

DISKRETNE STRUKTURE 1

JUN 1 2025: REŠENJA

1. Niz (a_n) definisan je rekurentno sa: $a_0 = 0$, $a_1 = 32$ i $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n$ za sve $n \geq 0$. Koristeći matematičku indukciju dokazati: $a_n = 16(4^n - 2^n)$, za sve $n \geq 0$.

Rešenje. Treba da dokažemo $(\forall n) P(n)$, gde je $P(n)$ predikat $a_n = 16(4^n - 2^n)$. S obzirom da je niz a_n rekurentno definisan preko svoja dva prethodna člana, korišćemo korak oblika:

$$(\forall n)(P(n) \wedge P(n+1) \rightarrow P(n+2)),$$

što znači da nam je odgovarajuća baza oblika:

$$P(0) \wedge P(1).$$

Baza indukcije: Treba da proverimo iskaze $P(0)$ i $P(1)$.

$P(0)$ je iskaz $a_0 = 16(4^0 - 2^0)$; kako je po definiciji $a_0 = 0$ i $16(4^0 - 2^0) = 16(1 - 1) = 0$, $P(0)$ je tačan.

Iskaz $P(1)$ je $a_1 = 16(4^1 - 2^1)$; kako je $a_1 = 32$ i $16(4^1 - 2^1) = 16(4 - 2) = 32$, i $P(1)$ je tačan.

Indukcijski korak: Pretpostavimo $P(n)$ i $P(n+1)$, tj.:

$$(IH) \quad a_n = 16(4^n - 2^n) \quad \text{i} \quad a_{n+1} = 16(4^{n+1} - 2^{n+1}),$$

i dokažimo $P(n+2)$, tj. $a_{n+2} = 16(4^{n+2} - 2^{n+2})$, gde je $n \geq 0$ proizvoljno. Imamo:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\stackrel{\text{def}}{=} 6a_{n+1} - 8a_n \\ &\stackrel{IH}{=} 6 \cdot 16(4^{n+1} - 2^{n+1}) - 8 \cdot 16(4^n - 2^n) \\ &= 16(6 \cdot 4^{n+1} - 6 \cdot 2^{n+1} - 8 \cdot 4^n + 8 \cdot 2^n) \\ &= 16(6 \cdot 4^{n+1} - 6 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 4^{n+1} + 4 \cdot 2^{n+1}) \\ &= 16(4 \cdot 4^{n+1} - 2 \cdot 2^{n+1}) \\ &= 16(4^{n+2} - 2^{n+2}), \end{aligned}$$

što smo i želeli. Završili smo dokaz. ♣

2. Dokazati skupovni identitet: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Rešenje. I način. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Tada $x \in A$ i $x \notin B \setminus C$. Iz $x \notin B \setminus C$ imamo dva slučaja da razmotrimo: $x \notin B$ i $x \in C$. Ako $x \notin B$, imajući u vidu $x \in A$, imamo $x \in A \setminus B$, pa i $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Ako $x \in C$, imajući u vidu $x \in A$, imamo $x \in A \cap C$, pa i $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Dakle, u svakom slučaju $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Imamo dva slučaja: $x \in A \setminus B$ i $x \in A \cap C$. Ako $x \in A \setminus B$, onda $x \in A$ i $x \notin B$. Iz $x \notin B$ sledi i $x \notin B \setminus C$, pa $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Ako $x \in A \cap C$, onda $x \in A$ i $x \in C$. Iz $x \in C$ sledi i $x \notin B \setminus C$, pa opet $x \in A \setminus (B \setminus C)$. U svakom slučaju $x \in A \setminus (B \setminus C)$.

