Анализа 2

предавања

2020/21.

АНАЛИЗА 2
(2020 – 2021)

Литература:

1. П. Милинковић – СКРИПТА
2. V.A.Zorich – MATHEMATICAL ANALYSIS 1 & 2
3. W. Rudin – PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS

0. УВОД

Подсетимо се Анализе 1:

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ – комплетно тотално уређено поље

Дефиниција: $(A, +, \leq, 0)$ је тотално уређена Абелова група ако је:

1. $(A, +, 0)$ Абелова група
2. $\leq$ релација тоталног поретка на A
3. релација $\leq$ је сагласна са транслацијом, тј. важи:

$$x \leq y \Rightarrow x + a \leq y + a$$

(сагласност операције и релације дела структуре $(A, +, \leq, 0)$)

Потпуно уређена Абелова група се назива Архимедском ако у њој важи Архимедова аксиома:

$$(\forall a>0)(\forall b\in A)(\exists n\in\mathbb{N})\ n\cdot a\geq b.$$

где је $n\cdot a := \sum_{j=1}^{n} a = \underbrace{a+\ldots+a}_{n \text{ пута } a}$.

Потпуно уређена Абелова група је Конторхетна ако у њој важи Аксиома супремума: Сваки непразан одозго ограничен скуп има супремум.

Став: Свака конторхетна потпуно уређена Абелова група је Архимедска.

$(A, +, \leq, 0)$ комплетна тотално уређена Абелова група, $a \in A^{\mathbb{N}}$ (низ у A).

Дефиниција: Горњи и доњи лимес низа a_n дефинишу се са

$$\overline{\lim}\, a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup \{ a_k \mid k \geq n \}$$

$$\underline{\lim}\, a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf \{ a_k \mid k \geq n \}$$

Низ a_n је **конвергентан** ако је

$$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n \quad \left(\overset{\exists \in \phi}{=\!=} \lim_{n \to \infty} a_n \right).$$

Елемент $a_\infty := \lim_{n \to \infty} a_n$ називамо **граничном вредношћу** или **лимесом** низа a_n.

Тачка $a \in A$ је **тачка нагомилавања** скупа $S \subseteq A$ ако постоји низ $s \in (S \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ (тј. $s_n \in S \setminus \{a\}$) такав да је $\lim_{n \to \infty} s_n = a$.

Нека су $(A_1, +_1, \leq_1, 0_1)$ и $(A_2, +_2, \leq_2, 0_2)$ два комплетно тотално уређена Абелова група, $S \subseteq A_1$, $f: S \to A_2$ и $a \in A_1$ тачка нагомилавања скупа S. Елемент $b \in A_2$ је **лимес** пресликавања f у тачки a ако за сваки низ $s \in (S \setminus \{a\})^{\mathbb{N}}$ такав да је $\lim_{n \to \infty} s_n = a$ важи $\lim_{n \to \infty} f(s_n) = b$. Тада пишемо

$$b = \lim_{x \to a} f(x).$$

Пресликавање $f: S \to A_2$ је непрекидно у тачки $s \in S$ ако је $\lim\limits_{x \to s} f(x) = f(s)$.

Дошли смо до појма непрекидности полазећи од релације поретка. Специјално, за $A_1 = A_2 = \mathbb{R}$, тј. за случај комплетне тотално уређене Абелове групе $(\mathbb{R}, +, \leq, 0)$, добијамо појам непрекидности реалне функције реалне променљиве.

Како уопштити појам непрекидности на вишедимензиони случај:

$$\boxed{\mathbb{R}^k \supseteq S \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l \ ?}$$

Алгебарска чињеница: не постоји архимедски (па самим тим ни комплетан) поредак на $(\mathbb{R}^k, +, 0)$ за $k > 1$.

У извесном смислу слично, али много једноставније, тврђење за $k=2$ смо доказали на курсу Анализе 1: $(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ не допушта структуру уређеног поља. Разлог: у сваком уређеном пољу је $0<1$ (одакле следи $-1<0$) и $x^2 \geq 0$; док је у $\mathbb{C}$ $i^2=-1$.

Приступимо зато дефиницији непрекидности у $\mathbb{R}$ на други (еквивалентан) начин.

Дефиниција: Апсолутна вредност у тотално уређеној Абеловој групи $(A, +, \leq, 0)$ је пресликавање

$$\boxed{|\cdot| : A \longrightarrow A, \quad |a| := \max\{a, -a\}}$$

Својства:

- $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \iff a = 0$
- $|-a| = |a|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$

Дефиниција: Низ a_n конвергира на a_∞ ако

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_\infty| < \varepsilon.}$$

Лимес пресликавања и непрекидност се изводе из лимеса низа као и раније.

Дефиниција пресликавање („норма"):

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}.$$

Оно има својства:

(1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\|-x\| = \|x\|$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Прва два су тривијална, док је неједнакост Минковског.

Иста својства има и пресликавање

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

за $p \geq 1$, као и

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_j| : 1 \leq j \leq k\}.$$

Дефиниција: Структура $(A, +, \|\cdot\|, 0)$, где је $(A, +, 0)$ Абелова група, а $\|\cdot\| : A \longrightarrow \mathbb{R}$ функција која задовољава (1) - (3) назива се нормираном Абеловом групом, а функција $\|\cdot\|$ нормом на A.

У оваквој структури можемо да дефинишемо конвергенцију и све наше уведене појмове низова и непрекидности функције:

Дефиниција: Низ a_n конвергира ка a_∞ ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow \|a_n - a_\infty\| < \varepsilon.$$

Још једноставније:

$$\boxed{a_n \to a_\infty \iff \|a_n - a_\infty\| \to 0}$$

Приметимо да је низ на десној страни – низ реалних бројева. Дакле, појам његове конвергенције нам је познат из Анализе 1.

Дефинишимо:

$$\boxed{d(x,y) := \|x-y\|.}$$

Својства:

(M1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

То нас доводи до општијег појма:

Дефиниција: Пар (M,d), где је M скуп, а $d: M\times M \to \mathbb{R}$ функција која задовољава (M1)–(M3) назива се метричким простором, а функција d метриком или растојањем.

Појам конвергенције (и из њега изведене појмове непрекидности и лимеса пресликавања) дефинишемо и у метричком простору:

Дефиниција:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty \overset{\text{ДЕФ}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} d(a_n, a_\infty) = 0.}$$

Пример: Дискретна метрика

M - произвољан скуп

$$d: M \times M \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Задатак: (а) Доказати да у дискретном метричком простору (M,d) низ a_n конвергира ако и само ако је $a_n = \text{const}$ за $n \geq N$.

(б) Описати непрекидна пресликавања $f: \mathbb{R} \to M$, где је $\mathbb{R}$ скуп реалних бројева са метриком $d(x,y) = |x-y|$, а M дискретан метрички простор.

(в) Описати непрекидна пресликавања $f: M \to \mathbb{R}$, M и $\mathbb{R}$ као у (б).

Нека је $(\mathbb{R}^k, d)$ метрички простор са метриком индукованом из норме $\|\cdot\|_p$, за неко p, $1 \le p \le \infty$. Тада низ x_n у $\mathbb{R}^k$ конвергира ако и само ако конвергира по координатама. Другим речима:

$$x_n \to x_\infty \iff (\forall j)\ \pi_j(x_n) \to \pi_j(x_\infty),$$

где су $\pi_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le k$, пројекције на j-ту координату.

Доказ следи из

$$|\pi_j x_n - \pi_j x_\infty| \le \|x_n - x_\infty\| \le k \cdot \max_{1 \le i \le k} |\pi_i x_n - \pi_i x_\infty|$$

и теореме о три низа.

Дефинисано је $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |\pi_j(x)|^p \right)^{1/p}$,

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le k} |\pi_j(x)|$.

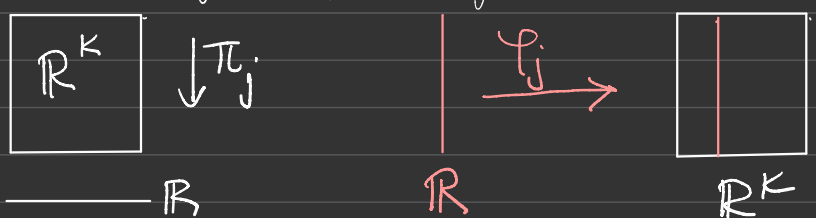
Последица: Пројекције

$$\pi_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$$

и дуалне

$$\varphi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k, \quad x \mapsto (a_1, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_k)$$

су непрекидна пресликавања.



Дефиниција: Нека је (M,d) метрички простор, $a \in M$, $\rho \in \mathbb{R}$.

$$B[a;\rho] := \{x \in M \mid d(x,a) \leq \rho\}$$

назива се затвореном лоптом, а скуп

$$B]a;\rho[:= \{x \in M \mid d(x,a) < \rho\}$$

отвореном лоптом са центром a и полупречником ρ.

Подскуп $S \subseteq M$ је *отворен* ако је садржан у неком лоптином концентричном.

Теорема (Болцано-Вајерштрасова): Сваки отворен низ у $\mathbb{R}^k$ има конвергентан подниз.

Доказ следи из чињенице да низ у $\mathbb{R}^k$ конвергира ако и само ако конвергира по координатама (доказати индукцијом) и Болцано-Вајерштрасове теореме у $\mathbb{R}$ (доказане на Анализи 1).

Задатак: Добијте доказ („метод дијагонализације").

Дефиниција: Метрички простор (M,d) је **компактан** ако у њему сваки низ има конвергентан подниз.

Пример: $(B[0;1], d)$, где је $B[0;1]$ затворена лопта у $\mathbb{R}^k$ са центром у $0 := (0,\dots,0)$ и полупречником 1, а d дестанца неке (=било које) од метрика индуковане нормом $\|\cdot\|_p$, је компактан.

Задатак: Доказати да $(B]0;1[, d)$ није компактан.

Дефиниција: **Потпростор** метричког простора (M,d) је пар $(S, d|_{S\times S})$, где је $S \subseteq M$ и $d|_{S\times S}$ рестрикција од d.

Дефиниција: Подскуп $S \subseteq M$ метричког простора (M, d) је **затворен** ако за сваки низ x_n у S који конвергира ка $x_0 \in M$ важи $x_0 \in S$. Подскуп $V \subseteq M$ је **отворен** ако му је комплемент $M \setminus V$ затворен.

Теорема: Тополошки комплементан простор је компактан ако и само ако је затворен.

Задатак: Доказати да је отворена лопта отворен, а затворена затворен скуп. У $\mathbb{R}$: лопте = интервали.

Задатак: Доказати да полуотворени интервал $[0,1[$ није ни отворен ни затворен скуп у $\mathbb{R}$.

Задатак: Нека је $M=[0,1]\cup]2,3[$ и $d(x,y)=|x-y|$.

(а) Доказати да је скуп од подскупова $[0,1]$ и $]2,3[$ и отворен и затворен у M

(б) Да ли је M повезан?

Дефиниција: Метрички простор је **неповезан** ако може да се представи као дисјунктна унија два непразна скупа који су и отворени и затворени. Метрички простор је **повезан** ако није неповезан.

Пример: Подскуп $I\subseteq\mathbb{R}$ је повезан ако и само ако је интервал.

