predikati. Dokazati da je funkcija data sa:

$$f(\vec{x}) := \begin{cases} g_1(\vec{x}) & R_1(\vec{x}) \\ g_2(\vec{x}) & \neg R_1(\vec{x}) \wedge R_2(\vec{x}) \\ g_3(\vec{x}) & \neg R_1(\vec{x}) \wedge \neg R_2(\vec{x}) \wedge R_3(\vec{x}) \\ \vdots & \\ g_{k-1}(\vec{x}) & \neg R_1(\vec{x}) \wedge \neg R_2(\vec{x}) \wedge \neg R_3(\vec{x}) \wedge \dots \wedge R_{k-1}(\vec{x}) \\ g_k(\vec{x}) & \neg R_1(\vec{x}) \wedge \neg R_2(\vec{x}) \wedge \neg R_3(\vec{x}) \wedge \dots \wedge \neg R_{k-1}(\vec{x}) \end{cases}$$

primitivno rekurzivna.



Kodiranje



12. Tvrdjenje. Neka je $\gamma(x, y) := 2^x(2y + 1) - 1$.

- a. γ je primitivno rekurzivna bijekcija $\gamma : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.
- b. $\gamma_1(t) := \pi_1^2 \circ \gamma^{-1}(t)$ i $\gamma_2(t) := \pi_2^2 \circ \gamma^{-1}(t)$ su primitivno rekurzivne funkcije $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- c. $\gamma(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = t$, $\gamma_1(\gamma(x, y)) = x$ i $\gamma_2(\gamma(x, y)) = y$.

Dokaz. Na tabli. ♣

Definicija. Broj $\gamma(x, y)$ je *Gedlov kod/kod/indeks* para (x, y) .

Funkcija γ je (*Gedlovo*) *kodiranje* parova.

Funkcije γ_1 i γ_2 su funkcije dekodiranja.



13. Zadatak. Neka je (F_n) Fibonačijev niz: $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$ za $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da je $f(n) := F_n$ primitivno rekurzivna.

Komentar. Funkcija $f(n)$ se ne može definisati „običnom“ primitivnom rekurzijom jer sledeći član ne zavisi samo prethodne vrednosti, nego od prethodne dve vrednosti.

Ideja. Uočimo funkciju $g(n) := \gamma(f(n), f(n+1))$. Sledeći član niza $g(n)$ zavisi samo od prethodnog, pa se može definisati primitivnom rekurzijom.

Skica rešenja. Definišimo funkciju $g(n)$ primitivnom rekurzijom sa:

$$\begin{aligned} g(0) &= \gamma(0, 1); \\ g(n+1) &= \gamma(\gamma_2(g(n)), \gamma_1(g(n)) + \gamma_2(g(n))). \end{aligned}$$

Lako vidimo da je $g(n)$ primitivno rekurzivna. Kako je $f(n) = \gamma_1(g(n))$, i funkcija f je primitivno rekurzivna. ♣



14. Teorema. Neka su g_1, g_2 n -arne primitivno rekurzivne funkcije i h_1, h_2 $(n + 3)$ -arne primitivno rekurzivne funkcije. Definišimo $(n + 1)$ -arne funkcije f_1, f_2 sa:

$$f_1(0, \vec{x}) = g_1(\vec{x});$$

$$f_2(0, \vec{x}) = g_2(\vec{x});$$

$$f_1(y + 1, \vec{x}) = h_1(y, f_1(y, \vec{x}), f_2(y, \vec{x}), \vec{x});$$

$$f_2(y + 1, \vec{x}) = h_2(y, f_1(y, \vec{x}), f_2(y, \vec{x}), \vec{x}).$$

Funkcije f_1 i f_2 su dobro definisane i primitivno rekurzivne.

Dokaz. Na tabli. ♣

15. Zadatak. Dokazati da je $(\lambda n) F_n$ primitivno rekurzivna koristeći prethodnu teoremu.



Definicija. Definišemo funkcije $\gamma^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, $n \geq 1$, rekurentno sa: $\gamma^1 = \text{id}_{\mathbb{N}}$ i:

$$\gamma^{n+1}(\vec{x}, y) = \gamma(\gamma^n(\vec{x}), y).$$

Definišimo funkcije $\gamma_i^n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, sa:

$$\gamma_i^n := \pi_i^n \circ (\gamma^n)^{-1}.$$

NB. $\gamma^2 = \gamma$, $\gamma_1^2 = \gamma_1$ i $\gamma_2^2 = \gamma_2$.

16. Lema.

- Funkcije γ^n su primitivno rekurzivne bijekcije.
- Funkcije γ_i^n su primitivno rekurzivne.
- $\gamma^n(\gamma_1^n(t), \gamma_2^n(t), \dots, \gamma_n^n(t)) = t$, i $\gamma_i^n(\gamma^n(x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_i$ za $1 \leq i \leq n$.

Dokaz. Na tabli. ♣



Definicija. Neka je $\delta : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ data sa:

$$\delta(n, i, t) := \begin{cases} \gamma_i^n(t) & 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{inače} \end{cases}.$$

17. Teorema. Funkcija δ je primitivno rekurzivna.

Skica dokaza. Funkcija $f(k, t) = \underbrace{\gamma_1(\gamma_1(\dots \gamma_1(t) \dots))}_k$ je primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned} f(0, t) &= t; \\ f(k+1, t) &= \gamma_1(f(k, t)). \end{aligned}$$

Sada je i δ primitivno rekurzivna jer:

$$\delta(n, i, t) = \begin{cases} 0 & i = 0 \vee i > n \\ f(n \div 1, t) & i = 1 \\ \gamma_2(f(n \div i, t)) & 1 < i \leq n \end{cases}$$



Komentar. Koordinate konačnih nizova nadalje ćemo indeksirati počevši od 0.

Definicija. Definišemo funkciju $\Gamma : \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ sa (vrednost $\Gamma((x_0, \dots, x_{n-1}))$ obeležavamo sa $\ulcorner x_0, \dots, x_{n-1} \urcorner$):

$$\ulcorner \urcorner := 0;$$

$$\ulcorner x_0, \dots, x_{n-1} \urcorner := \gamma(n-1, \gamma^n(x_0, \dots, x_{n-1})) + 1, \text{ za } n \geq 1.$$

Broj $\ulcorner \vec{x} \urcorner$ se zove (*Gedlov*) *kod/indeks* niza $\vec{x}$.

NB. Nema smisla pričati o tome da li je Γ primitivno rekurzivna, s obzirom da nije ni aritmetička.

18. Tvrdjenje. Funkcija Γ je bijekcija.

Dokaz. Na tabli. ♣



Definicija. Definišemo unarnu funkciju $\ell(t)$ i binarnu funkciju $(t)_i$ sa:

- ▶ $\ell(t) :=$ dužina niza čiji je Gedelov kod t ;
- ▶ $(t)_i := \begin{cases} i\text{-ta koordinata niza čiji je Gedelov kod } t & 0 \leq i < \ell(t) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$.

19. Tvrdjenje. Funkcije $(\lambda t) \ell(t)$ i $(\lambda ti) (t)_i$ su dobro definisane i primitivno rekurzivne funkcije.

Dokaz. Na tabli. ♣

Komentar. Naglasimo:

- $(\ulcorner \urcorner)_i = 0$ za sve $i \in \mathbb{N}$;
- $(\ulcorner x_0, \dots, x_{n-1} \urcorner)_i = \begin{cases} x_i & 0 \leq i < n \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$;
- ako $x > 0$, onda $x = \ulcorner (x)_0, \dots, (x)_{\ell(x)-1} \urcorner$.



Definicija. Definišemo binarnu funkciju *konkatenacije/nadovezivanja* $s \hat{~} t$ sa:
 $s \hat{~} t :=$ kod niza dobijenog nadovezivanjem niza sa kodom t na niz sa kodom s .
Preciznije:

$$0 \hat{~} t := t;$$

$$s \hat{~} 0 := s;$$

$$s \hat{~} t := \langle (s)_0, \dots, (s)_{\ell(s)-1}, (t)_0, \dots, (t)_{\ell(t)-1} \rangle, \text{ za } s, t > 0.$$



20. Tvđenje. Funkcija $(\lambda st) s^{\wedge} t$ je primitivno rekurzivna.

Dokaz. Funkcija $s * x := s^{\lceil x \rceil}$ je primitivno rekurzivna jer:

$$s * x = \begin{cases} \gamma(0, x) + 1 & s = 0 \\ \gamma(\ell(s), \gamma(\gamma_2(s \div 1), x)) + 1 & s > 0 \end{cases}.$$

Primitivnom rekurzijom definišemo funkciju $f(s, t, i)$ sa:

$$\begin{aligned} f(s, t, 0) &= s; \\ f(s, t, i + 1) &= f(s, t, i) * (t)_i. \end{aligned}$$

Sada je $s^{\wedge} t = f(s, t, \ell(t))$.



