1 Formalni jezici

Zadatak 1.1 *Neka je data azbuka* $\Sigma = \{0, 1\}$. *Odrediti sve reči* $x \in \Sigma^*$ *za koje važi:*

$$0x = x1 \tag{1}$$

Rešenje: Indukcijom po dužini reči dokažimo da ne postoji reč $x \in \Sigma^*$ koja zadovoljava relaciju (1).

1. Ne postoji reč dužine 0, za koju važi relacija (1). Zaista, jedina reč dužine 0 je ε, a za nju ne važi da je

   $$0\varepsilon = \varepsilon 1$$

   Slično, ne postoji ni reč dužine dužine 1, tj. slovo za koje važe uslovi zadatka, jer je

   $$00 \neq 01$$

   i slično

   $$01 \neq 11$$

   Tvrdjenje je znači ispravno za reči dužine $n = 0$ i $n = 1$.

2. *Induktivna hipoteza.* Pretpostavimo dalje, da tvrdjenje važi za $k < n$, tj. da ne postoji reč dužine k koja zadovoljava relaciju (1).

   Pokažimo da onda ne postoji ni reč dužine $n > 2$ koja zadovoljava uslov zadatka. Ako bi takva reč postojala, za nju bi važilo da je oblika

   $$x = 0x_1 1$$

   Iz polazne relacije bi dalje sledilo :

   $$00x_1 1 = 0x_1 11$$

   i dalje na osnovu zakona kancelacije :

   $$0x_1 = x_1 1$$

   Dužina reči $|x_1| = |x| - 2 = n - 2 < n$, tako da na osnovu induktivne hipoteze ne postoji reč x_1 koja bi zadovoljavala uslov zadatka. Samim tim, ne postoji ni reč x dužine n za koje bi relacija (1) bila tačna. $\square$

Zadatak 1.2 *Neka je data azbuka* $\Sigma = \{0, 1\}$. *Odrediti sve reči* $x \in \Sigma^*$ *za koje važi:*

$$0x = x0 \tag{2}$$

Rešenje: Skup rešenja jednačine je skup $A = \{0^n = \underbrace{0 \dots 0}_{n} \quad | \quad n \geq 0\}$

U zadacima ovog tipa, potrebno je dokazati da je svako rešenje jednačine sadržano u skupu A, kao i da je svaki elemenat skupa A rešenje jednačine.

($\supseteq$:) Uzmimo proizvoljnu reč $x \in A$. Ona je oblika $x = 0^n$, $n \geq 0$. Reč x zadovoljava jednačinu (2).

$$0x = 00^n = 0^{n+1} = 0^n 0 = x0$$

($\subseteq$:) Dokažimo indukcijom po dužini reči da je svako rešenje jednačine (2) sadržano u A.

1. Jedina reč dužine 0 je prazna reč $\varepsilon = 0^n \in A$. Prazna reč jeste rešenje jednačine (2) jer je :
   $$0\varepsilon = 0 = \varepsilon 0$$
   Jedina reč dužine 1, koja zadovoljava jednačinu (2) je $0 = 0^1 \in A$, jer je :
   $$00 = 00, \quad 01 \neq 10$$

2. *Induktivna hipoteza.* Pretpostavimo da za sve reči x, koje su rešenje jednačine (2) i koje su dužine $|x| = k < n$, važi da $x \in A$.

   Uzmimo reč x dužine $|x| = n > 2$. Tada važi da je x oblika :
   $$x = 0x_10$$
   Dužina reči $|x_1| = |x| - 2 = n - 2 < n$, tako da na osnovu induktivne hipoteze važi da je $x_1 \in A$. To znači da je $x = 0^m$, za neko $m \geq 0$. Pošto je $|x_1| = n - 2$, važi da je
   $$x_1 = 0^{n-2}$$
   a odatle sledi da je
   $$x = 00^{n-2}0 = 0^n \in A$$

□

Objasnite zašto je u prethodna dva zadatka slučaj $n = 1$ razmatran u okviru baze indukcije, a ne u okviru induktivnog koraka. U tom pravcu, uradite i sledeći zanimljiv zadatak, koji ilustruje koliko obazrivi moramo biti kada u dokazu nečega koristimo matematičku indukciju.

Objasnite šta ne valja u sledećem dokazu.

Zadatak 1.3 *Neka je dat neprazan skup obojenih klikera. Svi klikeri u tom skupu su iste boje.*

△

1. Baza indukcije. Ako imamo skup koji sadrži samo jedan kliker, svi klikeri tog skupa su iste boje.

2. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za svaki skup koji sadrži n klikera.

   Uzmimo skup A koji u sebi ima $n+1$ kliker. Fiksirajmo kliker koji možemo da označimo sa a. Skup $A \setminus a$ u sebi sadrži tačno n klikera, tako da na osnovu induktivne hipoteze možemo da zaključimo da su svi klikeri u tom skupu iste boje npr. crvene. Fiksirajmo sada neki drugi kliker iz skupa $A \setminus a$, npr. b. On je dakle crvene boje. Na osnovu induktivne hipoteze skup $A \setminus b$ u sebi sadrži sve klikere iste boje. Pošto se u njemu nalazi i kliker a, zajedno sa svim ostalim crvenim klikerima, i on mora biti crven. Dakle svi klikeri skupa A su crveni, tj. iste boje.

□

1.1 Levijeva lema i njene primene

Zadatak 1.4 (Levijeva lema) *Neka su x, y, z, w četiri reči iz Σ^* Ako je*

$$xy = zw \tag{3}$$

onda postoji jedinstvena reč $t \in \Sigma^*$, takva da je:

1. *ili $x = z$ i $y = w$ (tj. $t = \varepsilon$)*
2. *ili $x = zt$ i $w = ty$*
3. *ili $z = xt$ i $y = tw$*

$\triangle$

Izvedimo dokaz indukcijom po dužini reči $|xy|$.