Уопштење неких теорема из Анализе 1:

Теорема: Непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп.
(Уопштење Теореме о међувредности)

Теорема: Непрекидна слика компактног скупа је компактан скуп.

Последица (Вајерштрасова теорема): Непрекидна функција на компактном скупу достиже минимум и максимум.

Напомена: Реформулација дефиниције непрекидности: f C_a („f непрекидна у a") ако и само ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Дефиниција: За пресликавање $f: M \to N$ је **равномерно** (или **униформно**) **непрекидно** ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y)\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Контрапозиција тврђења: Непрекидно пресликавање на компактном скупу је равномерно непрекидно.

Дефиниција: Низ a_n у метричком простору (M, d) је **Кошијев** ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ m, n \geq n_0 \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Анализа 1: Низ у $\mathbb{R}$ (или у $\mathbb{C}$) је конвергентан ако и само ако је Кошијев.

У општем случају, обо не важи у метричком простору.

Пример: $M =]0,1[$, $d(x,y) = |x-y|$.
Низ $q_n = \frac{1}{n}$ је Кошијев, али не конвергира ка неком $q_\infty \in M$.

Међутим: Конвергентан низ је Кошијев.
(Доказ: „исти" као у Анализи 1). Значи, оно што не важи увек је обрнуто тврђење.

Дефиниција: Метрички простор је комплетан ако у њему сваки Кошијев низ конвергира.

Пример: $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ су комплетни (доказано у Анализи 1).

Низ у $\mathbb{R}^k$ (и слично у $\mathbb{C}^k$) конвергира ако и само ако конвергира по координатама

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbb{R}^k \text{ и } \mathbb{C}^k \text{ су комплетни простори}}$$

Напомена: Непрекидна слика комплетног простора не мора да буде комплетна.

Пример: $\mathbb{R}$ је комплетан простор, $f: \mathbb{R} \to]0,1[$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ је непрекидно, слика $]0,1[$ није комплетна (претходни пример).

Задатак: Доказати да је подскуп комплетног простора комплетан ако и само ако је затворен.

Дефиниција: Ред у нормираној Абеловој групи $(A, +, \|\cdot\|, 0)$ је пар низова (a_n, s_n) такав да је $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$, $s_0 = a_0$.

Ред конвергира ако низ s_n конвергира. Низ a_n назива се општим чланом реда.

Ознаке: као у Анализи 1:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum a_n$$

Ред $\sum a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред (у $\mathbb{R}$!) $\sum \|a_n\|$.

Теорема: Ако ред $\sum a_n$ апсолутно конвергира, низ парцијалних сума S_n је Кошијев.

Доказ: $\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\|$, а низ парцијалних сума реда $\sum \|a_n\|$ је Кошијев. ▨

Последица: Апсолутно конвергентан ред у нормираној Абеловој групи је конвергентан ако је она комплетна.

Напомена: Важи и супротно: Нормирана Абелова група је комплетна ако и само ако у њој сваки апсолутно конвергентан ред конвергира.

Пример: Простор непрекидних функција

$M = C[a,b]$, $\|f\| := \max_{a \le t \le b} |f(t)|$

Ова норма се назива равномерном нормом; често се означава са $\|\cdot\|_\infty$.

Добро је дефинисана захваљујући Вајерштрасовој теореми. Конвергенција у равномерној норми назива се равномерна (или униформна) конвергенција.

Кажемо да низ функција f_n равномерно конвергира ка функцији f_∞ записујемо и са

$$f_n \rightrightarrows f_\infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty$$

Значај: комутативност лимеса са неким другим операцијама.

Пример: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = \frac{n}{2(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

$$\int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}$ и $\int_0^1$ не комутирају.

Међутим, равномерни лимес и интеграл комутирају – важи следећа теорема:

Теорема: Ако $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ рамномерно конвергира, онда је

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Доказ: $f_n \rightrightarrows f_\infty$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f_\infty(x)\,dx \right|$$

$$\le \int_a^b |f_n(x) - f_\infty(x)|\,dx$$

$$\le \int_a^b \|f_n - f_\infty\|_\infty\,dx = (b-a)\|f_n - f_\infty\|_\infty \to 0 \quad \blacksquare$$

Задатак: Доказати да низ

$f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

рамномерно конвергира ка $f_\infty \equiv 0$, али да низ извода $f_n'(x)$ **не конвергира** ка $f_\infty'(x) \equiv 0$.

Закључак: Чак ни равномерни лимес не комутира са изводом. Међутим:

Теорема: Нека је $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ низ диференцијабилних функција, такав да важи:

1. $f_n' \rightrightarrows g$ кад $n \to \infty$
2. $(\exists x_0 \in [a,b])$ $f_n(x_0)$ конвергира.

Тада и $f_n \rightrightarrows f_\infty$ и $f_\infty' \equiv g$. Другим речима, тада важи

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).}$$

Доказ следи из $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$ и претходне теореме. ▨

Пример: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 1-} f_n(x)\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 1-}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = 0$$

$\Longrightarrow$ лимеси не комутирају у општем случају. Међутим, ако је један од њих равномерни, онда комутирају:

Теорема: Ако $f_n \rightrightarrows f_\infty$, онда је

$$\boxed{\lim_{t\to t_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to t_0} f(t)\right)}$$

Последица: Равномерни лимес непрекидних функција је непрекидна функција.

Пример: $C[a,b]$ са другом нормом:

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Напомена: $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ је комплетан, а $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ за $1 \leq p < \infty$ нису.

$C[a,b]$ има структуру векторског простора. За $p=2$ норма $\|\cdot\|_2$ је изведена из скаларног производа:

$$\boxed{\langle f, g \rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt}$$

за непрекидне $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ и

$$\boxed{\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}}$$

Систем функција (вектора у $C[-\pi,\pi]$) $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (или, у реалном запису, $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$) је ортогоналан. Развој функције f по овом ортогоналном систему уопштава појам развоја вектора по ортогоналној бази векторског простора и назива се Фуријеовим редом функције f:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\langle f, e^{inx}\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

c_n – Фуријеови коефицијенти.

Диференцирање у више димензија

$V \subset \mathbb{R}^k$ отворен скуп, $f: V \to \mathbb{R}$, $a \in V$.

Парцијални извод по променљивој x_j, у тачки a, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, израчунава се тако што се све променљиве сем x_j третирају као константе.

Пример: $f(x,y) = x^3 + xy^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

Матрица првог извода:

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right)$$

Уопштење, ако и подопсег има више димензија, тада

$f: V \to \mathbb{R}^l$ може да се

напише као $f := (f_1, f_2, \dots, f_l)$.

Парцијални изводи свих координатних функција образују $k \times l$ матрицу

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \le i \le l \\ 1 \le j \le k}}$$

коју називамо матрицом првог извода.

I извод је, дакле, пресликавање

$$Df : V \longrightarrow \mathbb{R}^{k \times l}, \quad a \longmapsto Df(a).$$

II извод $D^2 f$ је извод овог пресликавања; $Df := D(Df)$ и даље, индуктивно, n-ти извод се дефинише као

$$\boxed{D^n f := D(D^{n-1} f).}$$

Напомена: Ово је само мотивација дефиниције.

Строга дефиниција: $f: V \to \mathbb{R}^\ell$ је диференцијабилно у тачки $a \in V$ (у ознаци $f \mathcal{D} a$) ако постоји линеарно пресликавање („= матрица") L такво да је

$$\|f(a+h) - f(a) - L(h)\| = o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

L – први извод у a $\quad (L = Df(a))$

Тврђење: $f \mathcal{D} a \Rightarrow f$ има све парцијалне изводе у a.

Обрнуто није тачно (и зато је оно пре строге дефиниције била само мотивација)

Теорема (Извод сложене функције):

$f \otimes a$, $g \otimes f(a) \Rightarrow g \circ f \otimes a$

и важи

$$\boxed{D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)}$$

Доказ: Формално исти као доказ одговарајуће теореме из Анализе 1, само са другом интерпретацијом симбола.

Пример: $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал, $\gamma : I \to \mathbb{R}^k$ глатка крива, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^k \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$f \circ \gamma$ – глатка функција реалне промењиве

$$(f \circ \gamma)'(t) = Df(\gamma(t)) \cdot D\gamma(t)$$

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots x_k(t))$$

$$D\gamma(t) = (x_1'(t), \dots, x_k'(t))$$

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

$$\Rightarrow (f\circ\gamma)' = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot x_1' + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot x_k'$$

$\overrightarrow{\nabla f} := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ градијент-вектор

$D\gamma =: \gamma'$ тангентни вектор на крив γ

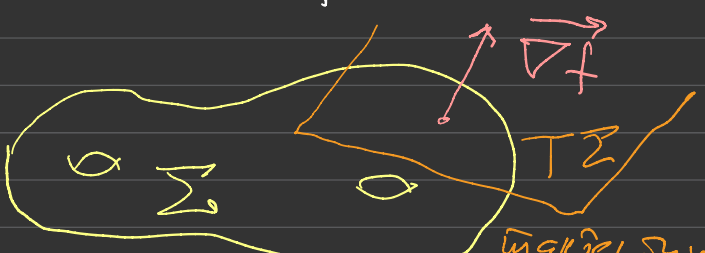
$$\Rightarrow \boxed{(f\circ\gamma)' = \overrightarrow{\nabla f} \cdot \gamma'}$$

скаларни производ у $\mathbb{R}^k$

Последица: $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) = 0\}$

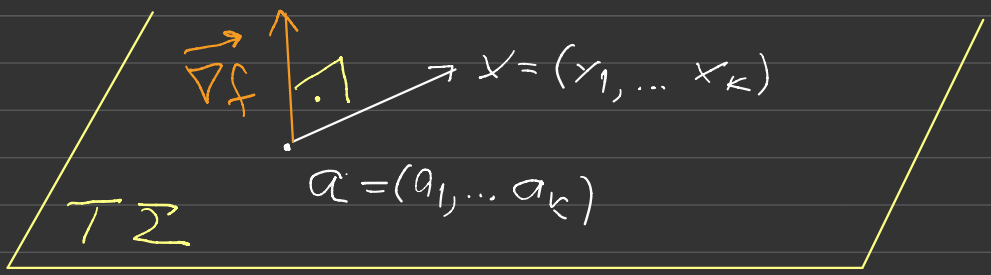
хиперповрш у $\mathbb{R}^k$, $\gamma : I \to \Sigma$

крива $\Rightarrow f\circ\gamma \equiv 0 \Rightarrow (f\circ\gamma)' = 0$



$\overrightarrow{\nabla f} \perp T\Sigma$

тангентна раван



Једначина тангентног простора (тангентне хиперравни) на хиперповрш $f = 0$ у вектору облику је

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{r} = 0,$$

односно, у координатама,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)(x_k - a_k) = 0$$

Имплицитно задане функције

Дефиниција: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

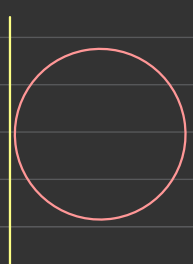
$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

$C = f^{-1}(0)$ не мора да буде крива, али, ако је f таква онда $(\forall \varepsilon > 0)(\exists z)\ |z| \leq \varepsilon$ и $f^{-1}(z)$ крива или $\emptyset$

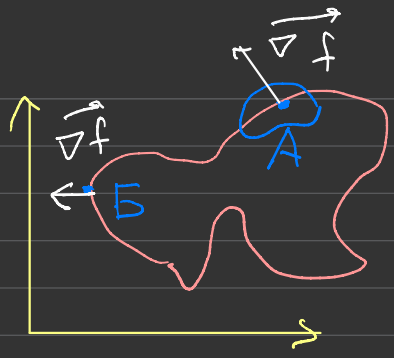
Нпр: $f(x,y) = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 0$ тачка $(0,0)$

$x^2 + y^2 = z^2$ круг (кружница)



$$\nabla f = 2x\hat{i} + 2y\hat{j}$$



$f(x,y)=0$

← није график функције

Али: у околини неких тачака у равни јесте. Нпр око A.

