

Функционалне зависности – примери

Ненад Митић

Математички факултет
nenad.mitic@matf.bg.ac.rs

Пример 1

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ и скуп ФЗ:

1) $A \longrightarrow BC$

2) $BC \longrightarrow DE$

3) $AEF \longrightarrow G$

Показати да важи ФЗ

$$ACF \longrightarrow DG$$

Пример 1 - наставак

- 4) $AC \rightarrow BC$ (ФЗ 1 + проширење C)
- 5) $AC \rightarrow DE$ (транзитивност - 2+4)
- 6) $ACF \rightarrow DEF$ (ФЗ 5 + проширење F)
- 7) $ACF \rightarrow ACDEF$ (ФЗ 6 + проширење AC)
- 8) $ACF \rightarrow AEF$ (7, декомпозиција)
- 9) $ACF \rightarrow G$ (транзитивност - 8+3)
- 10) $ACF \rightarrow D$ (6, декомпозиција)
- 11) $ACF \rightarrow DG$ (9, 10, унија)

Пример 2

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ и скуп ФЗ:

1) $A \longrightarrow BC$

2) $B \longrightarrow E$

3) $CD \longrightarrow EF$

Pokazati da važi FZ

$$AD \longrightarrow F$$

Пример 2 - наставак

- 4) $AD \longrightarrow BCD$ (FZ 1 + повећање D)
- 5) $AD \longrightarrow CD$ (4, декомпозиција)
- 6) $AD \longrightarrow EF$ (транзитивност - 5+3)
- 7) $AD \longrightarrow F$ (6, декомпозиција)

Пример 3

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ и скуп ФЗ:

1) $A \longrightarrow B$

2) $A \longrightarrow C$

3) $CD \longrightarrow E$

4) $CD \longrightarrow F$

5) $B \longrightarrow E$

Показати а важе ФЗ

$$A \longrightarrow E$$

$$AD \longrightarrow F$$

$$CD \longrightarrow EF$$

Пример 4

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$.

Показати да су следећа два скупа ФЗ:

X

$$1) B \longrightarrow CD$$

$$2) AD \longrightarrow E$$

$$3) B \longrightarrow A$$

и Y

$$4) B \longrightarrow CDE$$

$$5) B \longrightarrow ABC$$

$$6) AD \longrightarrow E$$

еквивалентни

Пример 4 - наставак

Доказ да се све ФЗ из скупа Y изводе из ФЗ из скупа X :

- 7) $AD \longrightarrow E$ (ФЗ 2 и 6 су идентичне)
- 8) $B \longrightarrow ACD$ (унија 1 и 2)
- 9) $B \longrightarrow AD$ (декомпозиција FZ 8)
- 10) $B \longrightarrow E$ (транзитивност 9+6)
- 11) $B \longrightarrow ACDE$ (унија 8 и 10)
- 12) $B \longrightarrow CDE$ (декомпозиција 11)
- 13) $B \longrightarrow AC$ (декомпозиција 8)
- 14) $B \longrightarrow ABC$ (проширење 13 са B)

Пример 4 - наставак

Доказ да се све ФЗ из скупа X изводе из ФЗ скупа Y :

15) $AD \longrightarrow E$ (ФЗ 6 и 2 су идентичне)

16) $B \longrightarrow CD$ (декомпозиција 4)

17) $B \longrightarrow A$ (декомпозиција 5)

Пример 5

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ и скуп Ф ФЗ:

- 1) $A \longrightarrow B$
- 2) $CH \longrightarrow A$
- 3) $B \longrightarrow E$
- 4) $BD \longrightarrow C$
- 5) $EG \longrightarrow H$
- 6) $DE \longrightarrow F$

Испитати да ли следеће ФЗ могу да се изведу из F:

- 7) $BFG \longrightarrow AE$
- 8) $ACG \longrightarrow DH$
- 9) $CEG \longrightarrow AB$

Пример 1

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп F ФЗ:

- 1) $A \longrightarrow BC$
- 2) $CD \longrightarrow E$
- 3) $B \longrightarrow D$
- 4) $E \longrightarrow A$

Одредити затворење F^+ скупа F .