II način. Dovoljno je da proverimo da sa karakteristične funkcije leve i desne strane jednake.

$$\begin{aligned}
 \chi_{A \setminus (B \setminus C)} &= \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_{B\chi_C}) \\
 &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_{B\chi_C}; \\
 \chi_{(A \setminus B) \cup (A \cap C)} &= \chi_{A \setminus B} + \chi_{A \cap C} + \chi_{A \setminus B}\chi_{A \cap C} \\
 &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + (\chi_A + \chi_A\chi_B)\chi_A\chi_C \\
 &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C \\
 &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \cancel{\chi_A\chi_C} + \cancel{\chi_A\chi_C} + \chi_A\chi_B\chi_C \\
 &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C.
 \end{aligned}$$

Kako su karakteristične funkcije jednake, važi željeni identitet. ♣

3. Na skupu $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ data je relacija $\sim$ sa: $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\iff} \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Dokazati da je $\sim$ ekvivalencija na $\mathbb{R}$. Izračunati klasu $[2025]_\sim$.

Rešenje. Najpre ćemo proveriti aksiome ekvivalencije.

Refleksivnost. Za svako $x \in \mathbb{R}^\times$ važi $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Q}$, tj. $x \sim x$.

Simetričnost. Pretpostavimo $x, y \in \mathbb{R}^\times$ i $x \sim y$, tj. $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Tada je $\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}} \in \mathbb{Q}$ jer je $\mathbb{Q}$ zatvoreno za recipročne vrednosti; dakle, $y \sim x$.

Tranzitivnost. Pretpostavimo $x, y, z \in \mathbb{R}^\times$, $x \sim y$ i $y \sim z$, tj. $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ i $\frac{y}{z} \in \mathbb{Q}$. Tada i $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \in \mathbb{Q}$ jer je $\mathbb{Q}$ zatvoreno za množenje; dakle, $x \sim z$.

Izračunajmo sada klasu $[2025]_\sim$. Imamo, za $x \in \mathbb{R}^\times$:

$$\begin{aligned} x \in [2025]_\sim &\stackrel{\text{def}}{\iff} x \sim 2025 \\ &\iff \frac{x}{2025} \in \mathbb{Q} \\ &\iff x \in \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

gde poslednja ekvivalencija važi jer je $\mathbb{Q}$ zatvoreno za množenje i deljenje sa 2025; dakle, $[2025]_\sim = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. ♣

4. Neka su $f, g : X \rightarrow Y$. Ako za sve $y \in Y$ važi $y \in g[f^{-1}[\{y\}]]$, dokazati da je f na.

Rešenje. Treba da dokažemo da za svako $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da $f(x) = y$. Neka je $y \in Y$ proizvoljan element. Prema uslovu zadatka važi $y \in g[f^{-1}[\{y\}]]$. Po definiciji direktne slike to znači da postoji $x \in f^{-1}[\{y\}]$ tako da $y = g(x)$; specijalno, postoji $x \in f^{-1}[\{y\}]$. Po definiciji inverzne slike to znači da $f(x) \in \{y\}$, tj. da $f(x) = y$. Završili smo dokaz. ♣

5. Izračunati poslednje dve cifre broja 71^{37} .

Rešenje. Treba da izračunamo ostatak pri deljenju 71^{37} sa 100.

I način. Direktnim računom imamo:

$$\begin{aligned} 71^{37} &= (71^2)^{18} \cdot 71 = 5041^{18} \cdot 71 \equiv_{100} 41^{18} \cdot 71 = (41^2)^9 \cdot 71 = 1681^9 \cdot 71 \equiv_{100} 81^9 \cdot 71 = \\ &= (81^2)^4 \cdot 81 \cdot 71 = 6561^4 \cdot 5751 \equiv_{100} 61^4 \cdot 51 = (61^2)^2 \cdot 51 = 3721^2 \cdot 51 \equiv_{100} \\ &\equiv_{100} 21^2 \cdot 51 = 441 \cdot 51 \equiv_{100} 41 \cdot 51 = 1091 \equiv_{100} 91. \end{aligned}$$

Dakle, poslednje dve cifre su 91.