Definicija. Neka je f totalna $(n + 1)$ -arna funkcija. *Istorija* funkcije f je funkcija $\tilde{f} : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ definisana sa:

$$\tilde{f}(y, \vec{x}) := \lceil f(0, \vec{x}), f(1, \vec{x}), \dots, f(y, \vec{x}) \rceil.$$

21. Lema. f je primitivno rekurzivna $\iff \tilde{f}$ je primitivno rekurzivna.

Dokaz. Na tabli. ♣ .



Teorema o potpunoj rekurziji II

Definicija. Neka su g n -arna i h $(n+2)$ -arna funkcija. Neka je f $(n+1)$ -arna funkcija koja zadovoljava:

- ▶ $f(0, \vec{x}) := g(\vec{x})$;
- ▶ $f(y+1, \vec{x}) := h(y, \tilde{f}(y, \vec{x}), \vec{x})$.

Za f kažemo da je dobijena *potpunom rekurzijom* od g i h .

22. Teorema. Ako su g i h primitivno rekurzivne, onda je i f primitivno rekurzivna.

Dokaz. Dovoljno je da dokažemo da je $\tilde{f}$ primitivno rekurzivna:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(0, \vec{x}) &= \ulcorner g(\vec{x}) \urcorner; \\ \tilde{f}(y+1, \vec{x}) &= \tilde{f}(y, \vec{x}) \frown \ulcorner h(y, \tilde{f}(y, \vec{x}), \vec{x}) \urcorner.\end{aligned}$$

Dakle, $\tilde{f}$ je definisana primitivnom rekurzijom.



Problem duple rekurzije: Akermanova funkcija



Definicija. Definišemo binarnu funkciju $A(n, x)$ sa:

- ▶ $A(0, x) := x + 1$;
- ▶ $A(n + 1, 0) := A(n, 1)$;
- ▶ $A(n + 1, x + 1) := A(n, A(n + 1, x))$.

Funkciju $(\lambda x) A(n, x)$ označavamo sa A_n .

Komentar. Funkcija A je dobro definisana totalna funkcija; zovemo je *Akermanova funkcija*.

Kažemo da je A dobijena *duplom rekurzijom*.

23. Teorema. A nije primitivno rekurzivna.



24. Zadatak. Dokazati:

- a. $A_n(x) > n + x$;
- b. $A_n(x) < A_n(x + 1)$;
- c. $A_n(x) < A_n(y)$ za $x < y$;
- d. $A_n(x) < A_{n+1}(x)$;
- e. $A_n(x) < A_m(x)$ za $n < m$;
- f. $A_{n+1}(x) \geq A_n(x + 1)$;
- g. $A_{n+2}(x) \geq A_n(A_{n+1}(x))$;
- h. $A_n(x) \geq nx + 2$ za $n \geq 1$;
- i. $A_{n+1}(x) > A_n(2x)$ za $n \geq 1$.



Definicija. Označimo sa $\mathcal{O}_n$ familiju svih primitivno rekurzivnih funkcija f za koje važi (ako je k arnost od f):

$$(\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^k) \ f(\vec{x}) < A_n(\Sigma \vec{x}).$$

(Ovde $\Sigma \vec{x}$ obeležava zbir koordinata niza $\vec{x}$; $\Sigma \vec{x} = 0$ za prazan niz.)

25. Lema.

- a. $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_m$ za $n < m$;
- b. $0, S, \pi_i^l \in \mathcal{O}_1$;
- c. ako $f = h(g_1, \dots, g_l)$ i $h, g_1, \dots, g_l \in \mathcal{O}_n$ gde $n > l$, onda $f \in \mathcal{O}_{n+2}$;
- d. ako $f = \text{rec}(g, h)$ i $g, h \in \mathcal{O}_n$ gde $n \geq 1$, onda $f \in \mathcal{O}_{n+2}$.

Dokaz. Na tabli. ♣



26. Posledica. Za svaku primitivno rekurzivnu funkciju f postoji n tako da $f \in \mathcal{O}_n$. □

Dokaz teoreme 23. Pps, A je primitivno rekurzivna. Tada je i $f(x) := A(x, x) + 1$ primitivno rekurzivna, pa postoji n tako da $f \in \mathcal{O}_n$, tj. $f(x) < A_n(x)$ za sve x . Specijalno, za $x = n$, imamo:

$$A(n, n) + 1 = f(n) < A_n(n) = A(n, n).$$

Kontradikcija. □

27. Zadatak. Da li postoji binarna funkcija v takva da za svaku unarnu primitivnu rekurzivnu funkciju f postoji broj n_f takav da:

$$(\forall x \in \mathbb{N}) \quad f(x) = v(n_f, x)?$$

Da li postoji takva primitivno rekurzivna funkcija.



Parcijalno rekurzivne funkcije i rekurzivne relacije



Definicija. Za $f(\vec{x})$ i $g(\vec{x})$ pišemo:

$$f(\vec{x}) \simeq g(\vec{x})$$

ako $D_f = D_g$, i $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ za sve $\vec{x} \in D_f$.

Primer. Primetimo:

- ▶ $\pi_1^2(f(x), x) \simeq f(x)$, ali
- ▶ $\pi_2^2(f(x), x) \simeq x$ ne mora da važi.



Definicija. Klasa *parcijalno rekurzivnih funkcija* je najmanja klasa koja sadrži osnovne funkcije i zatvorena je za kompoziciju, primitivnu rekurziju i minimizaciju.

Definicija. Funkcija je *rekurzivna* ako je parcijalno rekurzivna i totalna.

Definicija. Relacija R je *rekurzivna* ako je χ_R rekurzivna.

28. Zadatak. Dokazati da je Ackermanova funkcija rekurzivna.



Registarske mašine



Definicija. *Registarska mašina (RM)* je sledeći teorijski model računara:

- ▶ RM se sastoji od beskonačno mnogo *registara* $R_1, R_2, \dots$. Svaki registar R_i sadrži proizvoljno veliki prirodan broj (takođe označen sa R_i).
- ▶ Stanje u registrima se menja izvršavanjem *RM-programa*.
- ▶ RM-program je konačan numerisani niz *RM-komandi*:

1. N_1 – Komanda 1
2. N_2 – Komanda 2
- $\vdots$
- $n.$ N_n – Komanda n

- ▶ Imamo dve vrste RM-komandi:
 - ▶ R_i^+, l – povećaj stanje u registru R_i za 1 i idi na l -tu komandu;
 - ▶ R_i^-, l, m – ako je $R_i > 0$ smanji stanje u registru R_i za 1 i idi na l -tu komandu; inače, idi na m -tu komandu.
- ▶ RM započinje rad pozivom komande N_1 . RM se zaustavlja pozivom nepostojeće komande (N_m za neko $m > n$).



Primer. Pozivom programa:

$$1. R_i^+, 2$$

RM poveća stanje u registru R_i za 1 i zaustavi se.

Primer. Pozivom programa:

$$1. R_i^+, 1$$

RM u svakom koraku povećava stanje u registru R_i za 1 i ne zaustavlja se.

Primer. Pozivom programa:

$$1. R_i^-, 1, 2$$

RM „isprazni” registar R_i i zaustavi se.



Primer. Pozivom programa:

1. $R_i^-, 2, 3$
2. $R_j^+, 1$

RM „prenese” stanje registra R_i u R_j i zaustavi se.

Primer. Pozivom programa:

1. $R_i^-, 2, 4$
2. $R_j^+, 3$
3. $R_k^+, 1$

RM „prenese” stanje registra R_i u R_j i u R_k i zaustavi se.



Definicija. Neka je $\mathcal{M}$ RM-program i $n \geq 0$. Definišemo parcijalnu n -arnu funkciju $f_{\mathcal{M}}^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ sa:

- ▶ $\vec{a} \in D_{f_{\mathcal{M}}^{(n)}} : \iff \mathcal{M}$ se zaustavlja za ulaz:

$$R_1 = a_1, R_2 = a_2, \dots, R_n = a_n, \text{ i } R_m = 0 \text{ za } m > n;$$

- ▶ za $\vec{a} \in D_{f_{\mathcal{M}}^{(n)}}:$

$$f_{\mathcal{M}}^{(n)}(\vec{a}) := \text{stanje u } R_1 \text{ nakon zaustavljanja } \mathcal{M};$$

- ▶ naravno, za $\vec{a} \notin D_{f_{\mathcal{M}}^{(n)}}, f_{\mathcal{M}}^{(n)}(\vec{a}) \uparrow$.