Пример 1 - наставак

- 5) $A \longrightarrow D$ (транзитивност 1+3)
- 6) $A \longrightarrow DC$ (декомпозиција 1 - $A \longrightarrow C$, са 5)
- 7) $A \longrightarrow E$ (транзитивност 6+2)
- 8) $A \longrightarrow ABCDE$ (1,5,6,7, проширење A)
- 9) $E \longrightarrow ABCDE$ (транзитивност - 8+4)
- 10) $CD \longrightarrow ABCDE$ (транзитивност - 2+9)
- 11) $BC \longrightarrow CD$ (проширење 3 C)
- 12) $BC \longrightarrow ABCDE$ (транзитивност - 11+10)

Укључујући и релације које су пројекције изведених релација

Пример 2

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп F ФЗ:

- 1) $A \longrightarrow B$
- 2) $CD \longrightarrow E$
- 3) $B \longrightarrow C$

Одредити затворење F^+ скупа F .

Пример 2 - наставак

- $CD \longrightarrow D$ (рефлексивност 2), додати у F^+
- $A \longrightarrow D$ (транзитивност 1+3), додати у F^+
- Из $A \longrightarrow B$ се применом проширења добија
 $A \longrightarrow AB; AB \longrightarrow B; AC \longrightarrow BC;$
 $AD \longrightarrow BD; ABC \longrightarrow BC; ABD \longrightarrow BD; ACD \longrightarrow BCD$
- Из $B \longrightarrow C$ се применом проширења добија
 $AB \longrightarrow AC; BC \longrightarrow C; BD \longrightarrow CD; ABC \longrightarrow AC; ABD \longrightarrow ACD;$
...
- Применити транзитивност на све парове ФЗ F
- ...

Пример 3

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп F ФЗ:

- 1) $AB \longrightarrow C$
- 2) $CD \longrightarrow D$
- 3) $A \longrightarrow E$

Испитати да ли следеће ФЗ припадају F^+ .

- 4) $AB \longrightarrow D$
- 5) $AC \longrightarrow D$
- 6) $A \longrightarrow C$
- 7) $A \longrightarrow B$
- 8) $BE \longrightarrow D$

Пример 1

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп F ФЗ:

- 1) $A \longrightarrow B$
- 2) $B \longrightarrow C$
- 3) $CD \longrightarrow E$

Одредити затворење (скупа) атрибута $\{A\}^+$

Пример 1 - наставак

Иницијално $\{A\}^+ = \{A\}$

- декомпозиција скупа ФЗ тако да имају само један атрибут на десној страни
- на основу 1) добија се $\{A\}^+ = \{A, B\}$
- на основу 2) добија се $\{A\}^+ = \{A, B, C\}$
- не постоје додатне ФЗ чија десна страна $\not\subseteq \{A\}^+$. Одатле $\{A\}^+ = \{A, B, C\}$

Пример 2

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп F ФЗ:

1) $A \longrightarrow B$

2) $B \longrightarrow C$

3) $CD \longrightarrow E$

Одредити да ли ФЗ $A \longrightarrow E$ припада затворењу F^+ .

Пример 2 - наставак

У претходном примеру је нађено да је

$$\{A\}^+ = \{A, B, C\}$$

Како $E \notin \{A\}^+$ то се добија да $A \longrightarrow E \notin F^+$.

Пример 3

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп F ФЗ:

- 1) $A \longrightarrow BC$
- 2) $CD \longrightarrow E$
- 3) $B \longrightarrow D$
- 4) $E \longrightarrow A$

Одредити затворење скупа атрибута релвар-а R .

