

Шта није лоше знати:

- (1) Комплексна равна и Риманова сфера; стереографска пројекција и њене особине. Сферна и еуклидска метрика и однос између њих.
- (2) Мебијусове трансформације: својство очувања углова, слике правих и кругова, геометријска својства у сферној и еуклидској метрици.
- (3) Конформни аутоморфизми диска и полуравни.
- (4) Модел равни Лобачевског.
- (5) \mathbb{C} -диференцијабилне функције и холоморфност (дефиниције). Примери \mathbb{R} -диференцијабилних функција које нису \mathbb{C} -диференцијабилне. Геометријске интерпретације (очување углова, извод у правцу).
- (6) Коши – Риманове једначине. Хармонијске функције.
- (7) Кошијева теорема (лакша верзија, за C^1 функције) и из ње изведена Кошијева интегрална формула (такође за C^1 функције). Напомена да услов C^1 може да се ослаби и замени \mathbb{C} -диференцијабилношћу.
- (8) Последица Кошијевог интегралног формуле: аналитичност холоморфних функција. Кошијевог неједнакости.
- (9) Принцип изолованих нула и Теорема јединствености.
- (10) Лиувилева теорема (два доказа: помоћу Кошијевих неједнакости и помоћу Парсевалове једнакости).
- (11) Независност интеграла холоморфне функције од пута у просто повезаној области. Примитивна функција холоморфне функције. Морерина теорема.
- (12) Униформни лимес низа холоморфних функција, његово (комплексно) диференцирање и интеграција. Вајерштрасова теорема.
- (13) Лоранови редови. Отклоњиви сингуларитети, есенцијални сингуларитети и полови. Понашање функције (лимеси) у сингуларним тачкама – еквивалентне карактеризације сваке од ове три врсте сингуларитета.
- (14) Резидууми. Примена на рачунање интеграла. Илустрација на примерима $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ и сл.
- (15) Принцип максимума модула (три доказа: помоћу Теореме о отвореном пресликавању, помоћу Кошијевог интегралног формуле и помоћу Парсевалове једнакости) и Шварцова лема.
- (16) Принцип аргумента и из њега изведена Рушеова теорема.
- (17) Теорема о отвореном пресликавању као последица Рушеове теореме.
- (18) Три доказа Основног става алгебре: помоћу Лиувилеве, Рушеове и Теореме о отвореном пресликавању.
- (19) Локално понашање холоморфне функције – једначина $f(z) = w$ у близини решења $f(z_0) = w_0$; разликовање случајева $f'(z_0) \neq 0$ и $f'(z_0) = 0$.
- (20) Појам аналитичког продужења и Теорема о монодромiji.
- (21) Гране аналитичких функција. Илустрација на примеру функције \sqrt{z} .
- (22) Функција \sqrt{z} дефинисана на два начина – као инверзна функцији z^2 и као аналитичко продужење функције $(1+(z-1))^{1/2} = \sum \binom{1/2}{n} (z-1)^n$ са диска конвергенције овог реда. Функција $\sqrt[n]{z}$. Дефиниција функције $\log z$ као инверзне експоненцијалној и као аналитичког продужења функције $\log(1+(z-1)) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$. Дефиниција z^a и a^z .
- (23) Појам Риманове површи.

Шта није лоше умети:

- (1) Наћи реални и имагинарни део броја $\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-1}}\right)^4$.
- (2) Решити једначину $\bar{z} = z^2$ по z .
- (3) Доказати да је површина полигона са теменима z_1, \dots, z_n у комплексној равни једнака $\frac{1}{2}\text{Im}(\bar{z}_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \dots + \bar{z}_n z_1)$.
- (4) Нека је $I(z) = \frac{1}{z}$. Наћи слику $I(A)$ ако је скуп A
 - (а) круг $|z - \zeta| = |\zeta|$ за неко $\zeta \in \mathbb{C}$;
 - (б) права $y = x + a$ за неко $a \in \mathbb{R}$;
 - (в) парабола $y = x^2$.
- (5) Наћи Мебијусову трансформацију која слика круг $|z| = 1$ на праву паралелну имагинарној оси, тачку 4 у тачку нула и круг $|z| = 2$ на самог себе.
- (6) (а) Нека је $f(z) = z^2$ и C круг $|z - 1| = 1$. Скицирати криву $f(C)$, израчунати њену дужину и површину области унутар ње.
(б) Нека је Γ регуларна крива на Римановој сфери. Доказати да је њена дужина једнака

$$L(\Gamma) = \int_{\gamma} \frac{2}{1 + |z|^2} ds$$

где је γ њена стереографска пројекција (s је природни параметар криве, тј. параметар у параметризацији дужином лука).

- (7) Доказати да функција

$$f(z) = \begin{cases} \frac{(1+i)\text{Im}z^2}{|z|^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

задовољава Коши–Риманов услов у нули. Да ли је f диференцијабилна у нули?

- (8) Написати Коши – Риманове једначине у поларним координатама.
- (9) Нека је $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна функција две реалне (тј. једне комплексне) променљиве, таква да је $f(z) = u^2(z) + iu(z)$ холоморфна функција. Доказати да је $f \equiv \text{const}$.
- (10) Нека је U област у јединичном диску и V њена слика при некој изометријској трансформацији равни Лобачевског (у моделу на диску). Доказати да је

$$\iint_U \frac{dx dy}{(1 - x^2 - y^2)^2} = \iint_V \frac{d\zeta d\eta}{(1 - \zeta^2 - \eta^2)^2}.$$

- (11) Израчунати

$$\oint_E \frac{dz}{1 + z^2},$$

где је E елипса $x^2 + 4y^2 = 1$, оријентисана позитивно (тако да елипса при њеном обиласку остаје са леве стране).

