

АНАЛИЗА 2, 2005.

Функције ограничене варијације. Стилтјесов интеграл.

- (1) Да ли је $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ функција ограничене варијације?
- (2) Нека је $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ функција ограничене варијације која задовољава $f(0) = f(2\pi)$. Доказати да је

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \right| \leq \frac{1}{n} V_0^{2\pi}(f).$$

- (3) Скицирати график функције $x \mapsto V_a^x(f)$ ако је
- (а) $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $a = -2$,
- (б) $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] - x$, $a = 0$
- (4) Израчунати $(S) \int_0^5 x d([x] - x)$.
- (5) Нека је $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функција ограничене варијације, непрекидна у тачки $\xi \in [a, b]$ и нека је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ дефинисана са $f(\xi) = 1$ и $f(x) = 0$ за $x \neq \xi$.
- (а) Да ли је $f \in \mathcal{R}(g)$? Ако јесте, израчунати $(S) \int_a^b f dg$.
- (б) Да ли се, ако изоставимо претпоставку о непрекидности функције g у тачки ξ , мења одговор у (а)?
- (6) Дате су функције

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x \geq 0, \\ 0, & \text{за } x < 0, \end{cases} \quad \chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0, \\ 0, & \text{за } x \leq 0, \end{cases} \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{за } x = 0, \\ 0, & \text{за } x < 0. \end{cases}$$

Нека је $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена функција.

- (а) Доказати да је $f \in \mathcal{R}(\rho)$ ако и само ако је f непрекидна здесна у 0 и израчунати $(S) \int_{-1}^1 f d\rho$ у том случају.
- (б) Доказати да је $f \in \mathcal{R}(\chi)$ ако и само ако је f непрекидна слева у 0 и израчунати $(S) \int_{-1}^1 f d\chi$ у том случају.
- (в) Доказати да је $f \in \mathcal{R}(\eta)$ ако и само ако је f непрекидна у 0 и израчунати $(S) \int_{-1}^1 f d\eta$ у том случају.
- (г) Нека је $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ низ у $(0, 1)$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ низ позитивних бројева такав да ред $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n$ конвергира и $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \rho(x - \xi_n)$. Доказати да за сваку непрекидну функцију $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ важи $\psi \in \mathcal{R}(g)$ и

$$(S) \int_0^1 \psi dg = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \psi(\xi_n).$$

- (7) Нека су $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничене функције.
- (а) Нека је бар једна од функција f, g непрекидна у тачки $c \in (a, b)$. Доказати да из егзистенције интеграла

$$(S) \int_a^c f dg \quad \text{и} \quad (S) \int_c^b f dg$$

слиди егзистенција интеграла $(S) \int_a^b f dg$.

- (б) Да ли (а) важи и ако су обе функције прекидне у c ?