Око тачке Б – суштински друга ситуација! Разлог: $\vec{\nabla} f$ паралелан x-оси.

$$\vec{\nabla} f(Б) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Б), \frac{\partial f}{\partial y}(Б)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(Б) = 0.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial y}(A) \neq 0 \\ \Longrightarrow f(x,y)=0 \overset{\text{локално}}{\Longleftrightarrow} y=\phi(x)\end{gathered}}$$

Теорема о имплицитној функцији

је претходно тврђеце у

општијем случају:

$$f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^l, \quad f(x,y) = 0$$

$$\underset{(x,y)}{\rotatebox{90}{$\in$}}$$

$(D_y f)$ $l \times l$ матрица

$$\det(D_y f(A)) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\exists \phi)\ y = \phi(x)$$

Пример: Кронекер-Кателијева теорема — случај кад је f линеарно пресликавање.

$\operatorname{codim}(X \cap Y) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y$

у генеричном случају.

Екстремне вредности функција:

$f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in \mathbb{R}^k$ локални екстремум

$(\forall j) \quad x_j \longmapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots a_n)$

$\Rightarrow a_j$ локални екстремум

Анализа 1 $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_j} = 0$

$\Rightarrow \boxed{Df(a) = 0}$ неопходан услов да a буде екстр.

Тејлоров полином: $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$\sum_{j=0}^{m} D^j f(a) \cdot (x-a)^j$$

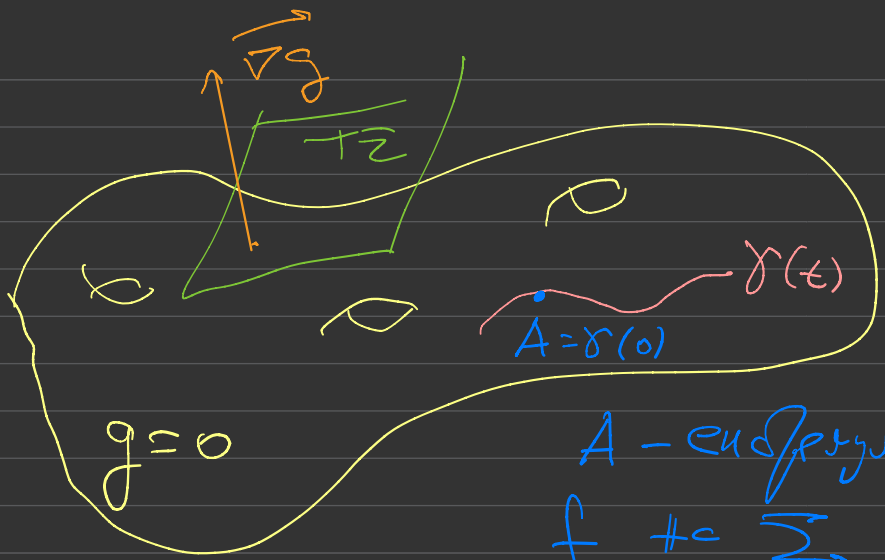
Овде су $D^j f(a)$ вишелинеарна пресликавања => деликатнија анализа природе тачке a.

Условни екстремуми:

$$f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

Проблем: Наћи екстремуме f на скупу $\Sigma := \{x \mid g(x) = 0\}$.

Метод Лагранжевих множитеља.



A – екстремум f на Σ

$(f\circ\gamma)'(0)=0$ за $\forall \gamma \subset \Sigma$

$\vec{\nabla} f(A)\cdot\gamma'(0)=0$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f(A) \perp T\Sigma$

$\vec{\nabla} g \perp T\Sigma$ у сваској тачки

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \lambda \vec{\nabla} g\\ g &= 0\end{aligned}}$$

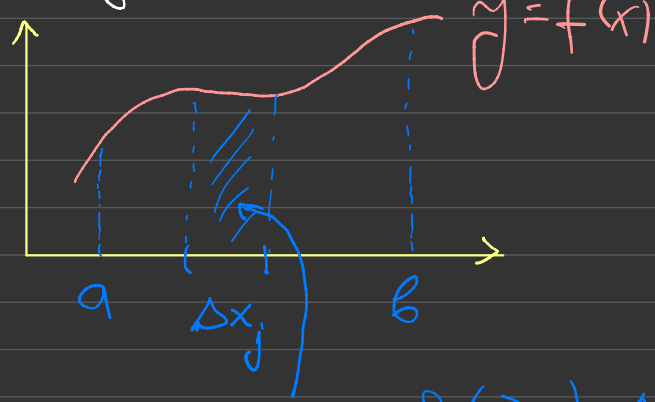
$k+1$ једначина

$n+1$ непозната

(координате A + λ)

Интеграция

Анализ 1:



$$P_j \approx f(\xi_j)\,\Delta x_j$$

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta x_j \to 0)}} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j$$

Анализ 2: $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^k$

K - k-dim квадрат

Подразбиване K на n малки интервала $K_1, \dots, K_n$

$$K_j = I_j^1 \times \dots \times I_j^k$$

I_j^i интервали в $\mathbb{R}$

Запремина интервала:

$$\mu(K_j) = \prod_{i=1}^{k} \ell(I_j^i)$$

Тук $\ell(\cdot)$ дължина.

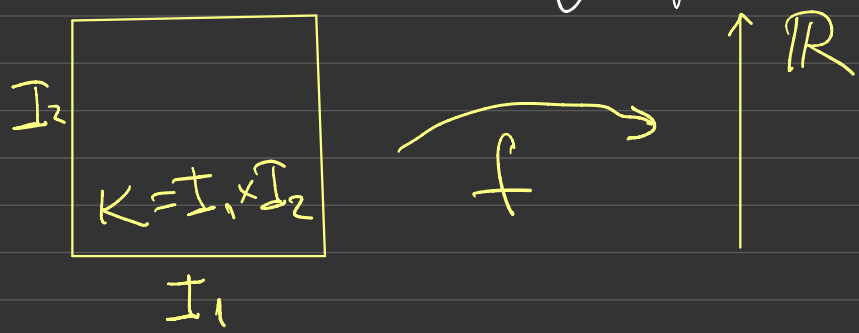
$$\int_K f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \sum f(\xi_j)\,\mu(K_j)$$

$$(\mu(K_j) \to 0)$$

Друга форма: $\int_K f(x_1, \dots x_k)\,dx_1 \dots dx_k$

Пример: $k=2$ $K \subseteq \mathbb{R}^2$ квадрат

$f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ непрекидна (касније ћемо ослабити ову претпоставку)



Имамо 3 интеграла:

$\int_K f(x,y)\,dx\,dy$ дефинисан малопре

$$\left.\begin{aligned} &\int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x,y)\,dx\right)dy \\ &\int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x,y)\,dy\right)dx \end{aligned}\right\}$$ дефинисано у Анализи 1

Фубинијева теорема: За f непрекидно (важи и за нешто опутије) ова три интеграла су међусобно једнака.

Скоро доказ:

Површина $([a,b]\times[c,d])$

$\parallel$

дужина $[a,b]$ · дужина $[c,d]$

$\mu(K_j) = \Delta x_i \Delta y_j$

Асоцијативност сабирања

$\Downarrow$

све три интегралне суме $=$

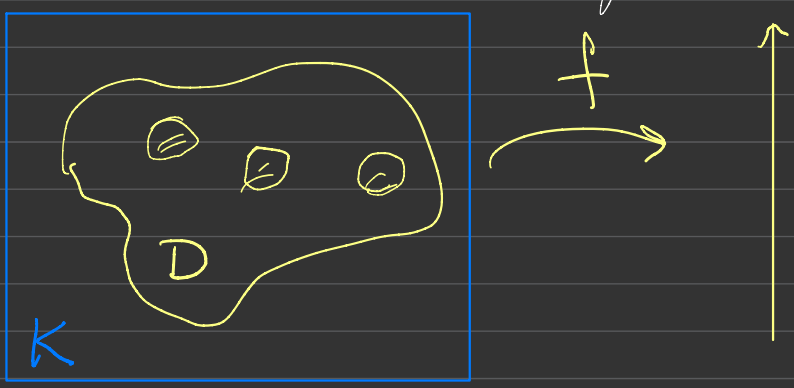
$\Downarrow$ (lim)

$\boxed{\text{///}}$

Проширење дозвола интеграције:

$D \subseteq \mathbb{R}^k$ ограничен

$f : D \to \mathbb{R}$ непрекидна



$$\tilde{f} := f \cdot \chi_D : K \to \mathbb{R}$$

$$\int_D f(x)\,dx := \int_K \tilde{f}(x)\,dx$$

Није непрекидна!

$\Rightarrow$ ПОТРЕБНА КАЗ ЈЕ ДЕФИНИЦИЈЕ ИНТЕГРАЛА ЗА МАЊУ КЛАСУ!

Специјално: $f \equiv 1$

$$\mu(D) := \int_D 1 \, dx = \int_K \chi_D(x) \, dx$$

Жорданова мера скупа D

Кавалијеев принцип: Фубинијева теорема за карактеристичне фун.

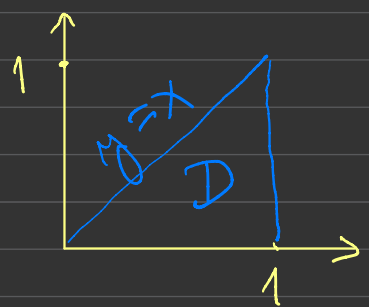
$$\mu(D) = \int \mu(D_x) \, dx$$

где је $D_x = D \cap \pi^{-1}(x)$ за пројекцију π на x-осу.

Задатак: Извести формулу за запремину купе.

Пример: Изменить порядок интегрирования

$$I := \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx \right) dy$$



$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases} \Big\} D$$

Новая область D:

$$0 \le x \le 1$$

$$0 \le y \le x$$

Решение: $I = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx$

$$= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} x \, dx =$$

$$= \int_0^1 \sin x \, dx = 1 - \cos 1$$ ☐

Анализа 1: Основна теорема интегралног рачуна: $f: I \to \mathbb{R}$ непрекидна $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Другим речима $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ је примитивна функција од f.