Definicija. Parcijalna n -arna funkcija $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ je *RM-izračunljiva* ako postoji RM $\mathcal{M}$ takva da je $f \simeq f_{\mathcal{M}}^{(n)}$.



Primeri RM-izračunljivih funkcija

29. Lema. Osnovne funkcije su RM-izračunljive.

Dokaz. 0 računa npr. sledeći program:

$$1. R_1^-, 1, 2$$

S računa sledeći program:

$$1. R_1^+, 2$$

π_1^n računa npr. sledeći program:

$$1. R_2^+, 2$$

$\pi_i^n, i > 1$, računa sledeći program:

$$1. R_1^-, 1, 2$$

$$2. R_i^-, 3, 4$$

$$3. R_1^+, 2$$



30. Lema. RM-izračunljive funkcije su zatvorene za kompoziciju.

Dokaz. Neka $\mathcal{G}_i$ računa n -arne g_i , $i = 1, \dots, m$, i neka $\mathcal{H}$ računa m -arnu h .
Neka je N broj takav da programi $\mathcal{G}_i$ i $\mathcal{H}$ ne govore o registrima R_i , $i \geq N$ (i $N > m, n$).

Kompoziciju $f = h(g_1, \dots, g_n)$ računa program opisan sa:



Zatvorenost za kompoziciju II

Kopiraj $R_1, \dots, R_n$ u $R_{N+1}, \dots, R_{N+n}$ koristeći R_N

za $i = 1, \dots, m$ nadovežemo sledeće blokove

Obrisi $R_1, \dots, R_{N-1}$, i kopiraj $R_{N+1}, \dots, R_{N+n}$ u $R_1, \dots, R_n$ koristeći R_N

Pozovi program $\mathcal{G}_i$

Prebaci R_i u R_{N+n+i}

Obrisi $R_1, \dots, R_{N-1}$, i kopiraj $R_{N+n+1}, \dots, R_{N+n+m}$ u $R_1, \dots, R_m$ koristeći R_N

Pozovi program $\mathcal{H}$



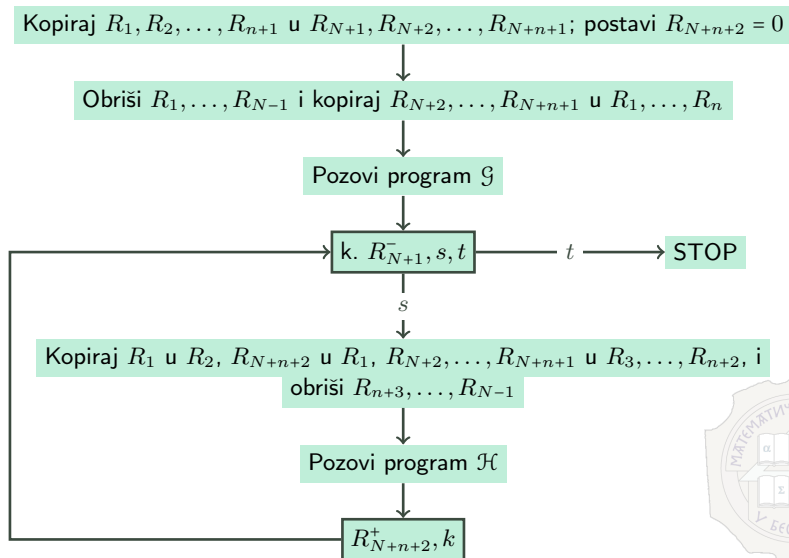
31. Lema. RM-izračunljive funkcije su zatvorene za primitivnu rekurziju.

Dokaz. Neka $\mathcal{G}$ računa n -arnu g i $\mathcal{H}$ računa $(n+2)$ -arnu h . Neka je N broj takav da programi $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ ne govore o registrima R_i , $i \geq N$ ($N > m, n+2$).

Funkciju $f = \text{rec}(g, h)$ računa program opisan sa:



Zatvorenost za primitivnu rekurziju II



32. Lema. RM-izračunljive funkcije su zatvorene za minimizaciju.

Dokaz. Neka $\mathcal{G}$ računa $(n+1)$ -arnu g . Neka je N broj takav da program $\mathcal{G}$ ne govori o registrima R_i , $i \geq N$ (i $N > n+1$).

Funkciju $f(\vec{x}) = (\mu y)(f(y, \vec{x}) = 0)$ računa program opisan sa:



Zatvorenost za minimizaciju II

Kopiraj $R_1, \dots, R_n$ u $R_{N+1}, \dots, R_{N+n}$; postavi $R_{N+n+1} = 0$

Kopiraj $R_{N+n+1}, R_{N+1}, \dots, R_{N+n}$ u $R_1, R_2, \dots, R_{n+1}$

obriši $R_{n+2}, \dots, R_{N-1}$

Pozovi program $\mathcal{G}$

R_1^-, s, t

t

$s. R_{N+n+1}^+$

Kopiraj R_{N+n+1} u R_1

STOP



U prethodnom nizu lema dokazali smo:

33. Teorema. Parcijalno rekurzivne funkcije su RM-izračunljive.



Prirodno pitanje. Da li važi obratno?



Tjuringove mašine



Definicija. *Tjuringova mašina* je teorijski model računara koji se sastoji od:

- ▶ *trake* sa beskonačno mnogo sekvencijalno poređanih *polja*, pri čemu svako polje ima tačno dva susedna polja;
- ▶ *glave* koja se u svakom trenutku nalazi iznad tačno jednog polja čiji sadržaj može da čita i da menja, i u svakom trenutku može da se nalazi u tačno jednom *stanju*.

Svako polje trake može da sadrži jedan od dva simbola: 0 (polje je prazno) i 1 (polje je puno). Pretpostavljamo da su sva polja, osim konačno mnogo njih, prazna.



Označimo sa Q konačan skup stanja u kojima mašina može da bude.

Akcija TM u svakom koraku zavisi od stanja u kome se mašina nalazi i stanja u polju koji glava čita. Rad mašine opisan je (parcijalnom) funkcijom

$\tau : Q \times \{0, 1\} \rightarrow Q \times \{0, 1, L, D\}$, pri čemu $\tau(q, s) = (q', s')$ ima sledeće značenje: Ako je mašina u stanju q i čita simbol s u polju, onda:

- ▶ ako je $s' = 0$ ili $s' = 1$ mašina u dato polje upisuje s' ;
- ▶ ako je $s' = L$ glava se pomera jedno polje ulevo;
- ▶ ako je $s' = D$ glava se pomera jedno polje udesno.

U svakom slučaju mašina ulazi u stanje q' . Ako $\tau(q, s) \uparrow$, mašina se zaustavlja.

Mašina počinje sa radom u stanju $q_0 \in Q$.



Primeri Tjuringovih mašina I

Primer. Mašina koja nalazi prvi par 00 desno i staje iznad prve nule:

	0	1
q_0	$q_1 D$	$q_0 D$
q_1	$q_2 L$	$q_0 D$
q_2	$\uparrow$	$\uparrow$

Primer. Mašina koja nalazi početak trećeg bloka jedinica desno i zaustavlja se (ili upada u beskonačnu petlju ako treći blok jedinica ne postoji):

	0	1
q_0	$q_0 D$	$q_1 1$
q_1	$q_2 0$	$q_1 D$
q_2	$q_2 D$	$q_3 1$
q_3	$q_4 0$	$q_3 D$
q_4	$q_4 D$	$q_5 1$
q_5	$\uparrow$	$\uparrow$



Primer. Pretpostavimo da su na traci zapisana tri bloka jedinica razdvojeni sa po jednom nulom, i da se mašina nalazi na početku prvog bloka. Želimo da dodamo jednu jedinicu na kraj drugog bloka i da transliramo treći za jedno mesto udesno, i da se vratimo na početak prvog bloka.

	0	1
q_0	$q_1 D$	$q_0 D$
q_1	$q_2 1$	$q_1 D$
q_2		$q_3 D$
q_3		$q_4 0$
q_4	$q_5 D$	
q_5	$q_6 1$	$q_5 D$
q_6	$q_7 L$	$q_6 L$
q_7	$q_8 L$	$q_7 L$
q_8	$q_9 D$	$q_8 L$
q_9	$\uparrow$	$\uparrow$



Definicija. Neka je $\mathcal{M}$ Tjuringova mašina i $n \geq 0$. Definišemo parcijalnu n -arnu funkciju $f_{\mathcal{M}}^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ na sledeći način:

- ▶ $\vec{a} \in D_{f_{\mathcal{M}}^{(n)}} : \iff \mathcal{M}$ se zaustavlja za ulaz:

$$\dots 00 \underbrace{1 \dots 1}_{a_1+1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{a_2+1} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{a_n+1} 00 \dots$$

pri čemu se na početku izračunavanja glava nalazi na početku prvog bloka jedinica, i stanje na traci na kraju izračunavanja je oblika:

$$\dots 00 \underbrace{1 \dots 1}_{b+1} 00 \dots$$

pri čemu se glava nalazi na početku ovog bloka.