II način. Neka je r željeni ostatak. Donekle lakši račun je ako izračunamo ostatak r pri deljenju sa 4 i sa 25, i onda izračunamo r . Ostatak pri deljenju sa 4 je lak:

$$r \equiv_4 71^{37} \equiv_4 (-1)^{37} 1 = -1.$$

Ostatak pri deljenju sa 25 možemo da izračunamo direktno slično kao u prvom rešenju. A možemo da iskoristimo Ojlerovu teoremu. Najpre $r \equiv_{25} 71^{37} \equiv_{25} (-4)^{37} = -4^{37}$. Kako je $(4, 25) = 1$, prema Ojlerovoj teoremi je $4^{\varphi(25)} \equiv_{25} 1$. Kako je $\varphi(25) = 20$ imamo $4^{20} \equiv_{25} 1$. Sada možemo da smanjimo stepen i da nastavimo na standardan način, a možemo da postupimo na sledeći način:

$$1 = 1^2 \equiv_{25} (4^{20})^2 = 4^{40} = 4^{37} \cdot 4^3 = 4^{37} \cdot 64 \equiv_{25} 4^{37} \cdot (-11).$$

Odavde je 4^{37} inverz od -11 modulo 25, koji možemo da nađemo Euklidovim algoritmom:

$$\begin{bmatrix} 25 & 1 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -11 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

odakle je $4 \cdot 25 + 9 \cdot (-11) = 1$, odakle je 9 inverz od -11 modulo 25, tj. $4^{37} \equiv_{25} 9$. Vraćajući se nazad, $r \equiv_{25} -4^{37} \equiv_{25} -9 \equiv_{25} 16$. Iz poslednjeg, kandidati za r su 16, 41, 66 i 91, pa kako je $r \equiv_4 -1$, zaključujemo $r = 91$. ♣

6. Na Ostrvu žive dva plemena: pleme Istinozboraca i pleme Lažova. Ostrvljani se ni po čemu ne razlikuju, osim što Istinozborci uvek govore istinu, dok Lažovi uvek lažu. Stranac na ostrvu je naišao na grupu od šest ostrvljana: A, B, C, D, E, F , i od njih je čuo sledeće informacije:

A je rekao: Tačno jedan od F i B je Istinozborac.

B je rekao: C i F nisu iz istog plemena.

C je rekao: A je Lažov ili je B Istinozborac.

D je rekao: A je Lažov, a F je Istinozborac.

E je rekao: Ili je B Lažov ili je C Istinozborac.

Ko je Istinozborac, a ko je Lažov?

Rešenje. Sa a označimo tačnost iskaza „ A je Istinozborac.”; b, c, d, e, f imaju slično značenje. Ako A da izjavu tačnosti p , onda je $a = T$ ako i samo ako je A Istinozborac, ako i samo ako $p = T$; dakle, $a = p$. Prema tome iz datih izjava imamo sledeći sistem iskaznih jednačina:

$$\begin{aligned} (1) \quad a &= f \vee b; \\ (2) \quad b &= c \vee f; \\ (3) \quad c &= \neg a \vee b; \\ (4) \quad d &= \neg a \wedge f; \\ (5) \quad e &= \neg b \vee c. \end{aligned}$$

Slovo b ima najveći broj pojavljivanja, pa ćemo diskutovati po njemu.

I slučaj. $b = N$. Iz (1) dobijamo $a = f$, iz (2) je $c = f$, iz (3) $c = \neg a$. Ove tri jednakosti su u kontradikciji.

II slučaj. $b = T$. Iz (3) je i $c = T$. Iz (2) je sada $f = N$, pa iz (4) je i $d = N$. Iz (5) dobijamo $e = T$, i konačno iz (1) $a = T$. Dakle, imamo jedinstveno rešenje $(a, b, c, d, e, f) = (T, T, T, N, T, N)$, tj. A, B, C, E su Istinozborci, a D, F su Lažovi. ♣