

NEODLUČIVOST LOGIKE PRVOG REDA

SLAVKO MOCONJA

Neka je $\mathcal{M}$ Tjuringova mašina opisana sa:

- traka bez krajeva;
- svako polje trake može da bude prazno (0) ili popunjeno (1);
- Q je skup stanja sa dva istaknuta stanja: početno stanje je q_0 i zaustavno stanje q_H ;
- program je dat (totalnom) funkcijom $\tau : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \rightarrow Q \times \{0, 1, L, D\}$.

Mašini $\mathcal{M}$ pridružujemo jezik prvog reda $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ koji sadrži sledeće simbole:

- konstantu ε ;
- unarne funkcije $\mathbb{0}$ i $\mathbb{1}$;
- binarne relacije R_q za $q \in Q$;
- unarna relacija J .

Odmah možemo da uočimo i $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -strukture $\mathbb{A}_n$ za $n \in \mathbb{N}$:

- domen strukture je skup $D = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ je prazan niz ili } w \text{ počinje sa } 1\}$;
- $\varepsilon^{\mathbb{A}_n}$ je prazan niz;
- funkcije $\mathbb{0}^{\mathbb{A}_n}$ i $\mathbb{1}^{\mathbb{A}_n}$ definisane su sa:

$$\mathbb{0}^{\mathbb{A}_n}(w) = \begin{cases} \varepsilon^{\mathbb{A}_n} & \text{ako } w = \varepsilon^{\mathbb{A}_n} \\ w0 & \text{ako } w \neq \varepsilon^{\mathbb{A}_n} \end{cases} \quad \text{i} \quad \mathbb{1}^{\mathbb{A}_n}(w) = w1, \quad \text{za } w \in D;$$

- relacija $J^{\mathbb{A}_n}$ definisana je sa:

$$J^{\mathbb{A}_n}(w) \stackrel{\text{def.}}{\iff} w \text{ je niz jedinica.}$$

Primetimo da su prethodne interpretacije nezavisne od n .

- Za $q \in Q$, $R_q^{\mathbb{A}_n}$ definisana je sa:

$$R_q^{\mathbb{A}_n}(w_1, w_2) \stackrel{\text{def.}}{\iff} \begin{cases} \text{u nekom trenutku rada } \mathcal{M} \text{ za ulaz } \underbrace{11 \dots 1}_{n+1}, \text{ na traci} \\ \text{se nalazi zapisano } w_1 \overline{w_2}, \text{ gde je } \overline{w_2} \text{ reč } w_2 \text{ čitana unazad,} \\ \text{mašina se nalazi u stanju } q, \text{ i glava mašine se nalazi na} \\ \text{početku } \overline{w_2} \text{ dela.} \end{cases}$$

Cilj. Konstruišemo $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -rečenicu φ_n takvu da $\mathcal{M}$ se korektno zaustavlja za ulaz $\underbrace{11 \dots 1}_{n+1}$ ako i samo ako $\models \varphi_n$. Ako to uspemo, imamo:

Teorema 1. Problem valjanosti u logici prvog reda je neodlučiv.

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}$ mašina koja računa funkciju $\Phi_1(x, x)$. Tada:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{K} &\iff \Phi_1(x, x) \downarrow \\ &\iff \text{mašina } \mathcal{M} \text{ se korektno zaustavlja za ulaz } x \\ &\iff \models \varphi_x, \end{aligned}$$

što svodi standardan problem $\mathcal{K}$ na problem valjanosti. Dakle, problem valjanosti nije odlučiv. $\square$

Sada ćemo konstruisati rečenice φ_n . Najpre, uočimo sledeće rečenice:

- α je rečenica:

$$\mathbb{0}\varepsilon = \varepsilon.$$

- β je rečenica:

$$\forall x(x = \mathbb{1}\varepsilon \vee \exists y(J(y) \wedge x = \mathbb{1}y) \rightarrow J(x)).$$

- γ je konjunkcija sledećih rečenica:

- za svaku naredbu $q0q'0$ imamo rečenicu:

$$\forall xy(R_q(x, \mathbb{0}y) \rightarrow R_{q'}(x, \mathbb{0}y));$$

- za svaku naredbu $q0q'1$ imamo rečenicu:

$$\forall xy(R_q(x, \mathbb{0}y) \rightarrow R_{q'}(x, \mathbb{1}y));$$

- za svaku naredbu $q0q'L$ imamo konjunkciju rečenica:

$$\forall xy(R_q(\mathbb{0}x, \mathbb{0}y) \rightarrow R_{q'}(x, \mathbb{0}\mathbb{0}y)) \quad \text{i} \quad \forall xy(R_q(\mathbb{1}x, \mathbb{0}y) \rightarrow R_{q'}(x, \mathbb{1}\mathbb{0}y));$$

