

DISKRETNE STRUKTURE 1

JANUAR 2 2025: REŠENJA

1. Niz $(a_n)_{n \geq 1}$ definisan je rekurentno sa: $a_1 = 5$, $a_2 = 7$ i $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ za sve $n \geq 3$. Koristeći matematičku indukciju dokazati: $a_n = 2n + 3$, za sve $n \geq 1$.

Rešenje. Treba da dokažemo $(\forall n \geq 1) P(n)$, gde je $P(n)$ predikat $a_n = 2n + 3$. S obzirom da je niz a_n rekurentno definisan preko svoja dva prethodna člana, korišćićemo korak oblika:

$$(\forall n \geq 1)(P(n) \wedge P(n+1) \rightarrow P(n+2)),$$

što znači da nam je odgovarajuća baza oblika:

$$P(1) \wedge P(2).$$

Baza indukcije: Treba da proverimo iskaze $P(1)$ i $P(2)$.

$P(1)$ je iskaz $a_1 = 2 \cdot 1 + 3$; kako je po definiciji $a_1 = 5$, $P(1)$ je tačan.

Iskaz $P(2)$ je $a_2 = 2 \cdot 2 + 3$; kako je $a_2 = 7$, i $P(2)$ je tačan.

Indukcijski korak: Pretpostavimo $P(n)$ i $P(n+1)$, tj.:

$$(IH) \quad a_n = 2n + 3 \text{ i } a_{n+1} = 2(n+1) + 3,$$

i dokažimo $P(n+2)$, tj. $a_{n+2} = 2(n+2) + 3$, gde je $n \geq 1$ proizvoljno. Imamo:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\stackrel{\text{def}}{=} 2a_{n+1} - a_n, \text{ jer } n+2 \geq 3 \\ &\stackrel{IH}{=} 2(2(n+1) + 3) - (2n + 3) \\ &= 4(n+1) + 6 - 2n - 3 \\ &= (4n + 4 - 2n) + (6 - 3) \\ &= (2n + 4) + 3 \\ &= 2(n+2) + 3, \end{aligned}$$

što smo i želeli. Završili smo dokaz. ♣

2. Dokazati da za proizvoljne skupove A, B, C važi: $A \setminus (B \setminus C) \supseteq (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$. Primerom pokazati da obratna inkluzija ne mora da važi.

Rešenje. Najpre ćemo dokazati inkluziju.

I način. Pretpostavimo $x \in (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$; cilj je da dokažemo $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Iz $x \in (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ sledi specijalno $x \in A \setminus B$, tj. $x \in A$ i $x \notin B$. Iz $x \notin B$ sledi i $x \notin B \setminus C$, što zajedno sa $x \in A$ povlači $x \in A \setminus (B \setminus C)$. Time smo završili dokaz.

II način. Koristimo karakteristične funkcije. Karakteristična funkcija skupa na levoj strani $L = A \setminus (B \setminus C)$ je:

$$\chi_L = \chi_A + \chi_A(\chi_B + \chi_{B^c}\chi_C) = \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_{B^c}\chi_C,$$

a skupa na desnoj strani $D = (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$ je:

$$\begin{aligned} \chi_D &= (\chi_A + \chi_A\chi_B) + (\chi_A + \chi_A\chi_B)(\chi_A + \chi_A\chi_C) = \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A^2 + \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B + \chi_A^2\chi_B\chi_C = \\ &= \chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A + \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C. \end{aligned}$$

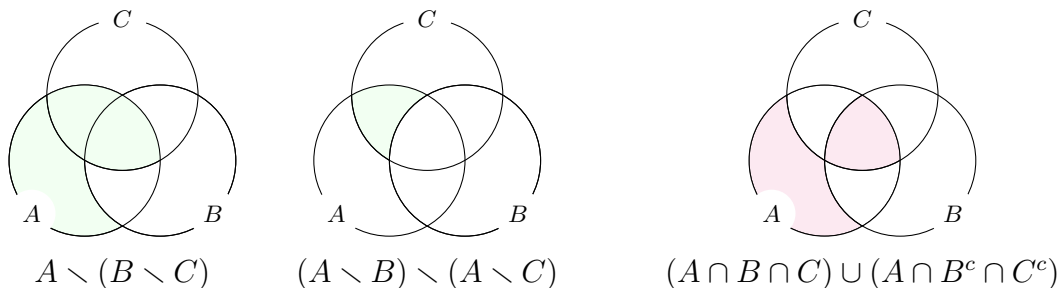
Kako je $L \supseteq D$ ekvivalentno sa $L \cap D = D$, tj. sa $\chi_L\chi_D = \chi_D$, računamo $\chi_L\chi_D$:

$$\begin{aligned} \chi_L\chi_D &= (\chi_A + \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_{B^c}\chi_C)(\chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C) = \\ &= \chi_A^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C + \chi_A^2\chi_{B^c}\chi_C + \chi_A^2\chi_B^2\chi_C + \chi_A^2\chi_B\chi_C^2 + \chi_A^2\chi_B^2\chi_C^2 = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_{B^c}\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C = \\ &= \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C = \chi_D, \end{aligned}$$

što završava dokaz.

