Функционалне зависности

Ненад Митић

Математички факултет
nenad.mitic@matf.bg.ac.rs

Дефиниција

Нека је R релација и нека су X и Y произвољни подскупови атрибута из R. Тада **Y функционално зависи од X**, у ознаци $X \longrightarrow Y$ ако и само ако је свакој важећој вредности торке X у R придружена тачно једна вредност Y из R.

x Користи се још и термин X функционално одређује Y

x *Функционална* зависност: $\exists f : f(X) = Y$

Дефиниција

Интуитивно:

Функционална зависност у релацији R је тврђење облика "Ако су две торке од R идентичне на свим атрибутима A_1, A_2, ...,A_n тада морају да имају исте вредности и у осталим атрибутима B_1, B_2, ...,B_m"

Две торке су идентичне ако су им идентичне вредност респективних компонената.

Oznaka: $A_1, A_2, \ldots, A_n \longrightarrow B_1, B_2, \ldots, B_m$

Примери - функционалне зависности у бази stud2020

Релација DOSIJE

- $\{Indeks\} \longrightarrow \{Ime\}$
- $\{Indeks\} \longrightarrow \{Prezime\}$
- $\{Indeks\} \longrightarrow \{God\_rodjenja\}$
- $\{Indeks\} \longrightarrow \{Mesto\_rodjenja\}$

Примери - функционалне зависности у бази stud2020

Релација PREDMET

- {Id_predmeta}⟶{Sifra}
- {Id_predmeta}⟶{Naziv}
- {Id_predmeta}⟶{Bodovi}

Релација ISPIT

- {Indeks, Id_predmeta, Godina_roka, Oznaka_roka}⟶{Ocena}
- {Indeks, Id_predmeta, Godina_roka, Oznaka_roka}⟶{Datum_ispita}

Пример - ФЗ у релацији ISPITNI_ROK

```
GODINA_ROKA OZNAKA_ROKA          NAZIV
----------- -------------------- ---------------
       2011 jan                  Januar 2011
       2011 feb                  Februar 2011
       2011 apr                  April 2011
       2011 jun                  Jun 2011
       2011 sep                  Septembar 2011
       2011 okt                  Oktobar 2011
```

$$\{\text{Godina\_roka}, \text{Oznaka\_roka}\} \longrightarrow \{\text{Naziv}\}$$

Кључеви релације и функционалне зависности

Редефиниција кључева:

Подскуп атрибута $X \subseteq R$ релације R је кандидат за кључ релације R ако важи:

- $\forall Y : Y = R \diagdown X \implies X \longrightarrow Y$
- $\nexists Z, W : \ (Z \in X) \wedge (W = R \diagdown Z) \wedge (Z \longrightarrow W)$

Надкључ (суперкључ) релације R је скуп атрибута који укључује као подскуп бар један кандидат за кључ релације R.

Напомене

- Свака ФЗ представља ограничење интегритета
- Последица: сваки атрибут релације функционално зависи од неког кандидата за кључ
- ФЗ на зависи од тренутне вредности релвар-а и због тога нису ФЗ $\{Oznaka\_roka\} \longrightarrow \{Naziv\}$ i $\{Naziv\} \longrightarrow \{Oznaka\_roka\}$

Напомене (наставак)

- Два скупа функционалних зависности S и T над релацијом R су еквивалентни ако скуп инстанци релације P који задовољава S је једнак скупу инстанци релације P који задовољава T.
- У општем случају, скуп S ФЗ се изводи из скупа T ФЗ ако свака инстанца релације која задовољава све ФЗ из T такође задовољава све ФЗ из S.
- Последица: два скупа ФЗ S и T су еквивалентна акко се свака ФЗ у S изводи из ФЗ у T и свака ФЗ у T изводи из ФЗ у S.