- za svaku naredbu $q0q'D$ imamo rečenicu:

$$\forall xy(R_q(x, \mathbb{0}y) \rightarrow R_{q'}(\mathbb{0}x, y));$$

- za svaku naredbu $q1q'0$ imamo rečenicu:

$$\forall xy(R_q(x, \mathbb{1}y) \rightarrow R_{q'}(x, \mathbb{0}y));$$

- za svaku naredbu $q1q'1$ imamo rečenicu:

$$\forall xy(R_q(x, \mathbb{1}y) \rightarrow R_{q'}(x, \mathbb{1}y));$$

- za svaku naredbu $q1q'L$ imamo konjunkciju rečenica:

$$\forall x\forall y(R_q(\mathbb{0}x, \mathbb{1}y) \rightarrow R_{q'}(x, \mathbb{0}\mathbb{1}y)) \quad \text{i} \quad \forall x\forall y(R_q(\mathbb{1}x, \mathbb{1}y) \rightarrow R_{q'}(x, \mathbb{1}\mathbb{1}y));$$

- za svaku naredbu $q1q'D$ imamo rečenicu:

$$\forall xy(R_q(x, \mathbb{1}y) \rightarrow R_{q'}(\mathbb{1}x, y)).$$

- δ_n je rečenica:

$$R_{q_0}(\varepsilon, \underbrace{\mathbb{1}\mathbb{1} \dots \mathbb{1}}_{n+1} \varepsilon).$$

- ζ je rečenica:

$$\exists x(R_{q_H}(\varepsilon, x) \wedge J(x)).$$

- Konačno, φ_n je rečenica:

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta_n \rightarrow \zeta.$$

Komentar 2. Prethodne rečenice smo konstruisali imajući u vidu $\mathbb{A}_n$, i za sve $n \in \mathbb{N}$ važi:

- $\mathbb{A}_n \models \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta_n$, i
- $\mathbb{A}_n \models \zeta$ ako i samo ako $\mathcal{M}$ se korektno zaustavlja za ulaz n (odn. $\underbrace{11 \dots 1}_{n+1}$).

Lema 3. $\mathcal{M}$ se korektno zaustavlja za ulaz n ako i samo ako $\models \varphi_n$.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Ako $\models \varphi_n$, tada i $\mathbb{A}_n \models \varphi_n$, pa prema komentaru 2 $\mathcal{M}$ se korektno zaustavlja za ulaz n .

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da se $\mathcal{M}$ korektno zaustavlja za ulaz n , i pretpostavimo da je $\mathbb{B}$ proizvoljna $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ -struktura; cilj je da dokažemo $\mathbb{B} \models \varphi_n$. Neka je B domen strukture $\mathbb{B}$, i pretpostavimo $\mathbb{B} \models \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta_n$; cilj je da dokažemo $\mathbb{B} \models \zeta$. Definišimo preslikavanje $\eta : D \rightarrow B$ rekurentno sa:

- $\eta \varepsilon^{\mathbb{A}_n} := \varepsilon^{\mathbb{B}}$,
- $\eta(w0) = \mathbb{0}^{\mathbb{B}} \eta w$, i
- $\eta(w1) = \mathbb{1}^{\mathbb{B}} \eta w$.

Tvrđenje 3.1. $J^{\mathbb{A}_n}(w) \implies J^{\mathbb{B}}(\eta w)$.

Dokaz tvrđenja. Treba da dokažemo da za sve nizove jedinica w , $J^{\mathbb{B}}(\eta w)$. Dokaz izvodimo po dužini $|w|$. Ako je $w = 1$, tada je $\eta w = \mathbb{1}^{\mathbb{B}} \varepsilon^{\mathbb{B}}$, pa $J^{\mathbb{B}}(\eta w)$ važi jer $\mathbb{B} \models \beta$. Pretpostavimo $w = w'1$, gde je w' niz jedinica. Tada $\eta w = \mathbb{1}^{\mathbb{B}} \eta w'$ i prema indukcijskoj hipotezi $J^{\mathbb{B}}(\eta w')$, pa ponovo $J^{\mathbb{B}}(\eta w)$ sledi jer $\mathbb{B} \models \beta$. $\square$

Tvrđenje 3.2. $R_q^{\mathbb{A}_n}(w_1, w_2) \implies R_q^{\mathbb{B}}(\eta w_1, \eta w_2)$.

Dokaz tvrđenja. Neka je $\kappa : \mathbb{N} \rightarrow Q \times D \times D$ funkcija definisana sa: $\kappa(t) = (q(t), w_1(t), w_2(t))$, gde je $q(t)$ stanje u kome se mašina nalazi u trenutku t , a $w_1(t)$ i $w_2(t)$ su reči takve da je $w_1(t)w_2(t)$ zapisano na traci u trenutku t , i glava mašine se nalazi na početku reči $w_2(t)$. Posle zaustavljanja u trenutku t_H , dodefinišemo $\kappa(t) = \kappa(t_H)$ za sve $t > t_H$. Dakle, $R_q^{\mathbb{A}_n}(w_1, w_2)$ ako i samo ako postoji t tako da $\kappa(t) = (q, w_1, w_2)$.