Uradimo sada drugi deo zadatka.

Nacrtajmo Venove dijagrame datih skupova:



Slika nam sugerise da su dva skupa jednaka ako i samo ako je skup na trećoj slici prazan, pa ako želimo da konstruišemo kontraprimer za jednakost treba da se pobrinemo da postoji bar jedan element u skupu na trećoj slici. Imamo dve opcije, možemo da

namestimo element koji je u skupu A , a nije u skupovima B i C , ili da namestimo element koji je u sva tri skupa. Ako se opredelimo za prvu opciju, najlakše je da uzmemo $A = \{x\}$ i $B = C = \emptyset$. Tada je:

$$L = A \setminus (B \setminus C) = \{x\} \setminus \emptyset = \{x\} \quad \text{i} \quad D = (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = \{x\} \setminus \{x\} = \emptyset,$$

i jasno $L \neq D$. ♣

3. Na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ data je relacija $\preccurlyeq$ sa: $(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} x_1 \leq x_2 \text{ i } y_1 \leq y_2$. Dokazati da je $\preccurlyeq$ poredak na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Izračunati minimalne i maksimalne elemente trougla sa temenima $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(-1, 1)$.

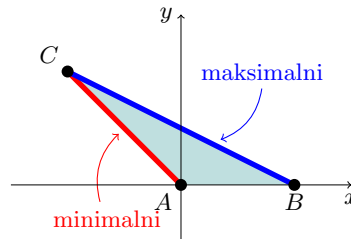
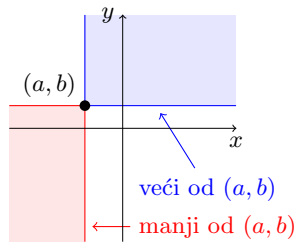
Rešenje. Dokažimo najpre da je $\preccurlyeq$ poredak u ravni.

Refleksivnost. Za svaku tačku (x, y) važi $(x, y) \preccurlyeq (x, y)$ jer važi $x \leq x$ i $y \leq y$.

Antisimetričnost. Pretpostavimo $(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2)$ i $(x_2, y_2) \preccurlyeq (x_1, y_1)$. Iz prve relacije je $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$, a iz druge $x_2 \leq x_1$ i $y_2 \leq y_1$. Sada iz $x_1 \leq x_2$ i $x_2 \leq x_1$ sledi $x_1 = x_2$, a iz $y_1 \leq y_2$ i $y_2 \leq y_1$ sledi $y_1 = y_2$. Dakle, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Tranzitivnost. Pretpostavimo $(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2)$ i $(x_2, y_2) \preccurlyeq (x_3, y_3)$. Iz prve relacije je $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$, a iz druge $x_2 \leq x_3$ i $y_2 \leq y_3$. Sada iz $x_1 \leq x_2$ i $x_2 \leq x_3$ sledi $x_1 \leq x_3$, a iz $y_1 \leq y_2$ i $y_2 \leq y_3$ sledi $y_1 \leq y_3$. Dakle, $(x_1, y_1) \preccurlyeq (x_3, y_3)$.

Odredimo sada minimalne i maksimalne elemente trougla ABC gde su $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ i $C(-1, 1)$. Najpre primetimo da za fiksiranu tačku (a, b) važi $(x, y) \preccurlyeq (a, b) \iff x \leq a \wedge y \leq b$, dakle (x, y) je manja od (a, b) ako i samo ako se nalazi „levo i dole” od (a, b) . Slično, $(a, b) \preccurlyeq (x, y)$ ako i samo ako se (x, y) nalazi „desno i gore” od (a, b) (slika levo).



Tačka X trougla ABC je minimalna, po definiciji, ako nijedna tačka trougla ABC nije strogo manja od X , tj. nije „levo i dole” od X . Dakle, minimalni elementi su tačke duži AC . Slično, tačka X je maksimalna, po definiciji, ako nijedna tačka trougla nije strogo veća od X , tj. nije „desno i gore” od X . Dakle, maksimalni elementi su tačke duži BC (slika desno). ♣

4. Neka su funkcije $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$, $h : 2\mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N} + 1$, $j : 2\mathbb{N} + 1 \rightarrow \mathbb{Z}$, gde je $2\mathbb{N}$ skup parnih a $2\mathbb{N} + 1$ skup neparnih prirodnih brojeva, date sa:

$$f(x) = |x|, \quad g(x) = 2x, \quad h(x) = x + 1, \quad j(x) = x.$$

Ispitati da li su funkcije f, g, h, j injektivne (1-1) i surjektivne (na). Zašto $j \circ h \circ g \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ nije bijekcija?