- ▶ Ako su ispunjeni uslovi iz prethodne tačke, $f_{\mathcal{M}}^{(n)}(\vec{a}) := b$; u suprotnom, $f_{\mathcal{M}}^{(n)} \uparrow$.



Definicija. Parcijalna funkcija $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ je *Tjuring izračunljiva* ako postoji mašina $\mathcal{M}$ takva da je $f \simeq f_{\mathcal{M}}^{(n)}$.

Primer. Osnovna funkcija $(\lambda) 0$ je Tjuring izračunljiva:

	0	1
q_0	$q_1 1$	

Primer. Osnovna funkcija $(\lambda x) x + 1$ je Tjuring izračunljiva:

	0	1
q_0	$q_1 1$	$q_0 L$



Primer. Osnovna funkcija $(\lambda x_1 x_2 x_3) x_2$ je Tjuring izračunljiva:

	0	1
q_0	$q_2 D$	$q_1 1$
q_1	$q_0 D$	$q_1 0$
q_2	$q_3 D$	$q_2 D$
q_3	$q_5 L$	$q_4 1$
q_4	$q_3 D$	$q_4 0$
q_5	$q_5 L$	$q_6 L$
q_5	$q_7 D$	$q_6 L$



34. Teorema. RM-izračunljive funkcije su Tjuring-izračunljive.

Dokaz. Neka je f n -arna RM-izračunljiva funkcija, i neka je $\mathcal{M}$ program za registarsku mašinu koji je izračunava. Neka je $N \geq n$ broj takav da $\mathcal{M}$ ne govori od registrima R_m , $m > N$. Tjuringova mašina koja računa funkciju f opisana je na sledeći način:

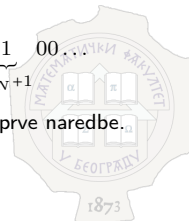
1. Postavljanje trake da predstavlja stanje u registrima $R_1, \dots, R_N$:

- Mašina prođe prvih n blokova jedinica, i doda još $N - n$ jedinica razmaknutih sa po jednom nulom:

$$\dots 00 \underbrace{1 \dots 1}_R \underbrace{0 \dots 0}_R \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_R \underbrace{0 \dots 0}_R \dots 0 \underbrace{1}_R \underbrace{0}_R \underbrace{1}_R \underbrace{0 \dots 0}_R \underbrace{1}_R 00 \dots$$

R_{1+1} R_{2+1} R_{n+1} R_{n+1+1} R_{n+2+1} R_{N+1}

- Mašina se vrati na početak prvog bloka i započinje simulaciju prve naredbe.



2. Ako je k -ta naredba R_i^+, l :

- ▶ Mašina prođe prvih i blokova jedinica, doda jedinicu na i -ti blok, i translira preostalih $N - i$ blokova za po jedno mesto udesno.
- ▶ Mašina se vrati na početak prvog bloka i započinje simulaciju l -te naredbe.

3. Ako je k -ta naredba R_i^-, l, m :

- ▶ Mašina prođe prvih i blokova jedinica, i proveri da li je i -ti blok samo jedna jedinica. Ako nije:
 - ▶ Mašina obriše poslednju jedinicu iz i -tog bloka i translira preostalih $N - i$ blokova za po jedno mesto ulevo.
 - ▶ Mašina se vrati na početak prvog bloka i započinje simulaciju l -te naredbe.

Ako jeste:

- ▶ Mašina se vrati na početak prvog bloka i započinje simulaciju m -te naredbe.

4. Ako k -ta naredba ne postoji:

- ▶ Mašina prođe prvi blok jedinici, pobriše preostale blokove jedinica, vrati se na početak prvog bloka i zaustavi se.



Šta za sada znamo?

Za sada smo dokazali:

$$\begin{aligned}\{\text{parcijlano izračunljive funkcije}\} &\subseteq \{\text{RM-izračunljive funkcije}\} \\ &\subseteq \{\text{Tjuring-izračunljive funkcije}\}.\end{aligned}$$



Pretpostavimo da su $q_0, q_1, \dots, q_n$ stanja Tjuringove mašine, gde je q_n zaustavno stanje, što znači da $\tau(q_n, 0)$ i $\tau(q_n, 1)$ nisu definisani. Možemo da pretpostavimo da je mašina u svim ostalim stanjima potpuno definisana, tj. ako $\tau(q_i, e)$ nije definisano stanje, možemo da ga dodefinišemo da $\tau(q_i, e) = (q_n, e)$. Na taj način, q_n je jedino zaustavno stanje. Ovakva mašina je u *standardnom obliku*, i primetimo da za svaku mašinu možemo da pretpostavimo da je u standardnom obliku (do na očigledne modifikacije mašine).



Sada mašinu možemo da poistovetimo da nizom dužine $4n$:

$$(k_0, a_0, m_0, b_0, \dots, k_i, a_i, m_i, b_i, \dots, k_{n-1}, a_{n-1}, m_{n-1}, b_{n-1}),$$

gde $k_i, m_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ i $a_i, b_i \in \{0, 1, 2, 3\}$, i gde se (k_i, a_i, m_i, b_i) interpretira kao:

$$\tau(q_i, 0) = (q_{k_i}, a_i) \quad \text{i} \quad \tau(q_i, 1) = (q_{m_i}, b_i),$$

gde smo označili $2 = L$ i $3 = D$.

Kod naše mašine je sada kod dodeljenog niza:

$$\lceil k_0, a_0, m_0, b_0, \dots, k_i, a_i, m_i, b_i, \dots, k_{n-1}, a_{n-1}, m_{n-1}, b_{n-1} \rceil.$$



35. Lema. Predikat $TM(e) : \Leftrightarrow$ „ e je kod Tjuringove mašine” je primitivno rekurzivan.

Dokaz. $TM(e)$ je konjunkcija sledećih stvari:

- ▶ $e > 0$ i $\text{ost}(\ell(e), 4) = 0$;
- ▶ $(\forall i < \text{kol}(\ell(e), 4))((e)_{4i} \leq \text{kol}(\ell(e), 4) \wedge (e)_{4i+2} \leq \text{kol}(\ell(e), 4))$;
- ▶ $(\forall i < \text{kol}(\ell(e), 4))((e)_{4i+1} \leq 3 \wedge (e)_{4i+3} \leq 3)$.



Pretpostavimo da je u nekom trenutku traka u sledećem stanju:

$$\dots 001e_1 \dots e_n \overset{\downarrow}{e_{n+1}} \dots, e_m 100 \dots$$

Tada je ovo stanje trake, zajedno sa položajem glave, jedinstveno određeno sa sledeća dva broja:

$$levo = (1e_1 \dots e_n)_2 \quad i \quad desni = (1e_m \dots e_{n+1})_2.$$



Pretpostavimo da je e kod Tjuringove mašine $\mathcal{M}$. Želimo da ispratimo izračunavanje funkcije $f_{\mathcal{M}}^{(n)} = f_e^{(n)}$.

Uočimo sledeće funkcije:

$stanje_n(e, k, a)$ = stanje mašine u k -tom koraku izračunavanja
za ulaz $(\gamma_1^n(a), \dots, \gamma_n^n(a))$

$levi_n(e, k, a)$ = levi broj u k -tom koraku izračunavanja
za ulaz $(\gamma_1^n(a), \dots, \gamma_n^n(a))$

$desni_n(e, k, a)$ = desni broj u k -tom koraku izračunavanja
za ulaz $(\gamma_1^n(a), \dots, \gamma_n^n(a))$

(U trenutku kada se završi izračunavanje, ako se završi, funkcije postaju konstante.)

36. Lema. Prethodne funkcije su primitivno rekurzivne.

Dokaz. Na tabli. ♣



- ▶ Mašina se zaustavlja ako i samo ako postoji k tako da je $stanje_n(e, k, a) = \text{kol}(\ell(e), 4)$.
- ▶ U tom slučaju glava je u korektnom položaju ako je za to k :

$$levi_n(e, k, a) = 0 \text{ i } desni_n(e, k, a) = \text{oblika } 2^{m+1} - 1.$$

- ▶ Predikat $A(x) : \Leftrightarrow x$ je oblika $2^{m+1} - 1$ je primitivno rekurzivan; zaista, $A(x) \Leftrightarrow x > 0 \wedge x + 1 = 2^{(\mu l < x)} 2^{l > x}$.
- ▶ U tom slučaju rezultat izračunavanja je:

$$(\mu m < desni_n(e, k, a)) desni_n(e, k, a) + 1 = 2^{m+1}.$$



Definicija. Označimo sa $T_n(e, a, y)$ predikat koji kaže:

- ▶ e je kod TM;
- ▶ y je kod izračunavanja koje se korektno završilo mašine sa kodom e za n -ulaz sa kodom a , tj. y je kod niza oblika:

$$y = \ulcorner stanje_n(e, 0, a), levi_n(e, 0, a), desni_n(e, 0, a), \dots$$

$$\dots, stanje_n(e, h, a), levi_n(e, h, a), desni_n(e, h, a) \urcorner,$$

koji zadovoljava dodatne uslove da se izračunavanje završilo i da je mašina u korektnom stanju za izlaz.