Пример 3 - наставак

Решење:

- $\{A\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{B\}^+ = \{BD\}$
- $\{C\}^+ = \{C\}$
- $\{D\}^+ = \{D\}$
- $\{E\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AB\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AC\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BC\}^+ = \{ABCDE\}$

- $\{BD\}^+ = \{BD\}$
- $\{BE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{DE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABC\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACE\}^+ = \{ABCDE\}$

- $\{ADE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BCD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABCD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABCE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BCDE\}^+ = \{ABCDE\}$

Пример 4

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ и скуп $F \Phi Z$:

1) $A \longrightarrow B$

4) $BD \longrightarrow C$

2) $CH \longrightarrow A$

5) $EG \longrightarrow H$

3) $B \longrightarrow E$

6) $DE \longrightarrow F$

Испитати, рачунањем затворења одговарајућег скупа атрибута, да ли следеће ФЗ могу да се изведу из F :

7) $BFG \longrightarrow AE$

8) $ACG \longrightarrow DH$

9) $CEG \longrightarrow AB$

Пример 5

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F\}$ и скуп ФЗ:

1) $AB \longrightarrow C$

2) $AD \longrightarrow E$

3) $B \longrightarrow D$

4) $AF \longrightarrow B$

5) $B \longrightarrow E$

Одредити затворење скупа атрибута $\{A\}^+, \{AB\}^+, \{AF\}^+$ релације R .

Пример 6

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп ФЗ:

- 1) $A \longrightarrow BC$
- 2) $CD \longrightarrow E$
- 3) $B \longrightarrow D$
- 4) $E \longrightarrow A$

Одредити затворење скупа атрибута и навести све кандидате за кључ релације R .

Пример 1

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F\}$ и скуп F ФЗ:

1) $AB \longrightarrow C$

2) $C \longrightarrow A$

3) $BC \longrightarrow D$

4) $ACD \longrightarrow B$

5) $BE \longrightarrow C$

6) $CE \longrightarrow FA$

7) $CF \longrightarrow BD$

8) $D \longrightarrow EF$

Одредити нередуцибилни покривач скупа F ФЗ.

Пример 1 - наставак

Први корак: разбијање свих ФЗ код којих се на десној страни јавља више од једног атрибута.

1) $AB \rightarrow C$

2) $C \rightarrow A$

3) $BC \rightarrow D$

4) $ACD \rightarrow B$

5) $BE \rightarrow C$

6) $CE \rightarrow A$

7) $CE \rightarrow F$

8) $CF \rightarrow B$

9) $CF \rightarrow D$

10) $D \rightarrow E$

11) $D \rightarrow F$

Пример 1 - наставак

Наредни корак: уклањање ФЗ које могу да се изведу из других ФЗ

! начин:

- ФЗ 2) \Rightarrow ФЗ 6), \rightarrow ФЗ 6) може да се искључи.
- ФЗ 8) $\Rightarrow CF \rightarrow BC$ (проширење C) + транзитивност са 3) $\Rightarrow CF \rightarrow D$. Одавде следи да ФЗ 9) може да се искључи
- ФЗ 11) $\Rightarrow ACD \rightarrow ACF$ (проширење AC); ФЗ 8) $\Rightarrow ACF \rightarrow AB$ (проширење A). Према правилу транзитивности важи $ACD \rightarrow AB$; одавде се декомпозицијом добија $ACD \rightarrow B$, одакле следи да ФЗ 4) може да се искључи

Пример 1 - наставак

Како даље редукције нису могуће добија се следећи нередуцибилни скуп:

1) $AB \rightarrow C$

2) $C \rightarrow A$

3) $BC \rightarrow D$

4) $BE \rightarrow C$

5) $CE \rightarrow F$

6) $CF \rightarrow B$

7) $D \rightarrow E$

8) $D \rightarrow F$

Пример 1 - наставак

II начин:

- ФЗ 2) $\Rightarrow CD \rightarrow ACD$ (проширење CD); заједно са ФЗ 4) + транзитивност $\Rightarrow CD \rightarrow B \Rightarrow$ ФЗ 4) може да се замени са $CD \rightarrow B$.
- ФЗ 2) \Rightarrow ФЗ 6), ФЗ 6) може да се искључи
- ФЗ 2) и 9) $\Rightarrow CF \rightarrow AD$ (композиције) $\Rightarrow CF \rightarrow ADC$ (проширење C); заједно са ФЗ 4) + транзитивност $\Rightarrow CF \rightarrow B \Rightarrow$ ФЗ 8) може да се искључи

Пример 1 - наставак

Како даље редукције нису могуће добија се следећи нередуцибилни скуп:

1) $AB \rightarrow C$

2) $C \rightarrow A$

3) $BC \rightarrow D$

4) $CD \rightarrow B$

5) $BE \rightarrow C$

6) $CE \rightarrow F$

7) $CF \rightarrow D$

8) $D \rightarrow E$

9) $D \rightarrow F$

Сваки од ових (различитих) скупова је нередуцибилни покривач оригиналног скупа ФЗ

Пример 2

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F\}$ и скуп ФЗ:

1) $AB \longrightarrow D$

2) $B \longrightarrow C$

3) $AE \longrightarrow B$

4) $A \longrightarrow D$

5) $D \longrightarrow EF$

Одредити нередуцибилни скуп ФЗ релације R .

Пример 2 - решење

1) $AB \rightarrow D$

2) $B \rightarrow C$

3) $AE \rightarrow B$

4) $A \rightarrow D$

5) $D \rightarrow E$

6) $D \rightarrow F$

Из 4) проширењем са B и декомпозицијом може да се добије 1), па је 1) вишак

Из транзитивности 4) и 5) важи $A \rightarrow E$ па је E вишак на левој страни ФЗ 3)

Пример 2 - решење

Остаје

1) $B \longrightarrow C$

2) $A \longrightarrow B$

3) $A \longrightarrow D$

4) $D \longrightarrow E$

5) $D \longrightarrow F$

Пример 3

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F\}$ и скуп ФЗ:

1) $A \longrightarrow B$

2) $AB \longrightarrow D$

3) $C \longrightarrow AD$

4) $C \longrightarrow E$

Одредити нередуцибилни скуп ФЗ релације R .

Пример 1

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп F ФЗ:

- 1) $A \longrightarrow BC$
- 2) $CD \longrightarrow E$
- 3) $B \longrightarrow D$
- 4) $E \longrightarrow A$

Одредити кандидате за кључ релвар-а R .

Релвар R је из примера Пример 3 - део:
одређивање затворења скупа атрибута

Пример 1 - наставак

Затворење скупа атрибута релације R је:

- $\{A\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{B\}^+ = \{BD\}$
- $\{C\}^+ = \{C\}$
- $\{D\}^+ = \{D\}$
- $\{E\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AB\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AC\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{AE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BC\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BD\}^+ = \{BD\}$
- $\{BE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{DE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABC\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ADE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BCD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{CDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABCD\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABCE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ABDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{ACDE\}^+ = \{ABCDE\}$
- $\{BCDE\}^+ = \{ABCDE\}$

Одавде следи да су кандидати за кључ релације
 A , E , CD , и BC

Пример 2

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E\}$ и скуп F ФЗ:

1) $AB \longrightarrow C$

2) $CD \longrightarrow E$

3) $DE \longrightarrow B$

Да ли су AB или ABD кандидати за кључ релвар-а R ? Образложити одговор

Пример 2 - наставак

Затворење скупа атрибута релвар-а R је:

- $\{A\}^+ = \{A\}$
- $\{B\}^+ = \{B\}$
- $\{C\}^+ = \{C\}$
- $\{D\}^+ = \{D\}$
- $\{E\}^+ = \{E\}$
- $\{AB\}^+ = \{ABC\}$
- $\{AC\}^+ = \{AC\}$
- $\{AD\}^+ = \{AD\}$
- $\{AE\}^+ = \{AE\}$
- $\{BC\}^+ = \{BC\}$
- $\{BD\}^+ = \{BD\}$
- $\{BE\}^+ = \{BE\}$
- $\{CD\}^+ = \{BCDE\}$
- $\{CE\}^+ = \{CE\}$
- $\{DE\}^+ = \{BDE\}$
- $\{ABD\}^+ = \{ABCDE\}$