1. $|xy| = 0$. Tada je $xy = \varepsilon$, pa je $x = y = \varepsilon$, jer reči iz Σ^+ nemaju inverzni elemenat. Znači da je onda i $zw = \varepsilon$, pa je i $z = w = \varepsilon$.
2. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve reči dužine $k < n$.

   Neka je $|xy| = n > 0$. Razlikujmo sledeće slučajeve :

   (a) $x = \varepsilon$. Tada je $xy = y = zw$, pa je reč $t = z$ i važi da je $z = xt$ i $y = tw$.

   (b) $z = \varepsilon$. Tada je $xy = zw = w$, pa je reč $t = x$ i važi da je $x = zt$ i $w = ty$.

   (c) $x \neq \varepsilon$ i $z \neq \varepsilon$. Tada se x može na jedinstven način napisati kao $x = ax_1$, gde je $a \in \Sigma$, $x_1 \in \Sigma^*$. Slično, z se može jedinstveno napisati u obliku $z = bz_1$, $b \in \Sigma$, $z_1 \in \Sigma^*$. Na osnovu relacije (3), sledi da mora da važi da je $a = b$. Pošto važi zakon leve kancelacije iz relacije

   $$ax_1y = bz_1w$$

   sledi da je

   $$x_1y = z_1w$$

   Važi da je $|x_1y| = n - 1 < n$, tako da možemo na ovom mestu da iskoristimo induktivnu hipotezu. Dakle, postoji jedinstvena reč $t \in \Sigma^*$, tako da je :

   i. $x_1 = z_1$ i $y = w$.
   U ovom slučaju važi i da je $x = ax_1 = az_1 = z$.

   ii. $x_1 = z_1t$ i $w = ty$.
   Tada je i $x = ax_1 = az_1t = zt$.

   iii. $z_1 = x_1t$ i $y = tw$.
   Tada je i $z = az_1 = ax_1t = xt$.

$\square$

Zadatak 1.5 *Neka je na skupu Σ^* definisana relacija $\prec$ na sledeći način:*

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad (\exists t \in \Sigma^*) y = xt \tag{4}$$

Znači $x \prec y$, akko je x levi prefiks od y.[1] *Pokazati da važi:*

$$(x \prec z) \wedge (y \prec z) \Rightarrow (x \prec y) \vee (y \prec x) \tag{5}$$

[1] Ovo je takozvani prefiksni poredak

△

Pretpostavimo da je $x \prec z$ i $y \prec z$. Tada važi da postoje reči t_1 i t_2, tako da je $z = xt_1$ i $z = yt_2$. Samim tim važi da je

$$xt_1 = yt_2$$

Na osnovu Levijeve leme sledi jedan od sledećih slučajeva :

1. $x = y$ i $t_1 = t_2$. Tada je i $x \prec y$ i $y \prec x$.
2. $(\exists t \in \Sigma^*)$ $x = yt$ i $t_2 = tt_1$. Iz $x = yt$ sledi da je $y \prec x$.
3. $(\exists t \in \Sigma^*)$ $y = xt$ i $t_1 = tt_2$. Iz $y = xt$ sledi da je $x \prec y$.

□

Zadatak 1.6 *Neka su $x, y \in \Sigma^*$. Pokazati da je*

$$xy = yx \tag{6}$$

akko postoji $z \in \Sigma^*$ i $k, m \in \mathbb{N}$, tako da je $x = z^k$ i $y = z^m$.

△

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da postoje $z \in \Sigma^*$ i $k, m \in \mathbb{N}$, tako da je $x = z^k$ i $y = z^m$. Pokažimo jednostavnom zamenom da je tada $xy = yx$

$$xy = z^k z^m = z^{k+m} = z^{m+k} = z^m z^k = yx$$

($\Rightarrow$:) Izvedimo dokaz indukcijom po dužini reči $|xy|$.

1. Neka je $|xy| = 0$. Tada je $x = \varepsilon$ i $y = \varepsilon$. U tom slučaju je $z = \varepsilon$ i $x = z^1$ i $y = z^1$.
2. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za reči dužine stroge manje od n. Neka je $|xy| = n$. Razlikujmo sledeće slučajeve:
   (a) $x = \varepsilon$. Tada je $z = y$, $x = z^0$, a $y = z^1$
   (b) $y = \varepsilon$. Tada je $z = x$, $x = z^1$, a $y = z^0$
   (c) $x \neq \varepsilon$ i $x \neq \varepsilon$. U ovom slučaju na jednakost (6) primenimo Levijevu lemu. Može da se dogodi jedan od sledećih slučajeva:
      i. $x = y$ i $y = x$. Tada je $z = x = y$, a $k = m = 1$.
      ii. Postoji $t \in \Sigma^*$, tdj. $x = yt$ i $ty = x$. Odavde sledi da je $yt = ty$. Pošto je $|yt| < n$, postoji $z \in \Sigma^*$ tako da je $y = z^k$, $t = z^m$. Tada je i $x = yt = z^k z^m = z^{m+n}$, pa tvrdjenje važi i u ovom slučaju.
      iii. Postoji $t \in \Sigma^*$, tdj. $y = xt$ i $tx = y$. Odavde sledi da je $xt = tx$. Pošto je $|xt| < n$, postoji $z \in \Sigma^*$ tako da je $x = z^k$, $t = z^m$. Tada je i $y = xt = z^k z^m = z^{m+n}$, pa tvrdjenje važi i u ovom slučaju.

□