

Gramatika je *Greibach* normalnoj formi ukoliko je ε slobodna i ukoliko joj je svako ne- ε pravilo oblika $A \rightarrow a\alpha$, $a \in \Sigma$, $\alpha \in N^*$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ba|Ab \\ A &\rightarrow Sa|AAb|a \\ B &\rightarrow Sb|BBa|b \end{aligned}$$

Oslobodimo se prvo leve rekurzije iz ove gramatike. U tom cilju poredjajmo neterminale kao S, A, B . S nema direktne leve rekurzije, tako da u prvom koraku nema izmena. Zatim prelazimo na A . Zamenom S -a svojim desnim stranama dobijamo

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ba|Ab \\ A &\rightarrow Baa|Aba|AAb|a \\ B &\rightarrow Sb|BBa|b \end{aligned}$$

Oslobodimo se sada neposredne leve rekurzije iz

$$A \rightarrow Aba|AAb|Baa|a$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ba|Ab \\ A &\rightarrow Baa|a|BaaA'|aA' \\ A' &\rightarrow ba|Ab|baA'|AbA' \\ B &\rightarrow Sb|BBa|b \end{aligned}$$

Predjimo sada na neterminal B . Zamenimo najpre S svojim desnim stranama

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ba|Ab \\ A &\rightarrow Baa|a|BaaA'|aA' \\ A' &\rightarrow ba|Ab|baA'|AbA' \\ B &\rightarrow Bab|Abb|BBa|b \end{aligned}$$

Zamenimo sada A svojim desnim stranama

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ba|Ab \\ A &\rightarrow Baa|a|BaaA'|aA' \\ A' &\rightarrow ba|Ab|baA'|AbA' \\ B &\rightarrow Bab|Baabb|abb|BaaA'bb|aA'bb|BBa|b \end{aligned}$$

Oslobodimo se sada neposredne leve rekurzije iz

$$B \rightarrow Bab|Baabb|BaaA'bb|BBa|abb|aA'bb|b$$

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow Ba|Ab \\
A &\rightarrow Baa|a|BaaA'|aA' \\
A' &\rightarrow ba|Ab|baA'|AbA' \\
B &\rightarrow abb|aA'bb|b|abbB'|aA'bbB'|bB' \\
B' &\rightarrow ab|aabb|aaA'bb|Ba|abB'|aabbB'|aaA'bbB'|BaB'
\end{aligned}$$

Definišimo sada na sledeći način poredak medju neterminalima. Ukoliko postoji pravilo $A \rightarrow B\alpha$ onda je $A < B$. Ovo definiše parcijalni poredak medju neterminalima koji se može proširiti do linearnog. U našoj gramatici se to može uraditi ovako

$$B < B' < A < A' < S$$

Imajući ovaj poredak u vidu stižemo do gramatike u kojoj svako pravilo počinje terminalom. Zatim koristeći "trik" uvođenja novih neterminala dobijamo gramatiku u GNF

$$\begin{aligned}
B &\rightarrow ab'b'|aA'b'b'|b|ab'b'B'|aA'b'b'B'|bB' \\
B' &\rightarrow ab'|aa'b'b'|aa'A'b'b'|ab'B'|aa'b'b'B'|aa'A'b'b'B'| \\
&\quad ab'b'a'|aA'b'b'a'a'|ba'|ab'b'B'a'|aA'b'b'B'a'|bB'a'a'B'| \\
&\quad ab'b'a'B'|aA'b'b'a'B'|ba'B'|ab'b'B'a'B'|aA'b'b'B'a'B'|bB'a'a'B' \\
A &\rightarrow a|aA'| \\
&\quad ab'b'a'a'|aA'b'b'a'a'|ba'a'|ab'b'B'a'a'|aA'b'b'B'a'a'|bB'a'a'| \\
&\quad ab'b'a'a'A'|aA'b'b'a'a'A'|ba'a'A'|ab'b'B'a'a'A'|aA'b'b'B'a'a'A'|bB'a'a'A' \\
A' &\rightarrow ba'|ba'A'| \\
&\quad ab'|aA'b'| \\
&\quad ab'b'a'a'b'|aA'b'b'a'a'b'|ba'a'b'|ab'b'B'a'a'b'|aA'b'b'B'a'a'b'|bB'a'a'b'| \\
&\quad ab'b'a'a'A'b'|aA'b'b'a'a'A'b'|ba'a'A'b'|ab'b'B'a'a'A'b'|aA'b'b'B'a'a'A'b'|bB'a'a'A'b'| \\
&\quad ab'A'|aA'b'A'| \\
&\quad ab'b'a'a'b'A'|aA'b'b'a'a'b'A'|ba'a'b'A'|ab'b'B'a'a'b'A'|aA'b'b'B'a'a'b'A'|bB'a'a'b'A'| \\
&\quad ab'b'a'a'A'b'A'|aA'b'b'a'a'A'b'A'|ba'a'A'b'A'| \\
&\quad ab'b'B'a'a'A'b'A'|aA'b'b'B'a'a'A'b'A'|bB'a'a'A'b'A'b'A' \\
S &\rightarrow ab'b'a'|aA'b'b'a'|ba'|ab'b'B'a'|aA'b'b'B'a'|bB'a'| \\
&\quad ab'|aA'b'| \\
&\quad ab'b'a'a'b'|aA'b'b'a'a'b'|ba'a'b'|ab'b'B'a'a'b'|aA'b'b'B'a'a'b'|bB'a'a'b'| \\
&\quad ab'b'a'a'A'b'|aA'b'b'a'a'A'b'|ba'a'A'b'|ab'b'B'a'a'A'b'|aA'b'b'B'a'a'A'b'|bB'a'a'A'b'| \\
a' &\rightarrow a \\
b' &\rightarrow b
\end{aligned}$$