Rešenje. Funkcija $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ data sa $f(x) = |x|$ **nije** 1-1 jer npr. $f(-2) = |-2| = 2 = |2| = f(2)$, ali $-2 \neq 2$. Sa druge strane, f **jeste** na jer za proizvoljno $x \in \mathbb{N}$ važi $x = |x| = f(x)$ (prva jednakost važi jer $x \in \mathbb{N}$, a druga ima smisla jer $x \in \mathbb{N}$ povlači i $x \in \mathbb{Z}$).

Funkcija $g : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ data sa $g(x) = 2x$ **jeste** i 1-1 i na. Primetimo najpre da je g dobro definisana, tj. za $x \in \mathbb{N}$, $g(x) = 2x$ zaista pripada $2\mathbb{N}$. Ako je $g(x) = g(x')$, tj. $2x = 2x'$, odatle je i $x = x'$; dakle g je 1-1. Sa druge strane, za proizvoljno $x \in 2\mathbb{N}$, važi $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$ i imamo $g(\frac{x}{2}) = 2\frac{x}{2} = x$; g je na.

Funkcija $h : 2\mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N} + 1$ data sa $h(x) = x + 1$ **jeste** i 1-1 i na. Primetimo najpre da je h dobro definisana, tj. ako $x \in 2\mathbb{N}$, tada je x paran prirodan broj, pa je $h(x) = x + 1$ neparan prirodan broj, tj. $h(x) \in 2\mathbb{N} + 1$. Ako je $h(x) = h(x')$, tj. $x + 1 = x' + 1$, sledi da je i $x = x'$, pa je h 1-1. Sa druge strane, ako je $x \in 2\mathbb{N} + 1$, tj. ako je x neparan prirodan broj, onda je $x - 1$ paran prirodan broj, tj. $x - 1 \in 2\mathbb{N}$, i imamo $h(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$; h je na.

Konačno, funkcija $j : 2\mathbb{N} + 1 \rightarrow \mathbb{Z}$ data sa $j(x) = x$ je dobro definisana jer $2\mathbb{N} + 1 \subseteq \mathbb{Z}$. Funkcija j očigledno **jeste** 1-1. Sa druge strane, j **nije** na, jer npr. za $x = -2 \in \mathbb{Z}$, ako bi bilo $f(t) = x$ za neko $t \in 2\mathbb{N} + 1$, bilo bi $t = -2$, a $-2 \notin 2\mathbb{N} + 1$.

Da funkcija $k := j \circ h \circ g \circ f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ nije bijekcija možemo da vidimo na dva načina.

I način. Izračunajmo $k(x)$, $x \in \mathbb{Z}$:

$$k(x) = j(h(g(f(x)))) = j(h(g(|x|))) = j(h(2|x|)) = j(2|x| + 1) = 2|x| + 1.$$

Sada $k(x)$ **nije** na jer za sve $x \in \mathbb{Z}$ važi $k(x) = 2|x| + 1 > 0$, pa npr. 0 nije u slici funkcije k . Već je ovo dovoljno da kažemo da k **nije** bijekcija, ali ipak primetimo da **nije** ni 1-1, jer npr. $k(-2) = 5 = k(2)$, ali $-2 \neq 2$.

II način. Imamo tvrđenje koje kaže da ako je $\psi \circ \varphi$ bijekcija, onda je φ 1-1 i ψ je na. Sada, ako bi $k = j \circ h \circ g \circ f = (j \circ h \circ g) \circ f = j \circ (h \circ g \circ f)$ bila bijekcija, iz plavog zapisa bi f bila 1-1, a iz crvenog bi j bila na; videli smo gore da ni jedno ni drugo nije tačno, pa su to još dva razloga zašto k nije bijekcija. ♣