Dovoljno je da za svako t dokažemo $R_{q(t)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t), \eta w_2(t))$, što činimo indukcijom po t . Za $t = 0$ je $(q(0), w_1(0), w_2(0)) = (q_0, \varepsilon^{\mathbb{A}_n}, \underbrace{11 \dots 1}_{n+1})$, pa kako je $\eta \varepsilon^{\mathbb{A}_n} = \varepsilon^{\mathbb{B}}$ i $\eta \underbrace{11 \dots 1}_{n+1} = \underbrace{\mathbb{1}^{\mathbb{B}} \mathbb{1}^{\mathbb{B}} \dots \mathbb{1}^{\mathbb{B}}}_{n+1} \varepsilon^{\mathbb{B}}$, i kako

$\mathbb{B} \models \delta_n$, dobijamo $R_{q(0)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(0), \eta w_2(0))$.

Pretpostavimo $R_{q(t)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t), \eta w_2(t))$, i dokažimo isto za $t + 1$. Od konfiguracije $(q(t), w_1(t), w_2(t))$ do konfiguracije $(q(t+1), w_1(t+1), w_2(t+1))$ mašina je došla izvršavajući odgovarajuću naredbu. Uradićemo jedan slučaj, preostali su slični. Pretpostavimo da je naredba koju je mašina izvršila $q(t)0q(t+1)0$. To znači da je $w_2(t)$ prazna reč ili oblika $v0$, i da je $w_1(t+1) = w_1(t)$ i $w_2(t+1) = w_2(t)$.

Pretpostavimo da je $w_2(t)$ prazna reč. Kako $\mathbb{B} \models \alpha$, $\eta w_2(t) = \varepsilon^{\mathbb{B}} = \mathbb{0}^{\mathbb{B}} \varepsilon^{\mathbb{B}}$ jer $\mathbb{B} \models \alpha$, pa po indukcijskoj hipotezi $R_{q(t)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t), \mathbb{0}^{\mathbb{B}} \varepsilon^{\mathbb{B}})$. Kako $\mathbb{B} \models \gamma$, specijalno:

$$\mathbb{B} \models \forall xy (R_{q(t)}(x, \mathbb{0}y) \rightarrow R_{q(t+1)}(x, \mathbb{0}y)),$$

odakle sledi $R_{q(t+1)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t), \mathbb{0}^{\mathbb{B}} \varepsilon^{\mathbb{B}})$, tj. $R_{q(t+1)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t), \varepsilon^{\mathbb{B}})$, odn. $R_{q(t+1)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t), \eta w_2(t))$. Kako je $w_1(t+1) = w_1(t)$ i $w_2(t+1) = w_2(t)$, dobijamo željeni zaključak $R_{q(t+1)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t+1), \eta w_2(t+1))$.

Pretpostavimo sada da je $w_2(t)$ oblika $v0$. Tada je $\eta w_2(t) = \mathbb{0}^{\mathbb{B}}\eta v$, pa po indukcijskoj hipotezi je $R_{q(t)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t), \mathbb{0}^{\mathbb{B}}\eta v)$. Ponovo koristimo:

$$\mathbb{B} \models \forall xy (R_{q(t)}(x, \mathbb{0}y) \rightarrow R_{q(t+1)}(x, \mathbb{0}y)),$$

odakle sledi $R_{q(t+1)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t), \mathbb{0}^{\mathbb{B}}\eta v)$. Kako je $w_1(t+1) = w_1(t)$ i $w_2(t+1) = w_2(t)$, ponovo dobijamo željeni zaključak $R_{q(t+1)}^{\mathbb{B}}(\eta w_1(t+1), \eta w_2(t+1))$. $\square$

Sada možemo da završimo dokaz. Prema komentaru 2, $\mathbb{A}_n \models \zeta$, tj. $\mathbb{A}_n \models \exists x (R_{q_H}(\varepsilon, x) \wedge J(x))$. Dakle, postoji reč $w \in D$ takva da $R_{q_H}^{\mathbb{A}_n}(\varepsilon^{\mathbb{A}_n}, w)$ i $J^{\mathbb{A}_n}(w)$. Prema tvrđenjima 3.2 i 3.1, $R_{q_H}^{\mathbb{B}}(\varepsilon^{\mathbb{B}}, \eta w)$ i $J^{\mathbb{B}}(\eta w)$. Dakle, $\mathbb{B} \models \exists x (R_{q_H}(\varepsilon, x) \wedge J(x))$, tj. $\mathbb{B} \models \zeta$. Završili smo dokaz. $\square$