

NAPREDNI KONCEPTI ELEMENTARNE MATEMATIKE

Januar 1 2026.

1. Izračunati $\arccos(\sin 3) + \arcsin(\cos 4)$.
2. Dokazati $\sin \frac{7\pi}{24} > \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$.
3. Dokazati $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \cdots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} 2^n x$.
4. Rešiti jednačinu $\sqrt[3]{x} + \sqrt{15 + \sqrt{x}} = 5$ u skupu $\mathbb{R}$.
5. Rešiti nejednačinu $x^{1+\log_3 x} < 9$ u skupu $\mathbb{R}$.
6. Rešiti jednačinu $(2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$ u skupu $\mathbb{R}$.
7. Rešiti jednačinu $(x^2 + x - 13)(x^2 + x - 5) = -7$ u skupu $\mathbb{R}$.
8. Odrediti sve $z \in \mathbb{C}$ takve da $z^4 = \bar{z}^2$.
9. Odrediti sve $z \in \mathbb{C}$ takve da je trougao sa temenima 1, i i z jednakokraničan.
10. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $X^{2026} + X^{2025} + 1$ sa $X^3 + 1$.
11. Neka je $n \geq 1$. Izračunati a i b takve da je polinom $aX^{n+1} + bX^n + 1$ deljiv sa $(X - 1)^2$.
12. Ako je $(aX + b)^{2025} = \sum_{k=0}^{2025} c_k X^k$, izračunati $(c_0 + c_2 + \cdots + c_{2024})^2 - (c_1 + c_3 + \cdots + c_{2025})^2$ (u zavisnosti od a i b).
13. Ako je $P(X)$ moničan polinom trećeg stepena takav da je $P(20) = 30$ i $P(30) = 40$, izračunati $P(40) - P(10)$.
14. Ako $a, b, c > 0$ i $a + 2b + c = 1$, odrediti maksimalnu vrednost izraza $a^2 b c^2$.
15. Kubna sredina brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ jednaka je $\sqrt[3]{\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{n}}$. Dokazati nejednakost između kvadratne i kubne sredine:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \leq \sqrt[3]{\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{n}},$$

kao i da jednakost važi ako i samo ako $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

16. Ako $a, b, c > 0$ i $3a + 2b + c \leq 6$, dokazati $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$.

Svaki zadatak nosi 10 poena.

Ocenjivanje: 0–50 : 5, 51–60 : 6, 61–70 : 7, 71–80 : 8, 81–90 : 9, 91– : 10.

SKICE REŠENJA

1. Kako je $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, to je $0 < 3 - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \pi$, pa kako je $\sin 3 = \cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)$, imamo da je $\arccos(\sin 3) = \arccos(\cos(3 - \frac{\pi}{2})) = 3 - \frac{\pi}{2}$. Kako je $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, to je $-\frac{\pi}{2} < 4 - \frac{3\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2}$, pa kako je $\cos 4 = \sin\left(4 - \frac{3\pi}{2}\right)$, imamo da je $\arcsin(\cos 4) = \arcsin(\sin(4 - \frac{3\pi}{2})) = 4 - \frac{3\pi}{2}$.

Željeni zbir jednak je $7 - 2\pi$.

2. Imamo $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \stackrel{(*)}{<} \sin \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}}{2} = \sin \frac{7\pi}{24}$, gde $(*)$ važi prema Jensenovoj nejednakosti primenjenoj recimo na interval $[0, \pi]$ na kome je sinus konkavan. Jednakost je stroga jer je $\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{3}$.

3. Kako je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin 2^k x} &= \frac{1}{\sin 2^k x} \cdot \frac{\sin 2^{k-1} x}{\sin 2^{k-1} x} \\ &= \frac{1}{\sin 2^k x} \cdot \frac{\sin(2^k x - 2^{k-1} x)}{\sin 2^{k-1} x} \\ &= \frac{\sin 2^k x \cos 2^{k-1} x - \cos 2^k x \sin 2^{k-1} x}{\sin 2^k x \sin 2^{k-1} x} \\ &= \operatorname{ctg} 2^{k-1} x - \operatorname{ctg} 2^k x, \end{aligned}$$

imamo teleskopski zbir $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} =$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \cancel{\operatorname{ctg} x} + \cancel{\operatorname{ctg} x} - \cancel{\operatorname{ctg} 2x} + \cancel{\operatorname{ctg} 2x} - \cancel{\operatorname{ctg} 4x} + \dots + \cancel{\operatorname{ctg} 2^{n-1} x} - \operatorname{ctg} 2^n x \\ &= \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} 2^n x. \end{aligned}$$