Декомпозиција ФЗ

Декомпозиција: ФЗ

$A_1, A_2, \ldots, A_n \longrightarrow B_1, B_2, \ldots, B_m$

је еквивалентан са скупом ФЗ

$A_1, A_2, \ldots, A_n \longrightarrow B_1$
$A_1, A_2, \ldots, A_n \longrightarrow B_2$
...
$A_1, A_2, \ldots, A_n \longrightarrow B_m$

Композиција FZ

Композиција: скуп FZ

$A_1,\ A_2,\ ...,A_n \longrightarrow B_1$
$A_1,\ A_2,\ ...,A_n \longrightarrow B_2$
...
$A_1,\ A_2,\ ...,A_n \longrightarrow B_m$

je еквивалентан са ФЗ

$A_1,\ A_2,\ ...,A_n \longrightarrow B_1,\ B_2,\ ...,B_m$

Тривијалне и нетривијалне ФЗ

- Тривијална зависност је ФЗ која не може а да не буде задовољена за било који скуп вредности у релацији.
- $Y \subseteq X \Longrightarrow$FZ $X \longrightarrow Y$ je тривијална
- ФЗ која није тривијална је нетривијална

Тривијалне и нетривијалне ФЗ

Неке тривијалне зависности:

- {Indeks}⟶{Indeks}
- {Godina_roka, Oznaka_roka} ⟶{Godina_roka, Oznaka_roka}
- {Godina_roka, Oznaka_roka} ⟶{Godina_roka}
- {Godina_roka, Oznaka_roka} ⟶{Oznaka_roka}
- {Id_predmeta}⟶{Id_predmeta}
- ...

Затворење скупа ФЗ

Дефиниција: Нека je S скуп ФЗ над релацијом R. Скуп свих ФЗ које могу да се изведу из скупа S ФЗ се назива **затворење** од S и означава са S^+.

Последица: два скупа функционалних зависности S и над релацијом R су еквивалентни ако важи $\mathrm{S}^+ = T^+$.

Одређивање затворења скупа ФЗ

Затворење S^+ скупа ФЗ S може да се одреди применом правила - *Армстронговим аксиомама* којима се нове ФЗ изводе из постојећих.

Нека су A, B, и C произвољни подскупови атрибута релације R. Тада важе правила:

Рефлексивност:	$B \subseteq A$	$\Longrightarrow$	$A \longrightarrow B$
Проширење:	$A \longrightarrow B$	$\Longrightarrow$	$AC \longrightarrow BC$
Транзитивност:	$A \longrightarrow B \wedge B \longrightarrow C$	$\Longrightarrow$	$A \longrightarrow C$

Додатна правила

Из претходна три могу да се изведу додатна правила:

Само-одређење:

$$A \longrightarrow A$$

Декомпозиција:

$$A \longrightarrow BC \Longrightarrow A \longrightarrow B \wedge A \longrightarrow C$$

Unija:

$$A \longrightarrow B \wedge A \longrightarrow C \Longrightarrow A \longrightarrow BC$$

Композиција:

$$A \longrightarrow B \wedge C \longrightarrow D \Longrightarrow AC \longrightarrow BD$$

Општа теорема унификације:

$$A \longrightarrow B \wedge C \longrightarrow D \Longrightarrow A \cup (C - B) \longrightarrow BD$$

Пример алгоритма за рачунање F^+

Алгоритам за рачунање затворења скупа ФЗ F:

Inicijalno F^+=F;
repeat
  за сваку ФЗ $f \in F^+$
    применити рефлексивност и проширење на f
    додати добијене ФЗ у F^+
  за сваки пар ФЗ $(f_1, f_2) \in F^+$
    ако f_1 и f_2 могу да се комбинују помоћу транзитивности
      тада додати добијену ФЗ у F^+

until више не буде промена у F^+

Одређивање затворења скупа ФЗ - пример

Нека су A, B, C, D и F атрибути релације R, и нека је S скуп ФЗ дат са

$$\begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & BC \\ B & \longrightarrow & E \\ CD & \longrightarrow & EF \end{array}$$