Kao što se da videti ovaj algoritam vodi rešenju koje ima previše pravila. Zato uradimo isti ovaj zadatak na drugi način. Zapišimo prvo polaznu gramatiku u matricnom obliku

$$[S, A, B] = [S, A, B] \begin{bmatrix} \emptyset & a & b \\ b & Ab & \emptyset \\ a & \emptyset & Ba \end{bmatrix} + [\emptyset, a, b]$$

Uvođenjem novih neterminala N_{ij} oslobodimo se leve rekurzije u matricnom obliku

$$[S, A, B] = [\emptyset, a, b] + [\emptyset, a, b] \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset & a & b \\ b & Ab & \emptyset \\ a & \emptyset & Ba \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \emptyset & a & b \\ b & Ab & \emptyset \\ a & \emptyset & Ba \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$$

tj. u razvijenom obliku

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aN_{21}|bN_{31} \\ A &\rightarrow a|aN_{22}|bN_{32} \\ B &\rightarrow b|aN_{23}|bN_{33} \\ N_{11} &\rightarrow aN_{21}|bN_{31} \\ N_{12} &\rightarrow a|aN_{22}|bN_{32} \\ N_{13} &\rightarrow b|aN_{23}|bN_{33} \\ N_{21} &\rightarrow b|bN_{11}|AbN_{21} \\ N_{22} &\rightarrow Ab|bN_{12}|AbN_{22} \\ N_{23} &\rightarrow bN_{13}|AbN_{23} \\ N_{31} &\rightarrow a|aN_{11}|BaN_{31} \\ N_{32} &\rightarrow aN_{12}|BaN_{32} \\ N_{33} &\rightarrow Ba|aN_{13}|BaN_{33} \end{aligned}$$

Uvrščavanjem desnih strana pravila za neterminale A i B i korišćenjem "trika" kojim od terminala "pravimo" neterminale GNF trivijalno sledi

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aN_{21}|bN_{31} \\ A &\rightarrow a|aN_{22}|bN_{32} \\ B &\rightarrow b|aN_{23}|bN_{33} \\ N_{11} &\rightarrow aN_{21}|bN_{31} \\ N_{12} &\rightarrow a|aN_{22}|bN_{32} \\ N_{13} &\rightarrow b|aN_{23}|bN_{33} \\ N_{21} &\rightarrow b|bN_{11}|ab'N_{21}|aN_{22}b'N_{21}|bN_{32}b'N_{21} \\ N_{22} &\rightarrow ab'|aN_{22}b'|bN_{32}b'|bN_{12}|ab'N_{22}|aN_{22}b'N_{22}|bN_{32}b'N_{22} \\ N_{23} &\rightarrow bN_{13}|ab'N_{23}|aN_{22}b'N_{23}|bN_{32}b'N_{23} \\ N_{31} &\rightarrow a|aN_{11}|ba'N_{31}|aN_{23}a'N_{31}|bN_{33}a'N_{31} \\ N_{32} &\rightarrow aN_{12}|bN_{32}|aN_{23}N_{32}|bN_{33}a'N_{32} \\ N_{33} &\rightarrow ba'|aN_{23}a'|bN_{33}a'|aN_{13}|ba'N_{33}|aN_{23}a'N_{33}|bN_{33}a'N_{33} \\ a' &\rightarrow a \\ b' &\rightarrow b \end{aligned}$$