Анализа 2: $D \subseteq \mathbb{R}^k$

$f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

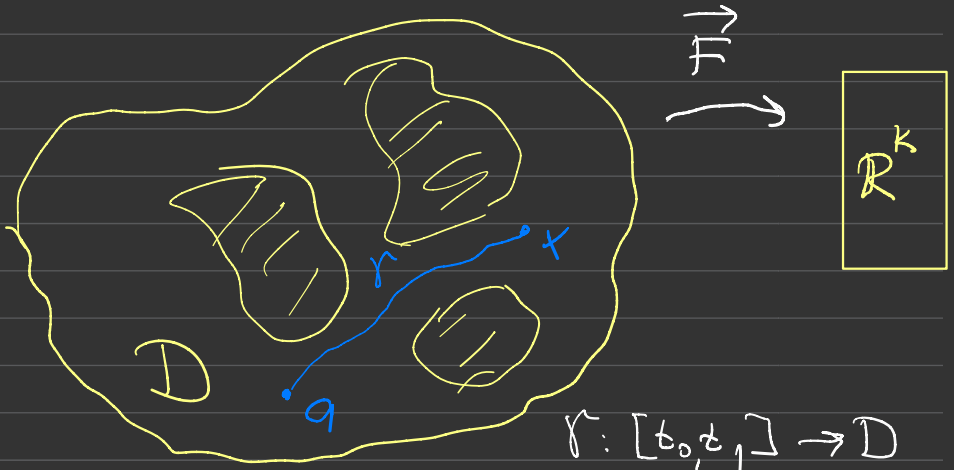
Уместо f' користимо

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

Градијент вектор.

Питање постојања примитивне:

$\vec{F}: D \to \mathbb{R}^k$ непрекидно векторско поље. Да ли постоји $f: D \to \mathbb{R}$ такво да је $\vec{\nabla} f(x) = F(x)$ за све $x \in D$?



$\gamma: [t_0, t_1] \to D$

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt$$

$\boxed{\text{Криволинијски интеграл}}$

Идеја: Дефинисати примитивну помоћу криволинијског интеграла

Проблем: Добра дефинисаност (независност од пута γ)

Уопштење Бути-Лајбницове формуле из Анализе 1:

Гринова теорема: $F = P\hat{i} + Q\hat{j}$ векторско поље у равни, онда (под одређеним претпоставкама):



$$\int_{\partial D} F\,dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Подсећање: Нути-Лајбницова формула:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_a^b df = f\Big|_{\partial[a,b]}$$

Постоји затис који важи у свим диференцијама

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega}$$

Стоксова формула

Дефиниције објеката ω, $d\omega$:

(тзв. диференцијалних форми): касније

1. Непрекидност

У анализи 1: $f \mathcal{C} a$ (дати да:
„f је непрекидна у $a \in dom(f)$)

$$\Updownarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

овде: $dom(f) \subseteq \mathbb{C}$

$$f : dom(f) \longrightarrow \mathbb{C}$$

У анализи 2: $f : S \longrightarrow Y$

Какве структуре на S и Y су нам потребне, да бисмо могли да говоримо о непрекидности?

Дефиниција: **филтер** на скупу S је подскуп $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(S)$ такав да важи:

(I) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(II) $X, Y \subseteq \mathcal{F} \Leftrightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$

(III) $S \in \mathcal{F}$

↑ непразни скупови скупа скупова S

Напомена: $(II) \Leftrightarrow (II_1) \wedge (II_2)$:

(II_1) $X, Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$

(II_2) $X \in \mathcal{F}$, $Y \supseteq X \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$

$(III) \Leftrightarrow \mathcal{F} \neq \emptyset$

Пример: **Фреше филтер:**

S бесконачан

$\mathcal{F}_S := \{X \subseteq S \mid S \setminus X \text{ коначан}\}$.

Главен пример: $S = \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ – фрешов филтър на $\mathbb{N}$.

S, Y множества

$$Y^S := \{f : S \to Y\}$$

ρ релация на Y, $\mathcal{F}$ филтър на S, дефиниираме релацията $\rho_{\mathcal{F}}$ на Y^S по следния начин:

$$f \rho_{\mathcal{F}} g \overset{\text{деф.}}{\iff} \{s \mid f(s) \rho g(s)\} \in \mathcal{F}$$

Свойства:

ρ симетрична $\Rightarrow$ $\rho_{\mathcal{F}}$ симетрична

ρ рефлексивна $\Rightarrow$ $\rho_{\mathcal{F}}$ рефлексивна

ρ транзитивна $\Rightarrow$ $\rho_{\mathcal{F}}$ транзитивна

Специјално: $=_{\mathcal{F}}$ је релација еквиваленције на Y^S.

Напомена: Низ $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ конвергира на $z_\infty \in \mathbb{C}$ ако

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0) \quad |z_n - z_\infty| <_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} \varepsilon}$$

Дефиниција: (Y, d) је метрички простор ако је

$$d : Y \times Y \longrightarrow [0, +\infty[$$

са својствима

(M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ако уместо (M1) важи слабије:

$$(M1') \quad d(x,x)=0$$

онда M називамо псеудометричким простором, а d псеудометриком.

(M,d) псеудометрички

$$x \sim y \overset{1\text{ сф}}{\iff} d(x,y)=0$$

$$(M/_{\sim}, \tilde{d}), \quad \tilde{d}([x],[y]) := d(x,y)$$

↖ количнички простор.

Задатак: $(M/_{\sim}, \tilde{d})$ је метрички простор. Пример: $d(f,g)=\int_0^1 |f-g|$ може да се прошири на простор већи од $C([0,1])$.

Пример 1: Дискретан метрички простор:

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

Пример 2: Производ метричких простора $(M_1, d^1), \dots, (M_k, d^k)$

$M = M_1 \times \dots \times M_k$

$$d_\infty(x,y) := \max_{1 \le j \le k} d^j(\pi_j x, \pi_j y)$$

или, за $1 \le p < \infty$

$$d_p(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{k} d^j(\pi_j x, \pi_j y)^p \right)^{1/p}.$$

Специјално: $M_1 = \dots = M_k = Y$

$\rightsquigarrow$ d_p за $1 \le p \le \infty$ су метрике на $Y^k := Y^{\{1,\dots,k\}}$

Пример 3: У уводу: један пример метричког простора је нормирана група $(G, +, \|\cdot\|, 0)$, $d(x,y) = \|x-y\|$.

Нека је

$$B_G(S) := \{ f \in G^S \mid \sup_{s \in S} \|f(s)\| < \infty \}$$

На $B_G(S)$ имамо уобичајену норму

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} \|f(s)\|$$

и уобичајену метрику $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$.
Специјално, у случају $S = \{1, 2, \ldots, k\}$ ово је метрика из Примера 4.

Дефиниција: Хомоморфизам (морфизам) метричких простора $(M, d_M), (N, d_N)$ је пресликавање $f : M \to N$ које чува метрику (тј. изометрија или, прецизније, изометријско уграњење).

Другим речима $f: M \to N$ је изометрија ако за све $x, y \in M$ важи $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)$.

Примедба: Ако је

$$f: (M, d_M) \to (N, d_N)$$

хомоморфизам, онда је f 1-1, јер је метрика недегенерисана:

$$f(x) = f(y) \iff d_N(f(x), f(y)) = 0$$

$$\parallel$$

$$d_M(x, y)$$

f хомоморфизам

$$\iff x = y$$

Наравоученије: f чува метрику

$\Rightarrow f: M \to f(M)$ бијекција

Ako je $f(M) \neq N$, neka kažemo da je $f: M \to N$ izometrijsko ukažaba.

Primer 4: (Y, d_Y) metrički prostor $f: X \to Y$ bijekcija.

Prenosimo metriku na gornji:

$$d_X(a,b) := d_Y(f(a), f(b))$$

Oznaka: $d_X := f^* d_Y$

$$f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$$

je izometrija.

Primer 5: $Y =]-1,1[$

$$\varphi: \mathbb{R} \to]-1,1[, \quad \varphi(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Као у Примеру 4, посматрем метрички простор $Y =]-1,1[$ са метриком $d_Y(a,b) = |b-a|$ и на $X = \mathbb{R}$ дефинишемо метрику

$$d_X = \varphi^* d_Y .$$

Реална права са метриком d_X је ограничен метрички простор:

$$X \subseteq B[0;1]$$

Метрика d_X се проширује на проширену реалну праву

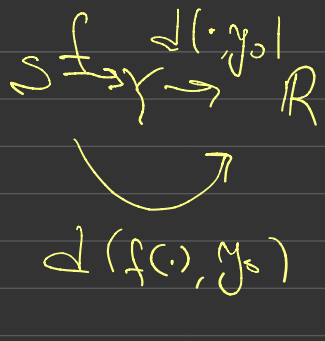
$$\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} :$$

$$d(0,\infty) = 1 .$$

$f: S \to Y$

$\mathcal{F}$ филтер на S

d метрика на Y



Дефиниција: (Лимес по филтер)

$$y_0 = \lim_{\mathcal{F}} f \overset{\text{деф}}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)\, d(f, y_0) \leq \varepsilon$$

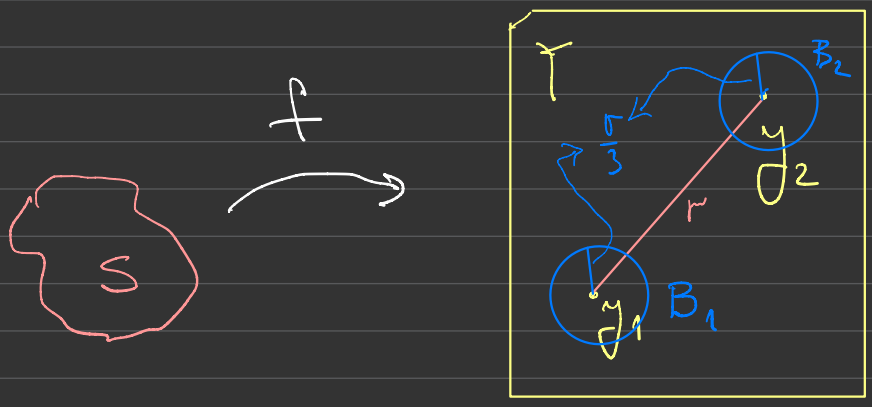
Став 1: Лимес је јединствен.

Став 2: (Принцип локализације)

$$f =_{\mathcal{F}} g \Rightarrow \lim_{\mathcal{F}} f = \lim_{\mathcal{F}} g$$

Доказ Става 1: Претпоставимо

$$y_1 = \lim_{\mathcal{F}} f, \quad y_2 = \lim_{\mathcal{F}} f, \quad y_1 \neq y_2$$



Неједнакост тројтла

$$\Downarrow$$

$$B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \emptyset$$

Са друге стране:

$$f^{-1}(B_1) \in \mathcal{F}, \quad f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}$$

$$(r = \varepsilon/3)$$

$$\overset{(\mathrm{II})}{\Longrightarrow} f^{-1}(B_1) \underset{\substack{\| \\ \emptyset}}{\cap} f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}$$

конфликтуја са (III) $\blacksquare$

Доказ Става 2: Домаћи!

Примери: ① $S = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ (Фрешеов филтер).