Испитати да ли је ФЗ $AD \longrightarrow F$ у S^+

Primer: Dokaz da je $AD \longrightarrow F$ u S^+

1. $A \longrightarrow BC$ (дато)
2. $A \longrightarrow C$ (декомпозиција)
3. $AD \longrightarrow CD$ (проширење)
4. $CD \longrightarrow EF$ (дато)
5. $AD \longrightarrow EF$ (транзитивност)
6. $AD \longrightarrow F$ (декомпозиција)

Затворење скупа атрибута

- често треба израчунати да ли дата ФЗ припада затворењу скупа ФЗ
- У пракси се одређивање затворења ФЗ релативно ретко ради (алгоритам је неефикасан!)
- Да би одредили да ли је K надкључ треба одредити скуп атрибута релације R који функционално зависи од K
- Ако је скуп атрибута K надкључ тада K функционално одредује све атрибуте у R
- је надкључ акко је K^+ од K (у односу на дати скуп ФЗ) једнако скупу свих атрибута релације R

Затворење скупа атрибута

Дефиниција: Нека je $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ скуп атрибута релације R и S скуп ФЗ над R.

Затворење скупа атрибута A у односу на скуп S ФЗ je скуп атрибута B таквих да свака релација која задовољава све ФЗ у скупу S задовољава и ФЗ $A_1, A_2, ..., A_n \longrightarrow B$.

Затворење скупа атрибута

- Затворење скупа атрибута A се означава са A^+
- Увек важи да су сви појединачни атрибути из A у A^+

Одређивање затворења скупа атрибута

Нека је $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ скуп атрибута и S скуп ФЗ. Алгоритам за одређивање затворења A^+ је

1. Извршити декомпозицију свих ФЗ тако да имају само један атрибут на десној страни
2. Нека је X скуп атрибута који представља затворење. Иницијално $X = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$
3. Тражити ФЗ облика $B_1, B_2, \dots, B_m \longrightarrow C$ такве да $\forall i : B_i \subset X \land C \not\subseteq X$. Додати C у X. Понављати претрагу све док има промена скупа X.
4. Уколико не постоји атрибут који би могао да се дода скупу X тада је $X = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}^+$

Одређивање затворења скупа атрибута - пример

Нека релација садржи атрибуте A, B, C, D, E и F. Нека важе следеће ФЗ:

$$
\begin{array}{lcl}
AB & \longrightarrow & C \\
BC & \longrightarrow & AD \\
D & \longrightarrow & E \\
CF & \longrightarrow & B
\end{array}
$$

Шта је затворење скупа атрибута $\{A, B\}$?

Покривач скупа ФЗ

- Ако су S_1 и S_2 два скупа ФЗ и ако је свака ФЗ из S_1 укључена у S_2, тј. ако је S_1^+ подскуп од S_2^+ тада је S_2 покривач за S_1.
- Ако је S_1 покривач од S_2 и S_2 покривач од S_1 тада су S_1 и S_2 еквивалентни
- Ако РСУБП обезбеди ФЗ S_2 тада ће аутоматски бити обезбеђене и ФЗ у S_1

Нередуцибилни скуп ФЗ

Дефиниција: ФЗ $X \longrightarrow Y$ скупу S функционалних зависности је лево-нередуцибилна ако из X не може да се уклони ни један атрибут без промене затворења S^+

Зашто нередуцибилни скуп ФЗ:
Надкључ K је кандидат за кључ релације R акко је њен нередуцибилни надкључ

Нередуцибилни скуп ФЗ

Дефиниција: Скуп ФЗ je нередуцибилан ако

- Десна страна сваке ФЗ у S садржи тачно један атрибут
- Лева страна сваке ФЗ je лево нередуцибилна
- Ни једна ФЗ не може да се уклони из S без промене S^+

Скуп ФЗ који задовољава претходна правила се назива и *минималан* или *канонички*

Нередуцибилни скуп ФЗ - алгоритам

Алгоритам за налажење нередуцибилног скупа S ФЗ:

- Користећи правило декомпозиције преписати све ФЗ у S тако да десна страна садржи тачно један атрибут
- Елиминисати све редундантне ФЗ из скупа функционалних зависности добијених претходним поступком