37. Lema. T_n je primitivno rekurzivan predikat.

Dokaz. Na tabli. ♣



Definicija. Neka je $U(y)$ funkcija koja vraća rezultat izračunavanja za slučaj da je $T_n(e, a, y)$.

38. Lema. U je primitivno rekurzivna.

Dokaz. *Na tabli.* ♣



39. Teorema. Označimo sa Φ_n parcijalnu rekursivnu funkciju:

$$\Phi_n(e, a) \simeq U((\mu y) T_n(e, a, y)).$$

a. Za svaku Turing-izračunljivu n -arnu funkciju f postoji e tako da:

$$f(a_1, \dots, a_n) \simeq \Phi_n(e, \gamma^n(a_1, \dots, a_n)).$$

b. Svaka Turing izračunljiva funkcija je parcijalno rekursivna.

40. Zadatak. Dokazati da za svaku parcijalnu rekursivnu n -arnu funkciju f postoji beskonačno mnogo e tako da $f(a_1, \dots, a_n) \simeq \Phi_n(e, \gamma^n(a_1, \dots, a_n))$.

Definicija. Funkciju $\Phi_n(e, \gamma^n(a_1, \dots, a_n))$ označavamo sa $\varphi_e^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$. Umesto $\varphi_e^{(n)}(a_1, \dots, a_n)$ kraće pišemo $e \cdot (a_1, \dots, a_n)$.



41. Teorema. Za sve $m, n \geq 1$ postoji $(m + 1)$ -arna primitivno rekurzivna funkcija S_n^m takva da za sve $e, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ važi:

$$S_n^m(e, x_1, \dots, x_m) \cdot (y_1, \dots, y_n) \simeq e \cdot (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n).$$

Dokaz. *Na tabli.* ♣



42. Teorema. Postoji primitivno rekurzivna unarna funkcija F_n takva da:

$$F_n(e) \cdot \vec{x} \simeq e \cdot (\vec{x}, F_n(e)),$$

za sve $e, \vec{x}$, $|\vec{x}| = n$.

Dokaz. Uočimo funkciju $G(z, y, \vec{x}) \simeq z \cdot (\vec{x}, S_n^1(y, y))$; ona je parcijalno rekurzivna, i neka je g neki njen kod:

$$g \cdot (z, y, \vec{x}) \simeq G(z, y, \vec{x}).$$

Stavimo $F_n(e) = S_n^1(S_{n+1}^1(g, e), S_{n+1}^1(g, e))$.



Imamo:

$$\begin{aligned} F_n(e) \cdot \vec{x} &\simeq S_n^1(S_{n+1}^1(g, e), S_{n+1}^1(g, e)) \cdot \vec{x} \\ &\simeq S_{n+1}^1(g, e) \cdot (S_{n+1}^1(g, e), \vec{x}) \\ &\simeq g \cdot (e, S_{n+1}^1(g, e), \vec{x}) \\ &\simeq G(e, S_{n+1}^1(g, e), \vec{x}) \\ &\simeq e \cdot (\vec{x}, S_n^1(S_{n+1}^1(g, e), S_{n+1}^1(g, e))) \\ &\simeq e \cdot (\vec{x}, F_n(e)). \quad \square \end{aligned}$$

43. Posledica. Za svako $n \geq 1$ i svaku $(n + 1)$ -arnu parcijalnu rekurzivnu funkciju f postoji e tako da:

$$e \cdot \vec{x} \simeq f(\vec{x}, e).$$



45. Teorema. Postoji primitivno rekurzivna $(m + 1)$ -arna funkcija K_n^m takva da:

$$K_n^m(g_1, \dots, g_m, h) \cdot \vec{x} \simeq h \cdot (g_1 \cdot \vec{x}, \dots, g_m \cdot \vec{x}),$$

gde $|\vec{x}| = n$.

Dokaz. Uočimo parcijalno rekurzivnu funkciju:

$$E(g_1, \dots, g_m, h, \vec{x}) \simeq h \cdot (g_1 \cdot \vec{x}, \dots, g_m \cdot \vec{x}).$$

Neka je e kod funkcije E : $e \cdot (g_1, \dots, g_m, h, \vec{x}) \simeq E(g_1, \dots, g_m, h, \vec{x})$.

Po Smn-teoremi važi:

$$S_n^{m+1}(e, g_1, \dots, g_m, h) \cdot \vec{x} = e \cdot (g_1, \dots, g_m, h, \vec{x}).$$

Dakle, $K_n^m(\vec{y}, z) = S_n^{m+1}(e, \vec{y}, z)$ je željena funkcija.



46. Teorema. Postoji primitivno rekurzivna binarna funkcija R_n takva da:

$$R_n(g, h) \cdot (y, \vec{x}) \simeq \begin{cases} g \cdot \vec{x} & \text{ako } y = 0 \\ h \cdot (y - 1, R_n(g, h) \cdot (y - 1, \vec{x}), \vec{x}) & \text{ako } y > 0 \end{cases},$$

gde $|\vec{x}| = n$.

Dokaz. Uočimo parcijalno rekurzivnu funkciju:

$$E(g, h, y, \vec{x}, z) \simeq \begin{cases} g \cdot \vec{x} & \text{ako } y = 0 \\ h \cdot (y - 1, z \cdot (y - 1, \vec{x}), \vec{x}) & \text{ako } y > 0 \end{cases}.$$

Neka je e njen kod: $e \cdot (g, h, y, \vec{x}, z) \simeq E(g, h, y, \vec{x}, z)$.

Po Smn-teoremi važi:

$$S_{n+2}^2(e, g, h) \cdot (y, \vec{x}, z) \simeq e \cdot (g, h, y, \vec{x}, z).$$



Po teoremi rekurzije imamo:

$$F_{n+1}(S_{n+2}^2(e, g, h)) \cdot (y, \vec{x}) \simeq S_{n+2}^2(e, g, h) \cdot (y, \vec{x}, F_{n+1}(S_{n+2}^2(e, g, h))).$$

Označimo $R_n(g, h) = F_{n+1}(S_{n+2}^2(e, g, h))$. Sada je:

$$R_n(g, h) \cdot (y, \vec{x}) \simeq \begin{cases} E(g, h, y, \vec{x}, R_n(g, h)) & \\ \simeq \begin{cases} g \cdot \vec{x} & \text{ako } y = 0 \\ h \cdot (y - 1, R_n(g, h) \cdot (y - 1, \vec{x}), \vec{x}) & \text{ako } y > 0 \end{cases} \end{cases}$$



47. Teorema. Postoji primitivno rekurzivna unarna funkcija M_n takva da:

$$M_n(g) \cdot \vec{x} \simeq (\mu y)(g \cdot (y, \vec{x}) = 0),$$

gde $|\vec{x}| = n$.

Dokaz. Uočimo parcijalnu rekurzivnu funkciju:

$$E(g, \vec{x}) \simeq (\mu y)(g \cdot (y, \vec{x}) = 0).$$

Neka je e njen kod: $e \cdot (g, \vec{x}) \simeq E(g, \vec{x})$.

Po Smn-teoremi imamo:

$$S_n^1(e, g) \cdot \vec{x} \simeq e \cdot (g, \vec{x}).$$

Dakle, $M_n(z) = S_n^1(e, z)$ je željena funkcija.



48. Teorema. Akermanova funkcija je rekurzivna.

Dokaz. Setimo se: $A(0, x) := x + 1$, $A(n + 1, 0) := A(n, 1)$, i
 $A(n + 1, x + 1) := A(n, A(n + 1, x))$.

Uočimo parcijalnu rekurzivnu funkciju:

$$E(n, x, z) \simeq \begin{cases} x + 1 & \text{ako } n = 0 \\ z \cdot (n - 1, 1) & \text{ako } n > 0 \text{ i } x = 0 \\ z \cdot (n - 1, z \cdot (n, x - 1)) & \text{ako } n, x > 0 \end{cases}$$

Po teoremi rekurzije postoji a tako da: $a \cdot (n, x) \simeq E(n, z, a)$, tj:

$$a \cdot (n, x) \simeq \begin{cases} x + 1 & \text{ako } n = 0 \\ a \cdot (n - 1, 1) & \text{ako } n > 0 \text{ i } x = 0 \\ a \cdot (n - 1, a \cdot (n, x - 1)) & \text{ako } n, x > 0 \end{cases}$$

Sada je jasno $A = \varphi_a^{(2)}$.