- (12) Израчунати

$$\oint_E \frac{dz}{1 + z^4}$$

где је E елипса $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$, оријентисана позитивно.

(13) Израчунати

$$\oint_C z\bar{z}^{-1} dz$$

где је C граница горње половине прстена $1 < |z| < 2$, оријентисана позитивно.

(14) Нека је функција f аналитичка у проширеној комплексној равни $\bar{\mathbb{C}}$, сем у коначно много тачака у којима има полове. Ако је P број полова (рачунајући вишеструкости), а N број нула ове функције, доказати да је $P = N$. Примером показати да ово не важи за функцију са истим својствима у комплексној равни \mathbb{C} .

(15) Нека је ζ есенцијални изоловани сингуларитет функције f и P неконстантни полином. Доказати да је ζ есенцијални сингуларитет функције $P \circ f$.

(16) Доказати да је највећи отворен скуп у коме Лоранов ред

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$$

конвергира прстен, тј. скуп облика $r < |z-a| < R$. Овај прстен назива се *прстеном конвергенције* Лорановог реда. Дати пример Лорановог реда са празним прстеном конвергенције, али непразним скупом тачака у којима конвергира.

(17) Доказати да је са

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n + z^{-n}}$$

дефинисана функција која је аналитичка на скупу $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{|z|=1\}$ и која не може да се аналитички продужи ни на један већи скуп.

(18) Доказати да су функције

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} \quad \text{и} \quad g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

аналитичке на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Доказати да у свакој тачки скупа \mathbb{Z} функције f и g имају исти главни део Лорановог реда. Закључити да функција $h = f - g$ може да се продужи до целе функције. Користећи периодичност функција f и g доказати да је h ограничена и да одатле следи

$$\frac{\pi^2}{\sin(\pi z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Израчунати

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^3}$$

за $z \notin \mathbb{Z}$.

(19) Доказати да је

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3}{8}\pi.$$

- (20) Израчунати интеграл функције $\frac{\pi \sin(az)}{z^3 \sin(\pi z)}$ по рубу квадрата са теменима $(n + \frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$. Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

- (21) Нека су функције f и g холоморфне на јединичном диску $|z| < 1$ и непрекидне на његовом затворењу $|z| \leq 1$. Посматрајући функцију $z \mapsto e^{i\alpha} f(z) + e^{i\beta} g(z)$ за погодне изабране константе α и β , доказати да функција $|f(z)| + |g(z)|$ достиже максимум на кругу $|z| = 1$.
- (22) Доказати да једначина $(z+1) = (z+2)e^z$ нема решења у десној полуравни. Доказати да за $p > 1$ једначина $z + e^{-z} = p$ има једно решење у десној полуравни.
- (23) Нека је функција f холоморфна на јединичном диску $|z| < 1$ и непрекидна на његовом затворењу $|z| \leq 1$. Претпоставимо да f слика круг $|z| = 1$ на себе и нема нула. Доказати да је $f = \text{const}$.
- (24) Нека је f цела неконстантна функција која има лимес у ∞ . Доказати да f има бар једну нулу.
- (25) Нека је p полином степена n . Доказати да ни за једно $c \in \mathbb{R}$ скуп $\{z \in \mathbb{C} \mid |p(z)| = c\}$ не може да има више од n компоненти повезаности.
- (26) Нека је f функција која је аналитичка на скупу $|z| > 1$ и непрекидна на $|z| \geq 1$, и која има коначан лимес у ∞ . Доказати да f достиже максимум на кругу $|z| = 1$. Доказати да, ако f није константна, функција $r \mapsto \max_{|z|=r} |f(z)|$ строго опада на $[1, +\infty)$.
- (27) Доказати да функција Жуковског $f(w) = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$ бихоломорфно пресликава прстен $1 < |w| < R$ на елипсу са полуосама

$$a = \frac{1}{2}(R + R^{-1}), \quad b = \frac{1}{2}(R - R^{-1}).$$

- (28) Нека је P полином степена n и $|P(z)| \leq M$ на скупу $|z| \leq 1$. Доказати да је $|P(z)| \leq M|z|^n$ на скупу $|z| \geq 1$.
- (29) Нека је P полином степена n и $|P(x)| \leq M$ за $x \in [-1, 1]$. Доказати да је за свако z унутар елипсе са фокусима -1 и 1 и полуосама a и b

$$|P(z)| \leq M(a+b)^n.$$

Упутство: искористити неколико претходних задатака.

- (30) Нека је $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ мероморфна функција која има коначан скуп полова $\{a_1, \dots, a_m\}$ од којих ни један није цео број и за коју важи

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0.$$

Доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n f(k) = - \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z=a_j} \pi f(z) \cot(\pi z).$$

Доказати да је за $a, b \notin \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)(n-b)} = -\pi^2 \frac{\cot(\pi a) - \cot(\pi b)}{\pi a - \pi b}.$$

Израчунати $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.