Нередуцибилни скуп ФЗ - пример

Нека релвар R има атрибуте A, B, C, D и скуп ФЗ:

- $A \longrightarrow BC$
- $B \longrightarrow C$
- $A \longrightarrow B$
- $AB \longrightarrow C$
- $AC \longrightarrow D$

Наћи нередуцибилни скуп ФЗ еквивалентан датом скупу

Нередуцибилни скуп ФЗ - пример

Први корак: преписати скуп ФЗ тако да је на десној страни само један атрибут

- $A \longrightarrow B$
- $A \longrightarrow C$
- $B \longrightarrow C$
- $A \longrightarrow B$
- $AB \longrightarrow C$
- $AC \longrightarrow D$

Како се ФЗ $A \longrightarrow B$ јавља два пута, једно појављивање се елиминише

Нередуцибилни скуп ФЗ - пример

Други корак: атрибут C се елиминише са леве стране ФЗ $AC \longrightarrow D$ јер важи

- $A \longrightarrow C$ (добијено у првом кораку)
- $A \longrightarrow AC$ (проширење)
- Како важи и $AC \longrightarrow D \Longrightarrow A \longrightarrow D$ (транзитивност)

На основу претходног, фдобија се да је C на левој страни $AC \longrightarrow D$ редундантно

Нередуцибилни скуп ФЗ - пример

Трећи корак: ФЗ $AB \longrightarrow C$ се елиминише јер важи

- $A \longrightarrow C$ (добијено у првом кораку)
- $AB \longrightarrow CB$ (проширење)
- $AB \longrightarrow C$ (декомпозиција)

На основу претходног добија се да је $AB \longrightarrow C$ редундантно

Нередуцибилни скуп ФЗ - пример

Четврти корак: ФЗ $A \longrightarrow C$ се елиминише јер важи

- FZ $A \longrightarrow C$ (добијено у првом кораку)
- $A \longrightarrow B$ (дато)
- $B \longrightarrow C$ (дато)
- $A \longrightarrow C$ (транзитивност)

На основу претходног добија се да је $A \longrightarrow C$ редундантно

Добијени нередуцибилни скуп ФЗ је

$A \longrightarrow B$ $B \longrightarrow C$ $A \longrightarrow D$

Пројекција ФЗ

Нека се релација R са скупом S ФЗ пројектује на релацију $R_1 = \pi\{R\}$. Које ФЗ су важеће у R_1?

Одређује се *пројекција ФЗ* S која садржи све ФЗ такве да

- Могу да се изведу из S
- Укључују једино атрибуте из R_1

Пројекција ФЗ - алгоритам

- Нека је T скуп ФЗ у R_1. Иницијално је $T = \emptyset$
- $\forall X \subseteq R_1$ одредити X^+ у односу на ФЗ у S. Атрибути који су у R али не и у R_1 могу да се користе у израчунавању X^+. Додати у T све нетривијалне $X \longrightarrow A$ такве да $A \subset X^+ \wedge A \subset R_1$

Пројекција ФЗ - алгоритам

- Одређује се минимални скуп T на следећи начин:
  - Ако постоји $F \subset T$ која може да се изведе из других ФЗ у T, уклонити ФЗ F
  - Нека је $Y \longrightarrow B$ ФЗ из T са најмање два атрибута у Y и нека је Z добијено из Y уклањањем једног од атрибута. Ако $Z \longrightarrow B$ може да се изведе из ФЗ у T (укључујући $Y \longrightarrow B$), тада се $Y \longrightarrow B$ замељује са $Z \longrightarrow B$
  - Поновити претходне кораке све док има промена у T

Пројекција ФЗ - пример

Нека релација $R\{A, B, C, D\}$ садржи ФЗ

- $A \longrightarrow B$
- $B \longrightarrow C$
- $C \longrightarrow D$

Нека је $R_1\{A, C, D\} = \pi\{R\}$. Одредити скуп ФЗ релације R_1.