Rekurzivni skupovi / odlučivost



Definicija. Neka je $P \subseteq \mathbb{N}^n$. Problem „ $\vec{x} \in P$ ” je *odlučiv* ako je P rekurzivan, tj. ako je χ_P rekurzivna funkcija (tj. ako postoji Tjuringova mašina koja korektno vraća odgovor na pitanje „Da li $\vec{x} \in P$?”).



Definicija. *Halting problem* je dat podskupom:

$$\mathcal{H} = \{(e, a) \mid (\exists y) T_1(e, a, y)\}.$$

Dakle, halting problem je problem da li se Turingova mašina sa kodom e korektno zaustavlja za ulaz a (ili da li je vrednost $e \cdot a$ definisana, tj. da li $(e, a) \in D_{\Phi_1}$).

49. Teorema. Halting problem je neodlučiv.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, $\chi_{\mathcal{H}}$ je rekurzivna. Neka je f parcijalna rekurzivna funkcija takva da $D_f = \{0\}$ (npr. $f(x) \simeq (\mu y) x + y = 0$). Tada je $f(\chi_{\mathcal{H}}(e, a))$ parcijalno rekurzivna funkcija, i po teoremi rekurzije postoji e_0 tako da $e_0 \cdot a \simeq f(\chi_{\mathcal{H}}(e_0, a))$. Odatle, za svako a :

$$e_0 \cdot a \downarrow \iff \chi_{\mathcal{H}}(e_0, a) = 0 \iff e_0 \cdot a \uparrow.$$

Kontradikcija.



Definicija. *Standardan problem* je dat podskupom:

$$\mathcal{K} = \{x \mid (\exists y) T_1(x, x, y)\} = \{x \mid x \cdot x \downarrow\}.$$

50. Teorema. Standardan problem je neodlučiv.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, $\chi_{\mathcal{K}}$ je rekurzivna. Neka je f parcijalna rekurzivna funkcija takva da $D_f = \{0\}$. Tada je $f(\chi_{\mathcal{K}}(x))$ parcijalno rekurzivna funkcija, i neka je e njen kod: $e \cdot x \simeq f(\chi_{\mathcal{K}}(x))$. Tada:

$$e \cdot e \downarrow \iff \chi_{\mathcal{K}}(e) = 0 \iff e \cdot e \uparrow.$$

Kontradikcija.



Definicija. Neka je $P \subseteq \mathbb{N}^n$ i $Q \subseteq \mathbb{N}^m$. Problem P se svodi na problem Q , $P \leq_m Q$, ako postoje n -arne rekurzivne funkcije $f_1, \dots, f_m$ takve da:

$$\vec{x} \in P \iff (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \in Q.$$

Primer. $\mathcal{K} \leq_m \mathcal{H}$:

$$x \in \mathcal{K} \iff x \cdot x \downarrow \iff (x, x) \in \mathcal{H},$$

pa funkcije $f_1 = f_2 = \pi_1^1$ svedoče svođenje.

51. Teorema. Ako $P \leq_m Q$ i Q je odlučiv, onda je i P odlučiv.

Dokaz. $\chi_P = \chi_Q(f_1, \dots, f_m)$.

Iz $\mathcal{K} \leq_m \mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ je neodlučiv sledi da je $\mathcal{H}$ neodlučiv.

(Ovaj dokaz neodlučivosti halting problema ne koristi teoremu rekurzije.)



52. Teorema. Neka je $P \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan skup. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

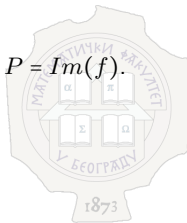
- (1) P je rekurzivan (odlučiv);
- (2) postoji rastuća rekurzivna funkcija f takva da je $P = \text{Im}(f)$;
- (3) postoji neopadajuća rekurzivna funkcija f takva da je $P = \text{Im}(f)$.

Dokaz. Na tabli. ♣

53. Teorema. Neka je $P \subseteq \mathbb{N}$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

- (1) P je rekurzivan;
- (2) $P = \emptyset$ ili postoji neopadajuća rekurzivna funkcija f takva da je $P = \text{Im}(f)$.

Dokaz. Na tabli. ♣



Definicija. Skup $P \subseteq \mathbb{N}$ je *indeksni* ako:

$$e \in P \wedge \varphi_e = \varphi_{e'} \implies e' \in P.$$

54. Teorema. Ako je P rekurzivan, indeksni skup, onda je $P = \emptyset$ ili $P = \mathbb{N}$.

Dokaz. Pretpostavimo P je indeksni, $P \neq \emptyset$ i $P \neq \mathbb{N}$. Ako je P indeksni skup, onda je i P^c indeksni skup, pa, bez umanjenja opštosti, možemo da pretpostavimo da indeksi prazne funkcije pripadaju P^c . Neka $e \in P$. Uočimo funkciju:

$$F(x, y) \simeq \begin{cases} e \cdot y & \text{ako } x \cdot x \downarrow \\ \uparrow & \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija F je parcijalno rekurzivna:

$$F(x, y) \simeq \Phi_1(e, y) + 0 \cdot \Phi_1(x, x);$$

neka je f njen kod: $f \cdot (x, y) \simeq F(x, y)$.



Po Smn-teoremi je: $S_1^1(f, x) \cdot y \simeq f \cdot (x, y) \simeq F(x, y)$. Primetimo:

$$x \in \mathcal{K} \iff x \cdot x \downarrow \iff S_1^1(f, x) \in P.$$

Dokaz druge implikacije je:

- ▶ ako $x \cdot x \downarrow$, onda $S_1^1(f, x) \cdot y \simeq e \cdot y$, pa $e \in P$ povlači $S_1^1(f, x) \in P$;
- ▶ ako $x \cdot x \uparrow$, onda $S_1^1(f, x)$ je kod prazne funkcije, pa $S_1^1(f, x) \in P^c$.

Dakle, $\mathcal{K} \leq_m P$, pa je P neodlučiv (nije rekurzivan).



Dokazati da $P = \{e \mid \varphi_e \text{ je totalna}\}$ nije rekurzivan.

I naćin. Oćigledno $P \neq \emptyset$, $P \neq \mathbb{N}$ i P je indeksni; po Rajsovoj teoremi P nije rekurzivan.

II naćin. Dokazaćemo $\mathcal{K} \leq_m P$. Uoćimo parcijalno rekurzivnu funkciju:

$$F(x, y) \simeq \begin{cases} 0 & \text{ako } x \cdot x \downarrow; \\ \uparrow & \text{ako } x \cdot x \uparrow \end{cases};$$

neka je f njen kod. Po Smn-teoremi: $S_1^1(f, x) \cdot y \simeq f \cdot (x, y) \simeq F(x, y)$.

- ▶ Ako $x \cdot x \downarrow$, $S_1^1(f, x)$ je kod $Z(y)$, pa $S_1^1(f, x) \in P$.
- ▶ Ako $x \cdot x \uparrow$, $S_1^1(f, x)$ je kod prazne funkcije, pa $S_1^1(f, x) \in P^c$.

Dakle, $x \in \mathcal{K} \iff x \cdot x \downarrow \iff S_1^1(f, x) \in P$.



Rekurzivno nabrojivi skupovi / parcijalna odlučivost



Definicija. Skup $P \subseteq \mathbb{N}$ je *rekurzivno nabrojiv* (*parcijalno odlučiv*) ako je $P = \emptyset$ ili ako postoji unarna primitivno rekurzivna funkcija f takva da $Im(f) = P$.
U drugom slučaju važi $P = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}$, i odatle naziv nabrojiv skup.

55. Teorema. Neka $P \subseteq \mathbb{N}$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:

- (1) P je rekurzivno nabrojiv;
- (2) $P = \emptyset$ ili postoji k -arna primitivno rekurzivna funkcija f t.d. $Im(f) = P$;
- (3) postoji unarna parcijalno rekurzivna funkcija f t.d. $Im(f) = P$;
- (4) postoji k -arna parcijalno rekurzivna funkcija f t.d. $Im(f) = P$;
- (5) postoji unarna parcijalno rekurzivna funkcija f t.d. $D_f = P$;
- (6) postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^2$ t.d. $P(x) \iff \exists y R(x, y)$;
- (7) postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ t.d. $P(x) \iff \exists \bar{y} R(x, \bar{y})$;
- (8) postoji primitivno rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^2$ t.d. $P(x) \iff \exists y R(x, y)$;
- (9) postoji primitivno rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ t.d. $P(x) \iff \exists \bar{y} R(x, \bar{y})$.

