

TEORIJA IZRAČUNLJIVOSTI: REŠENJA I DOKAZI

SLAVKO MOCONJA

SADRŽAJ

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. Primitivno rekurzivne funkcije | 1 |
| 2. Kodiranje | 1 |

1. Primitivno rekurzivne funkcije.

Dokaz za 7. a. Primitivnom rekurzijom:

$$\begin{aligned}\sum_{t < 0} f(t, \vec{x}) &:= 0; \\ \sum_{t < y+1} f(t, \vec{x}) &:= \sum_{t < y} f(t, \vec{x}) + f(y, \vec{x}).\end{aligned}$$

b. Primitivnom rekurzijom:

$$\begin{aligned}\prod_{t < 0} f(t, \vec{x}) &:= 1; \\ \prod_{t < y+1} f(t, \vec{x}) &:= \prod_{t < y} f(t, \vec{x}) \cdot f(y, \vec{x}).\end{aligned}$$

c. Primitivnom rekurzijom:

$$\begin{aligned}((\mu t < 0) f(t, \vec{x}) = 0) &:= 0; \\ ((\mu t < y+1) f(t, \vec{x}) = 0) &:= ((\mu t < y) f(t, \vec{x}) = 0) + \text{sgn}(\prod_{t < y+1} f(t, \vec{x})).\end{aligned}$$

□

Dokaz za 8. a. $\chi_{(\exists t < y) R(t, \vec{x})}(y, \vec{x}) = \text{sgn}(\sum_{t < y} \chi_R(t, \vec{x}))$.

b. $\chi_{(\forall t < y) R(t, \vec{x})}(y, \vec{x}) = \text{sgn}(\prod_{t < y} \chi_R(t, \vec{x}))$.

c. $(\mu t < y) R(t, \vec{x}) = ((\mu t < y) \overline{\text{sgn}}(\chi_R(t, \vec{x})) = 0)$.

□

Dokaz za 9. $C(x, y; z) = x \cdot \overline{\text{sgn}}(z) + y \cdot \text{sgn}(z)$.

□

Dokaz za 10. $f(\vec{x}) = C(g(\vec{x}), h(\vec{x}); \overline{\text{sgn}}(\chi_R(\vec{x})))$.

□

2. Kodiranje.

Dokaz za 12. a. Neka je $\gamma(x, y) = 2^x(2y+1) - 1 = 2^x(2y+1) \div 1$; iz poslednje jednakosti primitivna rekurzivnost funkcije γ je jasna. Funkcija γ je bijekcija jer se svaki pozitivan prirodan broj na jedinstven način zapisuje kao proizvod stepena dvojke i neparnog broja. Dakle, $(x, y) \mapsto 2^x(2y+1)$ je bijekcija $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$, pa oduzimanjem jedinice ćemo pokupiti i 0, tj. γ je bijekcija.

b. Nije teško videti da za sve x, y važi $\gamma(x, y) \geq x$ i $\gamma(x, y) \geq y$ (zapravo, osim u slučajevima $(0, 0)$ i $(1, 0)$ možemo da vidimo da su nejednakosti stroge.) Zato, ako nam je dato $t = 2^x(2y+1) - 1$, x možemo rekonstruisati ograničenom minimizacijom:

- $\gamma_1(t) = (\mu x < t+1) 2^{x+1} \div t + 1$; sada je:

- $\gamma_2(t) = \text{kol}(\text{kol}(t+1, 2^{\gamma_1(t)}) \div 1, 2)$.

Ili, imajući u vidu da je γ primitivno rekurzivna bijekcija:

- $\gamma_1(t) = (\mu x < t+1)(\exists y < t+1) \gamma(x, y) = t$;
- $\gamma_2(t) = (\mu y < t+1)(\exists x < t+1) \gamma(x, y) = t$.

c. Očigledno iz definicije. □

Dokaz za 14. Dobra definisanost lako sledi indukcijom. Uočimo funkciju $F(y, \vec{x}) := \gamma(f_1(y, \vec{x}), f_2(y, \vec{x}))$; ona je primitivno rekurzivna jer:

$$\begin{aligned} F(0, \vec{x}) &:= \gamma(g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x})); \\ F(y+1, \vec{x}) &:= \gamma(h_1(y, \gamma_1(F(y, \vec{x})), \gamma_2(F(y, \vec{x})), \vec{x}), h_2(y, \gamma_1(F(y, \vec{x})), \gamma_2(F(y, \vec{x})), \vec{x})), \end{aligned}$$

pa su i $f_1(y, \vec{x}) = \gamma_1(F(y, \vec{x}))$ i $f_2(y, \vec{x}) = \gamma_2(F(y, \vec{x}))$ primitivno rekurzivne. □

Dokaz za 16. a. Indukcijom po n . Za $n = 1$, stvar je jasna: $\gamma^1 = \text{id}_{\mathbb{N}} = \pi_1^1$. Pretpostavimo da je γ^n primitivno rekurzivna bijekcija. Tada je $\gamma^{n+1}(\vec{x}, y) = \gamma(\gamma^n(\vec{x}), y)$ primitivno rekurzivna kao kompozicija primitivno rekurzivnih funkcija (strogo, $\gamma^{n+1} = \gamma(\gamma^n(\pi_1^{n+1}, \dots, \pi_n^{n+1}), \pi_{n+1}^{n+1})$). Takođe, γ^{n+1} je bijekcija kao kompozicija bijekcije γ sa Dekartovim proizvodom bijekcija $\gamma^n \times \text{id}_{\mathbb{N}}$.

b. Indukcijom po n . Za $n = 1$, $\gamma_1^1 = \text{id}_{\mathbb{N}} = \pi_1^1$. Pretpostavimo da su funkcije π_i^n , $1 \leq i \leq n$, primitivno rekurzivne. Tada za $1 \leq i \leq n$ imamo $\gamma_i^{n+1}(t) = \gamma_i^n(\gamma_1(t))$, i $\gamma_{n+1}^{n+1}(t) = \gamma_2(t)$, pa su i one primitivno rekurzivne.

c. Očigledno prema definiciji. □

Dokaz za 18. Očigledno. □

Dokaz za 19. Funkcije su dobro definisane jer je kodiranje bijektivno. Za $\ell(t)$ imamo:

$$\ell(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \gamma_1(t \div 1) + 1 & t > 0 \end{cases},$$

Za $(t)_i$ imamo:

$$(t)_i = \begin{cases} 0 & i \geq \ell(t) \\ \delta(\ell(t), i+1, (\gamma_2(t \div 1))) & \text{inače} \end{cases}.$$

□

Dokaz za 21. Za $(\Leftarrow)$ primetimo da je $f(y, \vec{x}) = (\tilde{f}(y, \vec{x}))_y$. Za $(\Rightarrow)$ imamo:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(0, \vec{x}) &= \ulcorner f(0, \vec{x}) \urcorner; \\ \tilde{f}(y+1, \vec{x}) &= \tilde{f}(y, \vec{x}) \frown \ulcorner f(S(y), \vec{x}) \urcorner. \end{aligned}$$

□