4. Jednačina je definisana na $[0, \infty)$, i funkcija na levoj strani je na tom intervalu rastuća kao zbir dve rastuće funkcije. Kako je $x_0 = 1$ jedno očigledno rešenje, to je i jedino rešenje.

5. Nejednačina je definisana za $x > 0$; primenom $\log_3$, ekvivalentna je sa $\log_3 x^{1+\log_3 x} < 2$, tj. sa $(1 + \log_3 x) \log_3 x < 2$, tj. sa $(\log_3 x + 2)(\log_3 x - 1) < 0$, tj. sa $\log_3 x \in (-2, 1)$, tj. sa $x \in (1/9, 3)$.

6. Jednačina je definisana ako i samo ako je $\operatorname{tg} x \geq 0$, ako i samo ako $x \in D := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$.

Kako je $2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 2(\cos x - 2)(\cos x + \frac{1}{2})$, i uvek $\cos x - 2 \neq 0$, jednačina na D ekvivalentna je sa $\cos x = -\frac{1}{2}$ ili $\operatorname{tg} x = 0$. Rešenja koja pripadaju D su $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Aritmetička sredina trinoma $x^2 + x - 13$ i $x^2 + x - 5$ je $a = x^2 + x - 9$, pa uvođenjem ove smene jednačina postaje $(a - 4)(a + 4) = -7$, tj. $a^2 = 9$. Za $a = -3$ dobijamo $x^2 + x - 6 =$

$(x+3)(x-2) = 0$, a za $a = 3$ dobijamo $x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3) = 0$. Rešenja su $x_1 = -4, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = 3$.

8. Jednačina $z^4 = \bar{z}^2$ ekvivalentna je sa $z^2 = \bar{z}$ ili $z^2 = -\bar{z}$. Ako zapišemo $z = x + iy$, ove jednačine se svode na $x^2 - y^2 + 2xyi = x - iy$ i $x^2 - y^2 + 2xyi = -x + iy$.

Prva jednačina svodi se na sistem $x^2 - y^2 = x$ i $2xy = -y$. Iz druge jednačine je $y(2x+1) = 0$, pa je $y = 0$ ili $2x+1 = 0$; za $y = 0$ dobijamo $x^2 = x$, tj. $x = 0$ ili $x = 1$, a za $x = -\frac{1}{2}$ dobijamo $y^2 = x^2 - x = \frac{3}{4}$, odakle je $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dakle, rešenja u ovom slučaju su $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ i $z_4 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Druga jednačina svodi se na sistem $x^2 - y^2 = -x$ i $2xy = y$. Iz druge jednačine je $y(2x-1) = 0$, pa je $y = 0$ ili $2x-1 = 0$; za $y = 0$ dobijamo $x^2 = -x$, tj. $x = 0$ ili $x = -1$, a za $x = \frac{1}{2}$ dobijamo $y^2 = x^2 + x = \frac{3}{4}$, odakle je $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Rešenja u ovom slučaju su (kada zanemarimo ponovljeno rešenje 0) $z_5 = -1$, $z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ i $z_7 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

9. Množenje w sa $\varepsilon_1 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ je rotacija w oko 0 za 60° u pozitivnom smeru, a za $\varepsilon_2 = \cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ) = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ je rotacija w oko 0 za 60° u negativnom smeru. Trougao $1iz$ je jednakostraničan ako i samo ako je translirani trougao za -1 , $0(i-1)(z-1)$, jednakostraničan, ako i samo ako je $z-1$ rotirano $i-1$ za $\pm 60^\circ$, tj. ako i samo ako je $z-1 = (i-1)\varepsilon_1 = \frac{-1-\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{2}$ ili $z-1 = (i-1)\varepsilon_2 = \frac{-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{2}$, pa je $z = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$ ili $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$.