$y : \mathbb{N} \to Y$ низ $(y(n) =: y_n)$

Низ y_n конвергира $\overset{\text{Деф.}}{\iff} \exists \lim\limits_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} y =: y_\infty$

y_∞ - гранична вредност (лимес)

Ознака $\lim\limits_{n\to\infty} y_n := \lim\limits_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} y$

Став 1 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}$ је јединствен

Став 2 $\Rightarrow$ Лимес не зависи од коначно много тачака низа (принцип локализације)

Задатак: Доказати да важи

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)\ n \geq n_0 \Rightarrow d(y_n, y_0) < \varepsilon$$

② (X, d_X), (Y, d_Y) метрички прост.

$V \subseteq X$ је отворен ако

$(\forall x_0 \in V)(\exists \delta > 0)\ B]x_0; \delta[\subseteq V$

$A \subseteq X$ је околина тачке x_0 ако садржи неки отворен скуп који садржи тачку x_0

Друга дефиниција: отворен скуп је скуп који је околина свих својих тачака, али

околина не мора да буде отворена скуп.
Филтер околина тачке x_0
је скуп $\mathcal{F}_{x_0}$ свих подскупова
у X који су околине тачке x_0.
Дефиниција: $f: X \to Y$ је
непрекидно у тачки $x_0 \in X$
(ознака: $f \mathcal{C} x_0$) ако
постоји $\lim_{\mathcal{F}_{x_0}} f$

$A \subseteq X$, $(\forall a \in A)\ f \mathcal{C} a$
тада $f \mathcal{C} A$ или $f \in C(A)$.

Став 1 $\Rightarrow$ $\left(f \mathcal{C} a \Rightarrow \lim_{\mathcal{F}_a} = f(a)\right)$

Став 2 $\Rightarrow$ Непрекидност у
тачки x_0 је исто као

показаца функције у околини те тачке (фиксит локализовује)

③ Филтер пробушених околина

$$\mathcal{F}^{\circ}_{x_0} := \{ V \mid V \cup \{x_0\} \in \mathcal{F}_{x_0} \}$$

Def: $f : X \to Y$, $x_0 \in X$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) := \lim_{\mathcal{F}^{\circ}_{x_0}} f$$

Задаци:

① $f \subset a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

② $f \subset a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$

$$d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

③ $\lim_{x \to a} f(x) = y_0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$

$$0 < d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a) < \varepsilon$$

Став 1 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ је јединствен

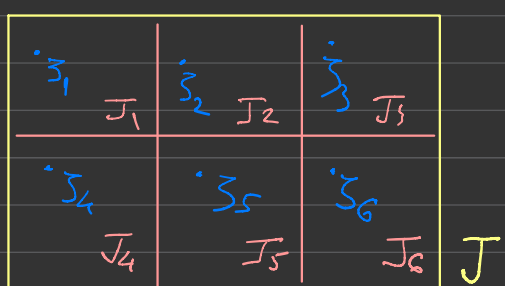
Став 2 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ зависи само од понашања f у некој пробушеној околини тачке a.

(принцип локализације)

4. Лимес у простору подела

$J \subseteq \mathbb{R}^k$ квадар (декартов производ k интервала у $\mathbb{R}$).

$\mathcal{P}_J$ – скуп свих подела квадра J са уоченим тачкама



$P = \{(J_1, \xi_1), (J_2, \xi_2), \dots, (J_6, \xi_6)\}$ подела са уоченим тачкама

У општем метричком простору (M,d) дијаметар скупа $A \subseteq M$ је број

$$\operatorname{diam}(A) := \sup d(A \times A).$$

Другим речима: $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$

У коцки J: дијаметар подела P је број

$$\lambda(P) := \max\{\operatorname{diam}(J_i) \mid (J_i, \xi_i) \in P\}$$

Дефинишемо филтер $\mathcal{F}_J$ на скупу $\mathcal{P}_J$ свих подела са уоченим тачкама коцке J са

$$X \in \mathcal{F}_J \overset{\text{def}}{\iff} (\exists \delta > 0)\ \lambda(P) < \delta \Rightarrow P \in X$$

Тада $(\mathcal{P}_J, \mathcal{F}_J)$ назива се простором подела.

$f : J \to \mathbb{C}$ комплексна функција на квадру J

Дефинишимо функцију $\Phi_f : \mathcal{P}_J \to \mathbb{C}$

$$\Phi_f(P) := \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_i)\,\mu(J_i)$$

где је $\mu(\cdot)$ запремина квадра (производ дужина интервала гиј, је он декартов производ) и сумирање се врши по свим $(J_i, \xi_i) \in P$.

Риманов интеграл функције f по квадру J је број

$$\boxed{\int_J f(x)\,dx := \lim_{\mathcal{F}_J} \Phi_f}$$

уколико лимес на десној страни постоји (и у том случају кажемо да је f интеграбилна по Риману).

(5) $S \neq \emptyset$, $S \supseteq A \neq 0$.

$$\mathcal{F}(A) := \{ X \subseteq S \mid X \supseteq A \}$$

Задатак: (а) Доказати да је $\mathcal{F}(A)$ филтер на S.

(б) Ако је (Y, d) метрички простор, шта значи да $f : S \to Y$ има лимес по филтеру $\mathcal{F}(A)$

(в) Исто питање за $A = \{a\}$

У уводу смо видели дефиницију норминране групе $(G, +, \|\cdot\|, 0)$.

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

дефинише метрику.

Специфичности у односу на опште метрички простор:

1. $d(x+a, y+a) = d(x,y)$.

инваријантност у односу на транслацију, тј. $d \circ (\tau_a, \tau_a) = d$.

2. $d(-x, -y) = d(x,y)$

инваријантност у односу на симетрију, тј: $d \circ (\sigma, \sigma) = d$.

Задатак: $(G, +, 0)$ група и d метрика на G која задовољава 1. и 2, доказати да је онда са

$$\boxed{\|x\| := d(x,0)}$$

дефинисана норма на G.

Својства норме:

(1) $\|x_1 + \dots + x_n\| \le \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \le \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

уопштена неједнакост троугла.

Доказ: индукцијом.

(2) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x - y\|$

Важно и опште: у метричком простору (M, d) је

$$|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y) \quad (*)$$

Доказ из дефиниције 1.1 следи:

$(*) \Leftrightarrow -d(x,y) \le d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y)$

а то су две неједнакости троугла. ▨

Напомена: И (1) има уопштење у нормираном простору:

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}).$$ ▨

Изоморфизам нормираних простора $(G_1, +_1, \|\cdot\|_1, \circ_1)$ и $(G_2, +_2, \|\cdot\|_2, \circ_2)$ је пресликавање

$$f: G_1 \to G_2$$

које је (хомо) изоморфизам група и важи $(\forall x \in G_1)\ \|f(x)\|_2 = \|x\|_1$.

Специјално: хомоморфизам нормираних простора је непрекидан (тј. изометрички изоморфизам).

Претпоставимо да имамо нормирану групу G_2 и изоморфизам група $f: G_1 \to G_2$. Тада можемо да дефинишемо норму $f^*\|\cdot\|$ на G_1 са $f^*\|x\|_2 := \|f(x)\|_2$

$\rightsquigarrow (G_1, +, f^*\|\cdot\|_2, 0_2)$

постаје нормирана група.

Пример: $(\mathbb{R}, +, 0) \cong (\mathbb{R}_+^*, \cdot, 1)$

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ изоморфизам група

$(\exp)^{-1} =: \log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$|\cdot|$ – апсолутна вредност у $\mathbb{R}$ (норма на $(\mathbb{R}, +, 0)$)

$|\cdot|_1 := (\log)^* |\cdot|$, тј. $|x|_1 = |\log x|$

$(\mathbb{R}_+^*, \cdot, |\cdot|_1, 1)$ нормирана група.

Дефиниција: Нормирани векторски простор је структура $(V, +, \cdot, \|\cdot\|, 0)$, где је $(V, +, \cdot, 0)$ векторски простор, $(V, +, \|\cdot\|, 0)$ нормирана група и

$$\|\xi x\| = |\xi| \cdot \|x\|,$$

где је $x \in V$, ξ скалар (поље скалара у овом курсу је увек $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) и $|\xi|$ апсолутна вредност скалара ξ.

Метрика: $d(x, y) := \|x - y\|$.

Специфичности:

(1.) $d(x+a, y+a) = d(x, y)$

(2) $d(\xi \cdot x, \xi \cdot y) = |\xi| \cdot d(x, y)$.

Задатак: Нека је V векторски простор и d метрика на V која задовољава (1) и (2). Да ли је са $\|x\| := d(x,0)$ дефинисана норма на V?

Пример: (1) $W \leq V$ векторски потпростор, $\|\cdot\|_W$ је норма на W

(2) V_1, V_2 НВП (нормирани вект. пр.)

Више начина за дефинисање норме на $V_1 \times V_2$, аналогно са случајем метрика: $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_p$ за $p \geq 1$.

Општије $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_k$

③ $(Y, +, \cdot, \|\cdot\|, 0)$ НВП; S скуп

$$\boxed{B_Y(S) := \{ f : S \to Y \mid \sup_{s \in S} \|f(s)\| < \infty \}}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{s \in S} \|f(s)\|$$

$$(f+g)(s) := f(s) + g(s)$$

$$(\xi f)(s) := \xi f(s), \quad \xi \in \mathbb{K}$$

$$(B_Y(S), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty, 0)$$

је нормирани векторски простор.

④ Y као у ③, $S = \mathbb{N}$, $B_Y(\mathbb{N})$ је векторски простор ограничених низова.

Друга ознака: b_Y

c_Y – векторски простор конвергентних низова у Y.

Тврђење: конвергентан низ је ограничен.

Доказ: $d(a_n, a_\infty) <_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} \varepsilon$

$\Updownarrow$

сви сем коначно много a_n су у $B]a_\infty; \varepsilon[$

а коначан скуп је ограничен. $\blacksquare$

Последица: $(c_Y, +, \cdot, \|\cdot\|, 0)$ је нормирани векторски потпростор простора $(b_Y, +, \cdot, \|\cdot\|, 0)$.

5. Y нормирани векторски простор,

$$l_Y^p := \{a \in Y^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|^p < \infty\}$$

За $p \geq 1$ l_Y^p је нормирани векторски простор са нормом

$$\|a\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\|^p\right)^{1/p}$$

Доказ: Неједнакост Минковског $\blacksquare$

l_Y^1 – апсолутно конвергентни редови.

l_Y^∞ – друга ознака за b_Y.

⑥ Y као и раније, J квадар у $\mathbb{R}^k$

На простору пресликавања $f: J \to Y$ таквих да је функција $\|f(\cdot)\|: J \to \mathbb{R}$ интеграбилна по Риману и $\int_J \|f(x)\|^p dx < \infty$

$$\|f\|_p := \left(\int_J \|f(x)\|^p dx \right)^{1/p}$$

дефинише (за $p \geq 1$) псеудонорму (или полунорму), тј. уместо аксиоме $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ важи слабија: $\|0\|_p = 0$.

Релација $f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_p = 0$ је релација еквиваленције на овом простору функција.

Количнички простор означавамо са $R^p_Y(J)$, за $1 \leq p < \infty$. За $p = \infty$ $R^\infty_Y(J)$ је потпростор функција из $B_Y(J)$ које су интеграбилне по Риману.