Dokaz. Na tabli. ♣

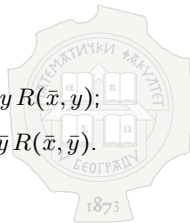


Definicija. Skup $P \subseteq \mathbb{N}^k$ je *rekurzivno nabrojiv* ako postoji parcijalno rekurzivna funkcija f takva da je $D_f = P$.

Definicija. $W_e^{(k)} := D_{\varphi_e^{(k)}}$ i $E_e^{(k)} := \text{Im}(\varphi_e^{(k)})$. Za $n = 1$ pišemo W_e i E_e .
Dakle, rekurzivno nabrojivi skupovi su tačno skupovi oblika $W_e^{(n)}$.

56. Teorema. Sledeći iskazi su ekvivalentni za $P \subseteq \mathbb{N}^k$:

- (1) P je rekurzivno nabrojiv;
- (2) postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ t.d. $P(x) \iff \exists y R(\bar{x}, y)$;
- (3) postoji rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+l}$ t.d. $P(\bar{x}) \iff \exists \bar{y} R(\bar{x}, \bar{y})$;
- (4) postoji primitivno rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ t.d. $P(\bar{x}) \iff \exists y R(\bar{x}, y)$;
- (5) postoji primitivno rekurzivan skup $R \subseteq \mathbb{N}^{k+l}$ t.d. $P(\bar{x}) \iff \exists \bar{y} R(\bar{x}, \bar{y})$.



Primer. $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ su rekurzivno nabrojivi.

Primer. $P = \{e \mid \varphi_e \text{ je totalna}\}$ nije rekurzivno nabrojiv.

57. Teorema. Ako $P \leq_m Q$ i Q je rekurzivno nabrojiv, onda je i P rekurzivno nabrojiv.

Primer. $Q = \{e \mid \varphi_e \simeq Z\}$ nije rekurzivno nabrojiv.



58. Teorema. Skup $P \subseteq \mathbb{N}^k$ je rekurzivan ako i samo ako su i P i P^c rekurzivno nabrojivi.

Dokaz. Na tabli. ♣

Primer. $\mathcal{H}^c$ i $\mathcal{K}^c$ nisu rekurzivno nabrojivi.

Primer. $P = \{e \mid W_e \text{ je konačan}\}$ nije rekurzivno nabrojiv.



Definicija. Neka su f i g parcijalno rekurzivne k -arne funkcije. Sa $f \subseteq g$ označavamo da je $D_f \subseteq D_g$ i za svako $\bar{x} \in D_f$ važi $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$. Funkcija f je konačna ako je D_f konačan.

59. Teorema. Neka je $\mathcal{F}$ neka familija parcijalno rekurzivnih k -arnih funkcija i $I_{\mathcal{F}} = \{e \mid \varphi_e^{(k)} \in \mathcal{F}\}$. Pretpostavimo da je $I_{\mathcal{F}}$ rekurzivno nabrojiv. Tada važi:

$$f \in \mathcal{F} \iff \text{postoji konačna funkcija } f_0 \in \mathcal{F} \text{ tako da } f_0 \subseteq f.$$

Dokaz. Na tabli. ♣

Komentar. Obrat Rajs-Šapirove teoreme ne važi.

Komentar. Rajsova teorema je specijalan slučaj Rajs-Šapirove teoreme.



m -svođenje



Definicija. Neka $A \subseteq \mathbb{N}^k$ i $B \subseteq \mathbb{N}^l$. Skup A se svodi na B ako postoje rekurzivne k -arne funkcije $F_0, \dots, F_{l-1}$ tako da:

$$\bar{x} \in A \iff (F_0(\bar{x}), \dots, F_{l-1}(\bar{x})) \in B.$$

Za skupove $A \subseteq \mathbb{N}^k$ i $B \subseteq \mathbb{N}^l$ pišemo $A \leq_m B$ ako se A svodi na B .

Komentar. $\leq_m$ je refleksivna i tranzitivna (preduređenje).

Definicija. A i B su m -ekvivalentni, $A \equiv_m B$, ako $A \leq_m B$ i $B \leq_m A$.

Komentar. $\equiv_m$ je relacija ekvivalencije.

Komentar. Za $A \subseteq \mathbb{N}^k$ imamo $A \equiv_m \{\gamma^k(\bar{x}) \mid \bar{x} \in A\} \subseteq \mathbb{N}$, pa su relacije $\leq_m$ i

$\equiv_m$ potpuno određene na podskupovima od $\mathbb{N}$.

Od sada posmatramo samo podskupove od $\mathbb{N}$.



Definicija. m -stepen skupa A , u oznaci $d_m(A)$, je $\equiv_m$ -klasa skupa A .

Komentar. Relacija $\leq_m$ određuje parcijalno uređenje među stepenima.

60. Tvrdjenje.

- a. $A \leq_m B$ akko $A^c \leq_m B^c$.
- b. $d_m(\emptyset) = \{\emptyset\}$ i $d_m(\mathbb{N}) = \{\mathbb{N}\}$.
- c. Stepeni $d_m(\emptyset)$ i $d_m(\mathbb{N})$ su minimalni u uređenju $\leq_m$.
- d. Za svaki $A \neq \emptyset, \mathbb{N}$, $d_m(\emptyset), d_m(\mathbb{N}) <_m d_m(A)$.

61. Tvrdjenje. Neka je $A \neq \emptyset, \mathbb{N}$ rekurzivan skup.

- a. $d_m(A)$ je familija svih rekurzivnih skupova različitih od $\emptyset$ i $\mathbb{N}$.
- b. $d_m(A)$ je najmanji stepen različit od $d_m(\emptyset)$ i $d_m(\mathbb{N})$.



Definicija. Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova od $\mathbb{N}$. Element $A \in \mathcal{F}$ je m -potpun u $\mathcal{F}$ ako za svaki $X \in \mathcal{F}$ važi $X \leq_m A$ (A je $\leq_m$ -najveći u $\mathcal{F}$).

62. Teorema. $\mathcal{K}$ je m -potpun za rekurzivno nabrojive skupove.

63. Tvrdjenje. Neka $A, B \subseteq \mathbb{N}$ i neka je $A * B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x + 1 \mid x \in B\}$. Tada $A * B$ je supremum od A i B u smislu preduređenja $\leq_m$.

64. Tvrdjenje. Neka je $A \neq \emptyset, \mathbb{N}$ rekurzivno nabrojiv i neka je $R \neq \emptyset, \mathbb{N}$ rekurzivan skup. Tada je R infimum od A i A^c .



Definicija.

- a. Skup $P \subseteq \mathbb{N}$ je produktivan ako postoji parcijalno rekurzivna funkcija f , *produktivna funkcija za P* , takva da:

$$(\forall e)(W_e \subseteq P \rightarrow f(e) \in P \setminus W_e).$$

- b. Skup $C \subseteq \mathbb{N}$ je kreativan ako je rekurzivno nabrojiv i C^c je produktivan, tj. postoji parcijalno rekurzivna funkcija f , *kreativna funkcija za C* , takva da:

$$(\forall e)(W_e \cap C = \emptyset \rightarrow f(e) \downarrow \wedge f(e) \notin C \cup W_e).$$

Primer.

- a. $\mathcal{K}^c$ je produktivan sa produktivnom funkcijom $f(x) = x$.
b. $\mathcal{K}$ je kreativan.



Tvrđenje. Kreativni skupovi nisu rekurzivni.

65. Teorema.

- a. Produktivan skup ima (totalno) rekurzivnu produktivnu funkciju.
- b. Ako je P produktivan, onda P nije rekurzivno nabrojiv.
- c. Ako je P produktivan, onda P sadrži beskonačan rekurzivno nabrojiv podskup.
- d. Ako je P produktivan i $P \leq_m S$, onda je i S produktivan.
- e. (Majhil) P je produktivan ako i samo ako $\mathcal{K}^c \leq_m P$.

Posledica. Skup je kreativan ako i samo ako je m -potpun za rekurzivno nabrojive skupove.



Definicija. Skup P je prost ako je rekurzivno nabrojiv, P^c je beskonačan i P^c ne sadrži beskonačan rekurzivno nabrojiv podskup.

66. Tvrdjenje. Prost skup nije rekurzivan i nije kreativan (nije m -potpun za rekurzivno nabrojive skupove).

Komentar. Ako postoji prost skup P , za njega važi $d_m(R) <_m d_m(P) <_m d_m(\mathcal{K})$.

67. Teorema. Skup $S = \{(e, x) \mid x \in W_e \wedge x > 2e\}$ je prost. Dakle, prosti skupovi postoje.



Definicija.