Alternativno, simetrala duži $1i$ je simetrala prvog i trećeg kvadranta $z = \lambda(1+i)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, i željene tačke se nalaze na ovoj pravoj. Njih možemo da nađemo iz uslova $|z-1| = |i-1|$ (jednake stranice), tj. $|(\lambda-1) + \lambda i| = |1-i|$, što posle kvadriranja postaje jednačina $(\lambda-1)^2 + \lambda^2 = 2$, tj. $2\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$. Odavde je $\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4}$, pa su rešenja $z = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$ i $z = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$.

10. Zapišimo $X^{2026} + X^{2025} + 1 = (X^3+1)Q(X) + (aX^2+bX+c)$. Imamo da je $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1) = (X+1)(X-\varepsilon_1)(X-\varepsilon_2)$, gde je $\varepsilon_{1/2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Za $X = -1$ dobijamo $1 = a - b + c$. Za $X = \varepsilon_1$, $\varepsilon_1^{2026} + \varepsilon_1^{2025} + 1 = \varepsilon_1(\varepsilon_1^3)^{675} + (\varepsilon_1^3)^{675} + 1 = -\varepsilon_1 = a\varepsilon_1^2 + b\varepsilon_1 + c$. Kako je $\varepsilon_1^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, posle množenja sa 2, prethodna veza postaje $(-1+i\sqrt{3})a + (1+i\sqrt{3})b + 2c = -(1+i\sqrt{3})$. Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dela dobijamo jednačine: $-a+b+2c = -1$ i $a+b = -1$.

Sveli smo problem na rešavanje sistema: $a - b + c = 1$, $-a + b + 2c = -1$, $a + b = -1$; rešenje je $a = c = 0$, $b = -1$. Traženi ostatak je $-X$.

11. Kako je 1 nula od $aX^{n+1} + bX^n + 1$ imamo $a + b + 1 = 0$, a kako je 1 i nula od izvoda $(n+1)aX^n + nbX^{n-1}$ imamo $(n+1)a + nb = 0$. Iz druge jednakosti imamo $0 = n(a+b) + a = -n + a$ koristeći prvu jednakost, pa je $a = n$, i dalje je $b = -n - 1$.
12. Neka je P zbir svih c_{2k} i N zbir svih c_{2k+1} ; računamo $P^2 - N^2$. Za $X = 1$ je $(a+b)^{2025} = P+N$, a za $X = -1$ je $(-a+b)^{2025} = P-N$. Sada je $P^2 - N^2 = (P+N)(P-N) = (a+b)^{2025}(-a+b)^{2025} = (b^2 - a^2)^{2025}$.
13. 20 i 30 su nule polinoma $Q(X) = P(X) - X - 10$, koji je takođe trećeg stepena i moničan, pa možemo da zapišemo $Q(X) = (X-20)(X-30)(X-a)$, tj. $P(X) = (X-20)(X-30)(X-a) + X + 10$. Sada je $P(40) - P(10) = 200(40-a) + 50 - (200(10-a) + 20) = 6030$.
14. Kako je $1 = a + 2b + c = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 2b + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} \stackrel{\text{ag}}{\geq} 5\sqrt[5]{\frac{a^2bc^2}{8}}$, sledi $a^2bc^2 \leq \frac{8}{5^5}$. Vrednost $\frac{8}{5^5}$ dostiže se za $\frac{a}{2} = 2b = \frac{c}{2} = \frac{1}{5}$, tj. za $a = c = \frac{2}{5}$ i $b = \frac{1}{10}$.
15. Funkcija $f(x) = x^{3/2}$ definisana je i konveksna na $(0, \infty)$. Prema Jensenovoj nejednakosti za $a_1, \dots, a_n > 0$ važi:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^{3/2} \leq \frac{a_1^{3/2} + a_2^{3/2} + \dots + a_n^{3/2}}{n},$$

gde jednakost važi ako i samo ako $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. Uzimajući $a_i = x_i^2$ dobijamo željenu nejednakost.

16. Imamo da je $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \stackrel{(*)}{\geq} \frac{(1+1+1+1+1+1)^2}{a+a+a+b+b+c} = \frac{36}{3a+2b+c} \geq \frac{36}{6} = 6$, gde $(*)$ važi prema Tituovoj lemi.