Definicija: Neka je $(X, +, \cdot, 0)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Hermitska forma na X je preslikavanje

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$$

koje ima sljedeća svojstva:

(I) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$

(II) $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$

(III) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ za $\lambda \in \mathbb{K}$

(IV) $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$ za $\lambda \in \mathbb{K}$

(V) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Primjeri: ① $\mathbb{K}^n$, $\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$

② $\ell^2_{\mathbb{K}}$, $\langle x, y \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$

$\langle x, y \rangle \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$ (Cauchy-Schwarzova nejednakost)

(3) $\mathcal{R}_{\mathbb{C}}^2(J)$, $\langle f,g\rangle := \int_J f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

Дефиниција: Нека је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ хермитска форма на векторском простору X над пољем $K \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$. Тада је:

(1) $\langle \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j, \sum_{k=1}^{n} \eta_k y_k \rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_j \bar{\eta}_k \langle x_j, y_k\rangle$

за $\xi_1,\dots,\xi_n, \eta_1,\dots,\eta_n \in K$, $x_1,\dots,x_n, y_1,\dots,y_n \in X$

(2) $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$

$\langle x+y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - 2i\,\mathrm{Im}\langle x,y\rangle - \langle y,y\rangle$

за $x,y \in X$

(3) $4\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = \langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle$

$\mathrm{Im}\,\xi = \mathrm{Re}(-i\xi) = \mathrm{Re}(\bar{i}\xi)$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, iy\rangle$.

Последица: Хермитска форма је једнозначно одређена својом квадратном формом.

Дефиниција: Вектори x и y су **ортогонални** у односу на хермитску форму $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ако је $\langle x, y \rangle = 0$. Ознака: $x \perp y$.

Релација $\perp$ је симетрична и линеарна по сваком променљивој:

$$(\forall j,k)\ x_j \perp y_k \Rightarrow \sum_j \xi_j x_j \perp \sum_k \eta_k y_k$$

A, B подскупови векторског простора X

$$A \perp B \overset{A \neq \emptyset}{\iff} (\forall a \in A)(\forall b \in B)\ a \perp b$$

Ако је $A = \{a\}$ тј. $a \perp B$ уместо $\{a\} \perp B$ и, слично, за $B = \{b\}$ тј. $A \perp b$.

$$A^\perp = \{x \in X \mid x \perp A\}$$

Теорема: За сваки скуп $A \subseteq X$ $A^\perp$ је векторски потпростор од X.

Примери: ① $X = \mathcal{R}^2_{\mathbb{C}}[0, 2\pi]$, $e_n(t) = e^{int}$ $(n \in \mathbb{Z})$

$$\langle e_m, e_n \rangle = \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int}\, dt = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t}\, dt =$$

$$= \begin{cases} 2\pi, & \text{за } m = n \\ \left.\frac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)}\right|_0^{2\pi} = 0, & \text{за } m \neq n. \end{cases}$$

$\Rightarrow \{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ је систем међусобно ортогоналних вектора.

② $X = \mathcal{R}^2_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$, $\left\{\frac{1}{2}, \cos nt, \sin nt\right\}_{n \in \mathbb{N}}$

Теорема: (Питагорина теорема)

Ако је $\{x_1, \dots, x_n\}$ систем међусобно ортогоналних вектора онда је

$$\boxed{\left\langle \sum_j x_j, \sum_k x_k \right\rangle = \sum_k \langle x_k, x_k \rangle}$$

Доказ: $\left\langle \sum_j x_j, \sum_k x_k \right\rangle = \sum_{j,k} \langle x_j, x_k \rangle =$

$$= \sum_{j=k} \langle x_j, x_k \rangle \quad \blacksquare$$

Дефиниција: Хермитска форма $\langle \cdot,\cdot \rangle$ је **позитивна** ако (уз (I) – (V)) важи и

(VI) $(\forall x \in X)\ \langle x,x \rangle \geq 0$.

Став: (**Коши–Шварцова неједнакост**): Ако је $\langle \cdot,\cdot \rangle$ позитивна хермитска форма, онда је

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \cdot \langle y,y \rangle$$

Доказ: $x,y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle \lambda x+y, \lambda x+y \rangle = \lambda^2 \langle x,x \rangle + 2\lambda \operatorname{Re}\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle$$

$$\Rightarrow (\operatorname{Re}\langle x,y \rangle)^2 \leq \langle x,x \rangle \cdot \langle y,y \rangle$$

Ако је $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ то је и доказ.

$\mathbb{K}=\mathbb{C}$: $x,y \in X$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda|=1$, $\langle x,y \rangle = \lambda |\langle x,y \rangle|$.

$$\mathbb{R} \ni |\langle x,y \rangle|^2 = (\bar{\lambda}\langle x,y \rangle)^2 = \langle x, \lambda y \rangle^2 = (\operatorname{Re}\langle x, \lambda y \rangle)^2$$

$$\leq \langle x,x \rangle \cdot \langle \lambda y, \lambda y \rangle = \langle x,x \rangle \lambda\bar{\lambda} \langle y,y \rangle$$



Последица: Ако је $\langle \cdot,\cdot \rangle$ позитивна хермитска форма, онда је са

$$\boxed{\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}}$$

дефинисана полунорма.

Доказ: $0 \leq \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle =$

$= \langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq$

$\leq \langle x,x\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} + \langle y,y\rangle =$

$= (\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$ ■

Други запис Питагорине теореме:

$$\boxed{(\forall j,k)\ x_j \perp x_k \Rightarrow \Big\|\sum_j x_j\Big\|^2 = \sum_j \|x_j\|^2}$$

Дефиниција: Хермитска форма је недеденерисана ако уз (I)–(VI) важи и

(VII) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Дефиниција: Позитивна недегенерисана хермитска форма на векторском простору X назива се скаларним производом. Структура $(X, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle, 0)$, где је $(X, +, \cdot, 0)$ векторски простор, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на њему, назива се унитарним или пред-Хилбертовим простором.

Теорема: Норма $\|\cdot\|$ на нормираном векторском простору је добијена из скаларног производа ако и само ако она задовољава једнакост паралелограма:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Дефиниција: (M,d) метрички прост.

$V \subseteq M$ отворен ако

$(\forall x \in V)(\exists \rho > 0)\ B]x;\rho[\subseteq V$.

Скуп је затворен ако је његов комплемент отворен.

Тврђење: (1) M и $\emptyset$ су отворени

(2) U, V отворени $\Rightarrow U \cap V$ отворен

(3) $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија отворених скупова $\Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ отворен.

Доказ: (1) тауполотија

(2) $x \in U \cap V \Rightarrow (\exists \rho_1, \rho_1)$

$B]x;\rho_1[\subseteq U$, $B]x;\rho_2[\subseteq V$

$\rho := \min\{\rho_1, \rho_2\}$

$B]x;\rho[\subseteq U \cap V$

(3) $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \Rightarrow (\exists \lambda_0)\ x \in V_{\lambda_0}$

$\Rightarrow (\exists \rho)\ B]x;\rho[\subseteq V_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ ▨

Напомена: Индукцијом из (2) закључујемо да за сваку коначну фамилију $V_1, \ldots, V_n$ отворених скупова важи да је $V_1 \cap \ldots \cap V_n$ отворен.

Али, оно не важи за бесконачне фамилије.

Пример: $M = \mathbb{R}$, $V_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$

V_n су отворени.

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = \{0\}$

што је отворен.

Последице: (1) M и $\emptyset$ су затворени

(2) $F_1, \dots, F_n$ затворени $\Rightarrow$

$F_1 \cup \dots \cup F_n$ затворен

(3) $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија затворених скупова, онда је $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ затворен.

Доказ: Де Морганови закони. ☐

Пример: $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ затворени

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n =]0,1[$ није затворен

$\Rightarrow$ (2) не важи за бесконачне фамилије.

Дефиниција: Фамилија свих отворених скупова у M назива се топологија.

Дефиниција: Тополошки простор је пар (X, τ) где је X скуп, а $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ фамилија подскупова од X са следећим својствима:

(I) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

(II) $V_1, \dots, V_n \in \tau \Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_n \in \tau$

(III) $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \tau$.

Фамилију τ називамо топологијом на X, а њене елементе отвореним скуповима.

Скуп $F \subseteq X$ је затворен ако је његов комплемент отворен, тј. ако је $X \setminus F \in \tau$.

Скуп $A \subseteq X$ је околина тачке $a \in A$ ако постоји $V \in \tau$ тачно да је $a \in V$ и $V \subseteq A$.

$\mathcal{F}_a$ - филтер околина тачке $a \in X$

$\mathcal{F}_a^0$ - филтер отворених околина

Пример: $X = \{0,1\}$, $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$

лако се види: (X,τ) је

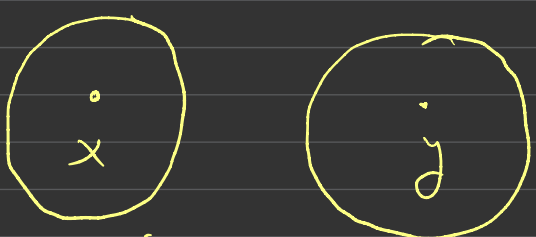
тополошки прост.

У метричком простору важи:

$x \neq y \Rightarrow d(x,y) = \rho > 0$

$\Rightarrow B]x;\rho/3[\cap B]y;\rho/3[= \emptyset$

отворени скупови



дисјунктни отворени скупови

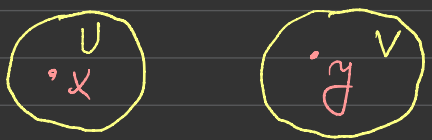
У хаусдорфовом X не постоје дисјунктни

$V_1, V_2 \in \tau$ такви да је

$0 \in V_1$, $1 \in V_2$

Дефиниција: Тополошки простор (X,τ) је **Хаусдорфов** ако за све $x,y\in X$

$$x\neq y \Rightarrow (\exists U,V\in\tau)\ U\cap V=\emptyset,\ x\in U,\ y\in V$$



Подсетник: Ако је $\mathcal{F}$ филтер на скупу S, (Y,d) метрички простор и $f:S\to Y$ онда је

$$y=\lim_{\mathcal{F}} f \iff (\forall\varepsilon>0)\ d(f,y)<_{\mathcal{F}}\varepsilon$$
$$\iff (\forall\varepsilon>0)\ f^{-1}(B]y;\varepsilon[)\in\mathcal{F}$$

$A\subseteq Y$ је **околина** тачке $a\in A$

$$\Updownarrow$$
$$(\exists\varepsilon>0)\ B]a;\varepsilon[\subseteq A$$
$$\Updownarrow$$

постоји отворен скуп V, такав да $a\in V\subseteq A$.

$y=\lim_{\mathcal{F}} f \iff$ За сваку околину A тачке y важи $f^{-1}(A)\in\mathcal{F}$.

Ако је (X,τ) тополошки простор, онда $A \subseteq X$ је околина тачке $a \in A$ ако постоји отворен скуп $V \in \tau$ такав да је $a \in V \subseteq A$.