- a. Funkcija $k(x) := \min\{e: \varphi_e(0) = x\}$ zove se *Kolmogorovljeva funkcija*.
- b. x je *Kolmogorovljev slučajan broj* ako $x \leq k(x)$.

Komentar. $k(x)$ je totalna funkcija.

68. Teorema. (Kolmogorov) Skup $\{x: x > k(x)\}$ je prost.



Aritmetička hijerarhija



Definicija. Za $n \geq 0$ definišemo klase Σ_n i Π_n aritmetičkih relacija sa:

- a. Σ_0 i Π_0 su klase primitivno rekurzivnih relacija;
- b. $S(\vec{x}) \in \Sigma_{n+1}$ ako postoji $S'(\vec{x}, y) \in \Pi_n$ tako da:

$$S(\vec{x}) \iff \exists y S'(\vec{x}, y);$$

- c. $S(\vec{x}) \in \Pi_{n+1}$ ako postoji $S'(\vec{x}, y) \in \Sigma_n$ tako da:

$$S(\vec{x}) \iff \forall y S'(\vec{x}, y).$$

- d. Klasu Δ_n definišemo sa $\Delta_n := \Sigma_n \cap \Pi_n$ za sve $n \geq 0$.



Primeri.

- a. $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0 =$ primitivno rekurzivni skupovi;
- b. $\Sigma_1 =$ rekurzivno nabrojivi skupovi;
- c. $\Pi_1 =$ komplementi rekurzivno nabrojivih skupova;
- d. $\Delta_1 =$ rekurzivni skupovi.



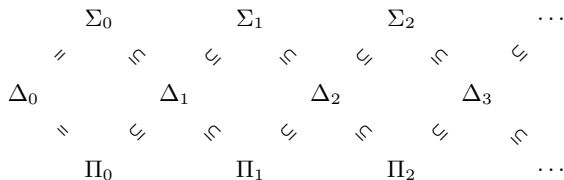
69. Lema.

- a. Za svako $n \geq 0$, $S \in \Sigma_n \iff S^c \in \Pi_n$.
- b. Za svako $n \geq 0$, ako je $S \in \Sigma_n$ ($S \in \Pi_n$), onda je i $S \times \mathbb{N} \in \Sigma_n$ ($S \times \mathbb{N} \in \Pi_n$).
- c. Za svako $n \geq 1$, ako $S(y_1, \dots, y_m) \in \Sigma_n(\Pi_n)$ i ako su $f_1, \dots, f_m : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ (totalne) rekurzivne, onda i $S(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \in \Sigma_n(\Pi_n)$. Ako su funkcije f_i primitivno rekurzivne, onda prethodno važi i za $n = 0$.
- d. Za svako $n \geq 0$, Σ_n i Π_n su zatvoreni za konačne preseke i unije.
- e. Za svako $n \geq 0$, Σ_n i Π_n su zatvoreni za ograničene kvantifikacije.
- f. Za svako $n \geq 1$, Σ_n je zatvorena za (neograničenu) egzistencijalnu, a Π_n za (neograničenu) univerzalnu kvantifikaciju.



70. Teorema. Za svako $n \geq 1$, ako $S \leq_m R$ i $R \in \Sigma_n(\Pi_n)$, onda i $S \in \Sigma_n(\Pi_n)$.

71. Teorema. Za svako $n \geq 0$, $\Sigma_n \cup \Pi_n \subseteq \Delta_{n+1}$.



Definicija. Za $n, k \geq 1$ definišemo Σ_n -relacije $E_n^{(k)} \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ sa:

$$E_n^{(k)}(z, \vec{x}) : \Longleftrightarrow (\exists y_1)(\forall y_2) \dots (\forall y_{n-1})(\exists t) T_{n+k-1}(z, \gamma^{n+k-1}(\vec{x}, \vec{y}), t)$$

ako je n neparno i:

$$E_n^{(k)}(z, \vec{x}) : \Longleftrightarrow (\exists y_1)(\forall y_2) \dots (\exists y_{n-1})(\forall t) \neg T_{n+k-1}(z, \gamma^{n+k-1}(\vec{x}, \vec{y}), t)$$

ako je n parno, gde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$ i $\vec{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$.

72. Teorema. Neka je $n \geq 1$.

a. Za svaku Σ_n -relaciju $S \subseteq \mathbb{N}^k$ postoji broj e takvo da:

$$S(\vec{x}) \Longleftrightarrow E_n^{(k)}(e, \vec{x}).$$

b. Za svaku Π_n -relaciju $S \subseteq \mathbb{N}^k$ postoji broj e takvo da:

$$S(\vec{x}) \Longleftrightarrow \neg E_n^{(k)}(e, \vec{x}).$$



73. Teorema.

- a. Za svako $n \geq 1$, $E_n^{(1)} \in \Sigma_n \setminus \Pi_n$.
- b. Sve inkluzije u aritmetičkoj hijerarhiji su stroge.

74. Teorema. Za sve $n, k \geq 1$, $E_n^{(k)}$ je m -potpuna za Σ_n , pa je $\neg E_n^{(k)}$ je m -potpuna za Π_n .



Varijante Tjuringove mašine



Naša Tjuringova mašina je bila opisana na sledeći način:

- ▶ beskonačna traka u oba smera;
- ▶ svako polje može da sadrži 0 (polje je prazno) ili 1 (polje je popunjeno);
- ▶ konačan skup stanja Q , sa istaknutim početnim stanjem q_0 ;
- ▶ rad je određen parcijalnom funkcijom $Q \times \{0, 1\} \rightarrow Q \times \{0, 1, L, D\}$.

Ekvivalentan koncept dobijamo ako tražimo:

- ▶ rad je određen parcijalnom funkcijom $Q \times \{0, 1\} \rightarrow Q \times \{0, 1\} \times \{L, D\}$;

ili:

- ▶ rad je određen parcijalnom funkcijom $Q \times \{0, 1\} \rightarrow Q \times \{0, 1\} \times \{L, D, N\}$,
gde N znači „ne pomeraj se”.



Opštiji koncept Tjuringove mašine opisan je sa:

- ▶ beskonačna traka u oba smera;
- ▶ alfabet ulaza Σ je konačan skup koji ne sadrži prazan znak $\mathbf{b}$;
- ▶ alfabet trake Γ je konačan skup takav da $\mathbf{b} \in \Gamma$ i $\Sigma \subseteq \Gamma$;
- ▶ konačan skup stanja, sa istaknutim početnim stanjem q_0 ;
- ▶ rad je određen funkcijom $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, D\}$ ili $Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, D, N\}$.

I ovakav koncept je ekvivalentan polaznoj mašini, i takođe ako stavimo:

- ▶ traka ima levi početak.



Tjuringova mašina sa više traka opisana je sa:

- ▶ k traka, od kojih svaka ima svoju glavu;
- ▶ alfabeti ulaza i trake, i stanja kao i ranije;
- ▶ rad je određen funkcijom $Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, D, N\}^k$.

I ovakav koncept je ekvivalentan polaznoj mašini.



Nedeterministička Tjuringova mašina opisana je sa:

- ▶ traka, alfabeti, stanja;
- ▶ rad je određen binarnom relacijom između $Q \times \Gamma$ i $Q \times \Gamma \times \{L, D\}$, tj. funkcijom $Q \times \Gamma \mapsto \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, D\})$.

Nedeterministička Tjuringova mašina ekvivalentna je Tjuringovoj mašini.



Vremenska složenost



Definicija. Neka su $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Kažemo $f = O(g)$ ako postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $c > 0$ takvi da $f(n) \leq cg(n)$ za sve $n \geq n_0$.

Primer. Neka je $f \in \mathbb{N}[n]$. Tada je $f = O(n^k)$ ako i samo ako $\deg(f) \leq k$.



Definicija. Neka je M Tjuringova mašina koja se zaustavlja za sve ulaze. Vremenska složenost mašine M je funkcija $t_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gde je $t_M(n)$ maksimalan broj koraka koji M izvodi za ulaz dužine n .

75. Teorema. Neka je t takva da $t(n) \geq n$, i neka je M Tjuringova mašina sa više traka takva da $t_M = O(t)$. Tada postoji mašina N sa jednom trakom koja simulira rad M takva da $t_N = O(t^2)$.



Definicija. Neka je M nedeterministička Tjuringova mašina koja se zaustavlja bez obzira na izbor grane izračunavanja. Vremenska složenost mašine M je funkcija $t_M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gde je $t_M(n)$ maksimalan broj koraka koji M izvodi u bilo kojoj grani za ulaz dužine n .

76. Teorema. Neka je t takva da $t(n) \geq n$, i neka je M nedeterministička Tjuringova mašina takva da $t_M = O(t)$. Tada postoji Tjuringova mašina N koja simulira rad M takva da $t_N = O(2^t)$.