Одавде следи да AB није, а ABD јесте кандидат за кључ

Пример 3

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ и скуп ФЗ:

- 1) $AB \longrightarrow C$
- 2) $CD \longrightarrow E$
- 3) $EF \longrightarrow G$
- 4) $FG \longrightarrow E$
- 5) $DE \longrightarrow C$
- 6) $BC \longrightarrow A$

Да ли су BDF , $ACDF$, $ABDFG$ или $BDFG$ кандидати за кључ релвар-а R ? Образложити одговор

Пример 3 - наставак

После рачунања затворења скупа атрибута релвар-а R :

- BDF није јер $\{BDF\}^+ = \{BDF\}$
- $ACDF$ није јер $\{ACDF\}^+ = \{ACDFEG\}$
- $ABDFG$ није иако је $\{ABDFG\}^+ = \{ABCDEFGG\}$ јер је његов подскуп такође кључ $\{BDFG\}^+ = \{BDFGECA\}$
- $BDFG$ јесте јер $\{BDFG\}^+ = \{ABCDEFGG\}$. Провера да ли је неки подскуп од $BDFG$ кључ:
 - Како се B, D и F не јављају ни у једној ФЗ на десној страни, они морају да буду део кључа
 - Како је $\{BDF\}^+ = \{BDF\}$ то BDF није кључ
 - Одатле је $BDFG$ минималан кључ, и на основу тога кандидат за кључ

Нека правила

Pravila:

- 1) Ако се атрибут не јавља на *десној* страни нити једне ФЗ тада он *мора да буде део кључа*
- 2) Ако се атрибут не јавља на *левој* страни нити једне ФЗ тада он *није део кључа*
- 3) Ако се атрибут не јавља ни на *левој* ни на *десној* страни нити једне ФЗ тада он *мора да буде део кључа* (постоји тривијална ФЗ $X \rightarrow X$)

Пример 4

Нека је дат релвар $R = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ и
скуп ФЗ:

- 1) $CD \longrightarrow A$
- 2) $EC \longrightarrow H$
- 3) $GHB \longrightarrow AB$
- 4) $C \longrightarrow D$
- 5) $EG \longrightarrow A$
- 6) $H \longrightarrow B$
- 7) $BE \longrightarrow CD$
- 8) $EC \longrightarrow B$

Наћи све кандидате за кључ релвар-а R .

Пример 4 – наставак

Применом претходних правила добија се:

- Како се атрибути E , F , и G не јављају на десној страни ФЗ они морају да буду део кључа.
- A се никада не јавља на левој страни, али се јавља на десној страни ФЗ. Одатле следи да A није део кључа.

Пример 4 - наставак

Провера да ли је кандидат за кључ скуп добијен додавањем једног атрибута на EFG

- $\{BEFG\}^+ = \{ABCDEFGH\}$. Одатле $BEFG$ јесте кандидат за кључ ($BE \rightarrow CD$, $EG \rightarrow A$, $EC \rightarrow H$)
- $\{CEFG\}^+ = \{ABCDEFGH\}$. Одатле $CEFG$ јесте кандидат за кључ ($EG \rightarrow A$, $EC \rightarrow H$, $H \rightarrow B$, $BE \rightarrow CD$)
- $\{DEFG\}^+ = \{ADEFHG\}$. Одатле $DEFG$ није кандидат за кључ ($EG \rightarrow A$)
- $\{HEFG\}^+ = \{ABCDEFGH\}$. Одатле $HEFG$ јесте кандидат за кључ ($EG \rightarrow A$, $H \rightarrow B$, $BE \rightarrow CD$)

Додавањем осталих атрибута формирају се суперкључеви, тако да су $BEFG$, $CEFG$ и $HEFG$ једини кандидати за кључ