Ако је (X,τ) Хаусдорфов, $\mathcal{F}$ филтер на S и $f: S \to X$, дефинишемо

$$X \ni \xi = \lim_{\mathcal{F}} f \overset{\text{def}}{\iff} (\forall V \in \tau)\, \xi \in V \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{F}$$

$\iff$ За сваку околину A тачке ξ је $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Хаусдорфово својство $\Rightarrow \lim_{\mathcal{F}} f$ је јединствен.

Доказ: као у метричким просторима. ▨

Важи и Принцип локализације:

$$f =_{\mathcal{F}} g \Rightarrow \lim_{\mathcal{F}} f = \lim_{\mathcal{F}} g$$

Доказ: Као у метричким просторима, али овде се не користи Хаусдорфово својство. ▨

Ако су (X,d_X), (Y,d_Y) метрички простори, $f: X \to Y$ и $a \in X$, онда је

$$f \text{ C } a \overset{\text{деф}}{\iff} \exists \lim_{\mathcal{F}_a} f$$

где је $\mathcal{F}_a$ филтер околина тачке a и f C a означава да „f је непрекидно у тачки a".

Став: f C $a \iff \lim_{\mathcal{F}_a} f = f(a)$.

Доказ: $f^{-1}(f(a)) = a$ припада свакој околини тачке $a \Rightarrow$ ако је $y \neq f(a)$, $\varepsilon := \frac{1}{2} d(y, f(a)) > 0$, онда $f^{-1}(B]y;\varepsilon[)$ није околина тачке a. ▨

Еквивалентне дефиниције непрекидности:

f C $a \iff (\forall \varepsilon > 0)\ f^{-1}(B]f(a);\varepsilon[) \in \mathcal{F}_a$

$\iff$ За сваку околину V тачке $f(a)$ скуп $f^{-1}(V)$ је околина тачке a.

Последња дефиниција има смисла у произвољним (не обавезно Хаусдорфовим) тополошким просторима.

Дефиниција: Нека су (X, τ_X), (Y, τ_Y) тополошки простори.

(1) Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно у тачки $a \in X$ (ознака: $f \mathrm{C} a$) ако је за сваки отворен скуп $V \in \tau_Y$ такав да је $f(a) \in V$ скуп $f^{-1}(V)$ околина тачке a.

(2) Пресликавање f је непрекидно на скупу $A \subseteq X$ (ознака: $f \mathrm{C} A$ или $f \in C(A)$) ако је $(\forall a \in A)\, f \mathrm{C} a$.

(3) Пресликавање $f: X \to Y$ је непрекидно ако је непрекидно у свакој тачки домена X.

Еквивалентне дефиниције непрекидности у метричком простору: (X, d_X), (Y, d_Y) метрички простори, $f: X \to Y$ је непрекидно у тачки $a \in X$ ($f \subset a$) ако и само ако важи било који од следећих еквивалентних исказа:

(0) $\lim\limits_{\mathcal{F}_a} f(x) = f(a)$

(1) $\lim\limits_{\mathcal{F}_a^\circ} f(x) = f(a)$, тј. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

(2) $(\forall x \in X^{\mathbb{N}}) \lim\limits_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} x = a \Rightarrow \lim\limits_{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}} f \circ x = f(a)$,

тј: $(\forall x_n \in X)\ x_n \longrightarrow a \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(a)$

(3) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\, d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$

(4) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ f(B]a; \delta[) \subseteq B]f(a); \varepsilon[$

(5) $(\forall V \in \mathcal{F}_{f(a)})(\exists U \in \mathcal{F}_a)\ f(U) \subseteq V$

(6) $(\forall V \in \tau_Y)\ V \ni f(a) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{F}_a$,

где је τ_Y топологија индукована метриком d_Y.

Тврђење: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $a \in X$

$f \subset a$, $g \subset f(a) \Rightarrow g \circ f \subset a$.

Доказ: Користимо (5) и својство $\mathcal{P}_0$ (П2) филтера:

$W \in \mathcal{F}_{g(f(a))} \Rightarrow g^{-1}(W) \in \mathcal{F}_{f(a)}$ (јер је $g \subset f(a)$)

$\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(W)) \in \mathcal{F}_a$ (јер је $f \subset a$)

$\Leftrightarrow (g \circ f)^{-1}(W) \in \mathcal{F}_a$ ▨

Тврђење (локалност непрекидности): Нека је $f, g : X \to Y$, $a \in X$, $U \in \mathcal{F}_a$. Тада је

(1) $f \subset a \Leftrightarrow (f|_U) \subset a$

(2) $f|_U = g|_U \Rightarrow [f \subset a \Leftrightarrow g \subset a]$

Доказ: Принцип локализације за $\lim_{\mathcal{F}}$. ▨

Дефиниција: $f : X \to Y$ је равномерно (или униформно) непрекидно ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a, b \in X)\, d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$$

Напомена: Равномерна непрекидност није дефинисана у тополошком простору у општем случају: за дефиницију је потребна једнакомерна структура на њему.

Тврђење: Равномерно непрекидно пресликавање је непрекидно.

Доказ: $\forall \varepsilon \forall x \exists \delta \forall y \Leftarrow \forall \varepsilon \exists \delta \forall x \forall y$ ▨

Дефиниција: $f: X \to Y$ је Липшицово ако је

$$\operatorname{lip} f := \sup_{\substack{a \neq b \\ a,b \in X}} \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a,b)} < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$(\exists L \in \mathbb{R}_+)(\forall a,b \in X)\ d_Y(f(a), f(b)) \leq L d_X(a,b)$$

$\operatorname{lip} f$ се назива Липшицовом константом од f.

$$\operatorname{lip} f = \inf \{ L \in \mathbb{R}_+ \mid (\forall a,b \in X) d_Y(f(a), f(b)) \leq L d_X(a,b) \}$$

Тврдење: Липшицово пресликавање је рамномерно непрекинато.

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$.

1. Ако је $\operatorname{lip} f > 0$, узмемо $\delta = \frac{\varepsilon}{\operatorname{lip} f}$. Тада је:
$d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \operatorname{lip} f \cdot d(a,b) < \operatorname{lip} f \frac{\varepsilon}{\operatorname{lip} f}$
2. $\operatorname{lip} f = 0 \iff f = \text{const}$. ▨

Тврдење: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, $a \in X$, $A \subseteq X$

(1) $f \subset a$, $g \subset f(a) \Rightarrow g \circ f \subset a$

(2) $f \in C(A)$, $g \in C(f(A)) \Rightarrow g \circ f \in C(A)$

(3) f и g непрекинати $\Rightarrow g \circ f$ непрекинато

(4) f и g рамномерно непрекинати
$\Downarrow$
$g \circ f$ рамномерно непрекинато

(5) $\operatorname{lip}(g \circ f) \leq \operatorname{lip} g \cdot \operatorname{lip} f$
(уз договор: $0 \cdot \infty = 0$).

Доказ: (1) доказано раније, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)

(4) $\varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists \eta > 0)\ d_Y(s,t) < \eta \Rightarrow d_Z(g(s), g(t)) < \varepsilon$

$\eta > 0 \Rightarrow (\exists \delta > 0)\ d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \eta$

$\Rightarrow d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Z(f(a), f(b)) < \varepsilon$

(5) $d_Z(g(f(a)), g(f(b))) \leq \operatorname{lip} g \cdot d_Y(f(a), f(b))$

$\leq \operatorname{lip} g \cdot \operatorname{lip} f \cdot d_X(a,b)$ ▨

Примери: ① Константна пресликавања

$f: X \to Y$, $f \equiv \text{const}$. су Липшицова: $\operatorname{lip} f = 0$.

② Идентичко пресликавање:

$1_X : X \to X$, $1_X(x) = x$ $\operatorname{lip} 1_X = 1$.

③ Уобичајено подскуп $A \subseteq X$ у X:

$j_A : A \longrightarrow X$, $j_A(x) = x$

(потпуно као ②)

$d(j_A(x), j_A(y)) = d(x,y) \Rightarrow \operatorname{lip} j_A = 1$.

④ Растојање тачке од скупа:

$\emptyset \neq A \subseteq X$, $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) := d(x, A)$,

где је $d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$

Напомена: Растојање између непразних подскупова $A, B \subseteq X$ је

$$d(A, B) = \inf \{ d(a, b) \mid a \in A, b \in B \};$$

Тврђење: $d(x, a) = d(\{x\}, A)$

$a \in A$: $|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y)$ / $\inf_{a \in A}$

$\Rightarrow |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \Rightarrow \operatorname{Lip} f \leq 1.$

⑤ Дефиниција: (M, d) дефинише пресликавање

$$d: M \times M \to \mathbb{R}$$

$X := M \times M$, d_∞ дефинисано на X:

$$d_\infty((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := \max \{ d(a_1, b_1), d(a_2, b_2) \}$$

$|d(a_1, a_2) - d(b_1, b_2)| \leq L \, d_\infty((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ (?)

$$|d(a_1,a_2)-d(b_1,b_2)| = |d(a_1,a_2)-d(b_1,a_2)+d(b_1,a_2)-d(b_1,b_2)|$$

$$\le |d(a_1,a_2)-d(b_1,a_2)| + |d(b_1,a_2)-d(b_1,b_2)|$$

$$\le d(a_1,b_1)+d(a_2,b_2) \le 2 \max_{j\in\{1,2\}} d(a_j,b_j) =$$

$$= 2\, d_\infty((a_1,a_2),(b_1,b_2)) \Rightarrow \operatorname{lip} d \le 2$$

⑥ Норма: $(G, \|\cdot\|)$ нормирана група

$\|\cdot\| : G \to \mathbb{R}$; $|\|x\|-\|y\|| \le \|x-y\|$

$\Rightarrow \operatorname{lip}\|\cdot\| \le 1$

Задатак: Да ли у ⑤ и ⑥ важи једнакост?

Одговор: у ⑥ да, у ⑤ не увек.

⑦ Пројекције: $(X_1,d_1), \dots, (X_n,d_n)$

$\pi_j : X_1 \times \dots \times X_n \to X_j$, $\pi_j(a_1,\dots,a_n) = a_j$

$X := \prod_{j=1}^{n} X_j$ метрички простор са метриком

$$d_\infty((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) = \max_{1\le j\le n} d_j(a_j,b_j)$$

Задатак: $\operatorname{lip}\pi_j = 1$.

(8) Сабирање: $(X, +, \cdot, \|\cdot\|, 0)$ нормирани векторски простор,

$$\Sigma : X^n \to X, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$$

$(X^n, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty, 0)$ је нормирани векторски простор са нормом

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \le j \le n} \|x_j\| \text{ за } x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

$x, y \in X^n$

$$d(\Sigma x, \Sigma y) = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} y_j \right\|$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} \|x_j - y_j\| \le$$

$$\le n \cdot \max_{1 \le j \le n} \|x_j - y_j\|$$

$$= n \cdot \|x - y\|_\infty$$

$\Rightarrow \operatorname{lip} \Sigma \le n.$

Задатак: Да ли важи једнакост?

⑨ Одређена линеарна пресликавања

$(X,+,\cdot,\|\cdot\|,0)$, $(Y,+,\cdot,\|\cdot\|,0)$ нормирани вект. прос.

(Користимо исте ознаке за $+,\cdot,0,\|\cdot\|$ у дефинитним векторским просторима, али имамо у виду да се ради о дефинитним објектима.)