5. Rešiti sistem kongruencija: $x \equiv_9 6 \quad x \equiv_{10} 7 \quad x \equiv_{11} 4$.

Rešenje. I način. Iz prve jednačine imamo da je $x = 9k + 6$, $k \in \mathbb{Z}$. Ubacivanjem u drugu dobijamo:

$$9k + 6 \equiv_{10} 7 \iff 9k \equiv_{10} 1.$$

Kako $(9, 10) = 1$, 9 je invertibilan modulo 10, i iz $9^2 \equiv_{10} 1$ sledi da mu je inverz jednak 9, pa množenjem poslednje jednakosti sa 9 dobijamo $k \equiv_{10} 9$. Odatle je $k = 10l + 9$, $l \in \mathbb{Z}$, pa vraćanjem imamo $x = 9k + 6 = 9(10l + 9) + 6 = 90l + 87$. Konačno, ubacivanjem u poslednju jednačinu imamo:

$$90l + 87 \equiv_{11} 4 \iff 2l - 1 \equiv_{11} 4 \iff 2l \equiv_{11} 5.$$

Kako $(2, 11) = 1$, 2 je invertibilan modulo 11, i iz $2 \cdot 6 \equiv_{11} 1$, sledi da mu je inverz jednak 6. Množenjem poslednje jednakosti sa 6 dobijamo $l \equiv_{11} 30 \equiv_{11} 8$. Odatle je $l = 11m + 8$, $m \in \mathbb{Z}$, pa vraćanjem dobijamo:

$$x = 90l + 87 = 90(11m + 8) + 87 = 990m + 720 + 87 = 990m + 807, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Završili smo zadatak.

II način. Koristimo algoritam iz dokaza kineske teoreme o ostacima. Označimo $m_1 = 9$, $a_1 = 6$, $m_2 = 10$, $a_2 = 7$, $m_3 = 11$, $a_3 = 4$. Dalje, označimo $M = m_1 m_2 m_3 = 990$, $M_1 = M/m_1 = 110$, $M_2 = M/m_2 = 99$, $M_3 = M/m_3 = 90$. Nađimo brojeve p_i, q_i takve da $p_i M_i + q_i m_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Za $i = 1$ imamo:

$$\begin{bmatrix} 110 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -12 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -12 \\ 1 & -4 & 49 \end{bmatrix}$$

odakle možemo uzeti $p_1 = -4$ i $q_1 = 49$. Za $i = 2$:

$$\begin{bmatrix} 99 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -10 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

odakle možemo uzeti $p_2 = -1$ i $q_2 = 10$. Za $i = 3$:

$$\begin{bmatrix} 90 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 11 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 1 & -5 & 41 \end{bmatrix}$$

odakle možemo uzeti $p_3 = -5$ i $q_3 = 41$.

Prema kineskoj teoremi jedno rešenje sistema je:

$$x_0 = p_1 M_1 a_1 + p_2 M_2 a_2 + p_3 M_3 a_3 = -4 \cdot 110 \cdot 6 - 99 \cdot 7 - 5 \cdot 90 \cdot 4 = -5133 \equiv_{990} 807,$$

a opšte rešenje je dato formulom $x = 807 + 990k$, $k \in \mathbb{Z}$. ♣

6. Na Ostrvu žive dva plemena: pleme Istinozboraca i pleme Lažova. Ostrvljani se ni po čemu ne razlikuju, osim što Istinozborci uvek govore istinu, dok Lažovi uvek lažu. Stranac na ostrvu je naišao na grupu od šest ostrvljana: A, B, C, D, E, F , i od njih je čuo sledeće informacije:

A je rekao: D je Istinozborac ili je C Lažov.

B je rekao: C i D su Lažovi.

C je rekao: E i F su iz istog plemena.

D je rekao: C i E su Istinozborci.

E je rekao: D i B su iz istog plemena.

Ko je Istinozborac, a ko je Lažov?

Rešenje. Sa a označimo tačnost iskaza „ A je Istinozborac.”; b, c, d, e, f imaju slično značenje. Ako A da izjavu tačnosti p , onda je $a = T$ ako i samo ako je A Istinozborac, ako i samo ako $p = T$; dakle, $a = p$. Prema tome iz datih izjava imamo sledeći sistem iskaznih jednačina:

- (1) $a = d \vee \neg c$;
- (2) $b = \neg c \wedge \neg d$;
- (3) $c = e \leftrightarrow f$;
- (4) $d = c \wedge e$;
- (5) $e = d \leftrightarrow b$.

Slova c i d imaju najveći broj pojavljivanja, pa ćemo diskutovati npr. po c .

I slučaj. $c = N$. Tada iz (1) imamo $a = T$, a iz (4) $d = N$, pa iz (2) sledi $b = T$. Iz (5) sada sledi $e = N$, pa iz (3) $f = T$. Dakle imamo rešenje $(a, b, c, d, e, f) = (T, T, N, N, N, T)$, tj. A, B, F su Istinozborci, a C, D, E Lažovi.

II slučaj. $c = T$. Tada iz (2) imamo $b = N$. Sada iz (4) imamo $d = e$, a iz (5) $e = \neg d$. Ova kontradikcija pokazuje da u ovom slučaju nemamo rešenje. ♣