$L: X \to Y$ линеарно пресликавање

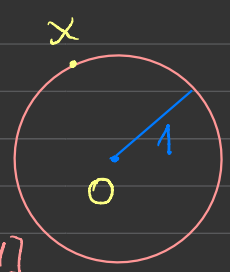
$$\operatorname{Lip} L = \sup_{a \neq b} \frac{\|L(a)-L(b)\|}{\|a-b\|}$$

$$= \sup_{a \neq b} \frac{\|L(a-b)\|}{\|a-b\|}$$

$$= \sup_{a \neq b} \left\| L\left(\frac{a-b}{\|a-b\|}\right)\right\|$$

$$= \sup_{y \neq 0} \left\| L\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\|$$

$$= \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\|$$



$\Rightarrow$ L је Липшицово ако и само ако је ограничено на јединичној сфери

$$S[0;1] = \{ x \in X \mid \|x\| = 1 \}.$$

$$\operatorname{lip} L = \| L|_{S[0;1]} \|_\infty$$

равномерна норма пресликавања

рестрикција L на јединичну сферу

Дефиниција: Линеарно пресликавање називамо ограниченим ако је око ограничено на јединичној сфери.

Напомена: Једино линеарно пресликавање које је ограничено у смислу појма ограниченог пресликавања уведеног раније је 0.

Ограничено линеарно пресликавање је други појам, уведен преоходном дефиницијом.

Линеарна пресликавања добро још и линеарним операторима. Најмању константу линеарног пресликавања називамо његовом операторском нормом и означавамо са $\|\cdot\|_\infty$, тј.

$$\|L\|_\infty := \operatorname{lip} L.$$

Овиме је заиста дефинисана једна норма: ако је $\mathcal{L}(X;Y)$ векторски простор свих ограничених линеарних пресликавања нормиране векторске простора X у нормиран векторски простор Y, онда је $\|\cdot\|_\infty$ норма на њему, тј. $(\mathcal{L}(X;Y),+,\cdot;\|\cdot\|_\infty,0)$ је нормиран векторски простор.

Ако нема опасности од забуне, уместо $\|L\|_\infty$ писаћемо само $\|L\|$.

Задатак: Нека је $(Y, +, \cdot, \|\cdot\|, 0)$ нормиран векторски простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ и нека је

$$L : \mathbb{K}^n \to Y$$

линеарно пресликавање коначно димензионог векторског простора $\mathbb{K}^n$ у Y. Нека је норма на $\mathbb{K}^n$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{n} |x_j|^2}, \quad \text{за } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

(стандардна еуклидска норма). Доказати да је $\|L\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|L(e_j)\|^2 \right)^{1/2}$, где је $e_j = (\delta_{jk})_{1 \leq k \leq n}$ стандардна база. Да ли важи једнакост?

Став: За линеарно пресликавање $L: X \to Y$ нормираних векторских простора следећи искази су еквивалентни:

(а) L је непрекидно у једној тачки

(б) L је непрекидно

(в) L је равномерно непрекидно

(г) L је липшицово

(д) $\sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| < \infty$.

Доказ: (д) $\Rightarrow$ (г) доказано у претходним разматрањима, (г) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (а) увек важи.

(а) $\Rightarrow$ (д) L је ограничено на некој лопти $B[a;\rho] \Rightarrow L$ је ограничено на сфери $S[a;\rho] = a + \rho S[0,1]$. Дакле је $L(a+\rho S) = L(a) + \rho L(S) \Rightarrow L$ ограничено на $S[0;1]$ ▨

(10) Ограничена вишелинеарна пресликавања

$X_1, X_2, \dots, X_k, Y$ нормирани векторски простори над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Пресликавање $L: X_1 \times \dots \times X_k \to Y$ је вишелинеарно (или k-линеарно) ако је линеарно по свакој променљивој.

$$\|L\|_\infty := \sup\{\|L(a_1, \dots, a_k)\| \mid (\forall j)\, \|a_j\| = 1\}$$

Вишелинеарно пресликавање L називамо ограниченим ако је $\|L\|_\infty < \infty$.

Став: L је непрекидно $\iff \|L\|_\infty < \infty$

Доказ: исти као за $k = 1$ ▨

$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_k; Y) :=$ Скуп свих ограничених вишелинеарних пресликавања $L: X_1 \times \dots \times X_k \to Y$.

$(\mathcal{L}(X_1, \dots X_k; Y), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty, 0)$ нормирани вект. прост.

Задатак: Доказати да су следећа пресликавања одређена вишелинеарна пресликавања (свуда је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$):

(а) множење у $\mathbb{K}$:

$L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $L(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi_1 \cdot \xi_2 \cdots \xi_n$

(б) детерминанта: $\det : \mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

(в) множење скалара $\mathbb{K} \times X \to X$, где је X нормирани векторски простор над пољем $\mathbb{K}$.

(г) векторски производ $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ и мешовити производ $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

(д) скаларни производ $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ на унитарном (предхилбертовом) простору X

(ђ) слагање непрекидних линеарних пресликавања $\mathcal{L}(X;Y) \times \mathcal{L}(Y;Z) \to \mathcal{L}(X;Z)$, $(L_1, L_2) \mapsto L_2 \circ L_1$.

Напомена уз (а): $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=xy$ није равномерно непрекидно: посматрати низове $a_n=(n,\frac{1}{n})$, $b_n=(n,0)$.

Дефиниција: Нека је (X,τ) тополошки простор. Тачка $a\in X$ је унутрашња тачка скупа $A\subseteq X$ ако је $A\in\mathcal{F}_a$. Другим речима, $a\in A$ је унутрашња тачка скупа A ако $(\exists V\in\tau)\, a\in V\wedge V\subseteq A$, тј. ако постоји отворен скуп V који садржи тачку a и сам је садржан у A. Ако је (X,d) метрички простор, $a\in X$ је унутрашња тачка скупа $A\subseteq X$ ако $(\exists\rho>0)\, B]a;\rho[\subseteq A$.

Унутрашњост скупа A је скуп свих његових унутрашњих тачака. Означавамо је са $\mathring{A}$ или $\operatorname{Int} A$.

Задатак: (а) $\mathring{X} = X$, $\mathring{\emptyset} = \emptyset$

(б) Ако је (X,d) метрички простор, онда је

$$a \in \mathring{A} \iff d(a, X \setminus A) > 0$$

(в) $\mathring{A} = \{ x \in X \mid A \in \mathcal{F}_x \}$

(г) $\mathring{A}$ је највећи (у односу на релацију поретка $\subseteq$) отворен подскуп скупа A.

Дефиниција: Спољашњост скупа $A \subseteq X$ је унутрашњост његовог комплемента, тј. скуп $\mathring{\widehat{X \setminus A}}$.

Руб скупа A је $\partial A := X \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{\widehat{X \setminus A}})$.

$X = \mathring{A} \cup \partial A \cup \mathring{\widehat{X \setminus A}}$ је разлагање скупа X (не обавезно строго: неки од скупова може бити $\emptyset$).

Приметимо да је руб увек затворен скуп.

Доказ: Комплемент му је $(\mathring{A} \cup \mathring{\widehat{X \setminus A}})$. $\blacksquare$

Примери: ① X нормирани векторски простор.

A подскуп такав да је

$$B]a;\rho[\subseteq A \subseteq B[a;\rho].$$

Тада је

$$\mathring{A} = B]a;\rho[, \quad \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}} = X \setminus B[a;\rho], \quad \partial A = S[a;\rho]$$

Специјално: руб лопте у нормираном векторском простору је сфера.

② (X,d) дискретан метрички простор: $d(a,b)=1$ за све $a \neq b$, $d(a,a)=0$.

$$B[a;\rho] = \begin{cases} \{a\}, & \rho < 1 \\ X, & \rho \geq 1 \end{cases} \qquad \overset{\circ}{\overbrace{B[a;\rho]}} = \begin{cases} \{a\}, & \rho < 1 \\ X, & \rho \geq 1 \end{cases}$$

$$X \setminus B[a;\rho] = \begin{cases} X \setminus \{a\}, & \rho < 1 \\ \emptyset, & \rho \geq 1 \end{cases} \qquad \overset{\circ}{\overbrace{X \setminus B[a;\rho]}} = \begin{cases} X \setminus \{a\}, & \rho < 1 \\ \emptyset, & \rho \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial B[a;\rho] = \emptyset \neq S[a;\rho] = \begin{cases} \emptyset, & \rho \notin \{0,1\} \\ X, & \rho = 1 \\ \{a\}, & \rho = 0. \end{cases}$$

Задатак: Наћи унутрашњост, спољашњост и руб отворене лопте у дискретном метричком простору.

(3) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$, $\mathring{\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} = \emptyset$, $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Дефиниција: Нека је (X, τ) тополошки простор. Тачка $a \in X$ је адхерентна тачка скупа $A \subseteq X$ ако је

$$(\forall V \in \mathcal{F}_a)\ A \cap V \neq \emptyset.$$

Скуп свих адхерентних тачака скупа A назива се његовом адхеренцијом (или затворењем) и означава $\overline{A}$.

Пример: Нека је $A \subseteq \mathbb{R}$ непразан и ограничен одозго. Тада је $\sup A \in \overline{A}$.

Ако је A још и затворен $\Rightarrow \sup A = \max A$.

Задатак: Доказати следећа тврђења

(а) $\bar{A}$ је најмањи затворен надскуп скупа A.

(б) У метричком простору важи

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$$

(в) У нормираном векторском простору важи

$$\overline{B]a;p[} = B[a;p].$$

Да ли ово важи у сваком метричком простору?

(г) У метричком простору важи

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow (\exists a \in A^{\mathbb{N}}) \lim_{\mathbb{N}} a = x$$

$\Leftrightarrow$ постоји низ a_n у a такав да $a_n \to x$.

Тврђење: (1) $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A = A \cup \partial A$

(2) $\partial A = \partial(X \setminus A) = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = (X \setminus \mathring{A}) \cap (X \setminus \mathring{(X \setminus A)})$

(3) $\mathring{A} = \bar{A} \setminus \partial A$

Доказ: Задатак. ▨

Дефиниција: (1.) $a \in X$ је **тачка нагомилавања** скупа A ако је $a \in \overline{A \setminus \{a\}}$.

(2.) $a \in X$ је **изолована тачка** скупа A ако постоји отворен скуп V такав да је $A \cap V = \{a\}$.

Задатак. Нека је (X, d) метрички простор и $A \subseteq X$. Доказати:

(а) $a \in A$ је изолована тачка скупа A.

$\Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0) B(a; \varepsilon) \cap A$ је коначан.

(б) $a \in X$ је тачка нагомилавања скупа A

$\Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{F}_a)(A \setminus \{a\}) \cap V = \emptyset$

$\Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{F}_a)(A \setminus \{a\}) \cap V$ је бесконачан.

(в) Адхерентна тачка скупа A је или изолована или тачка нагомилавања тог скупа.

Напомена: Тачка нагомилавања скупа A не мора да припада том скупу. Изолована тачка скупа A му увек припада.

Задатак: Доказати да су следећа тврђења еквивалентна:

(1) x је тачка нагомилавања скупа A

(2) $(\exists a \in (A \setminus \{x\})^{\mathbb{N}}) \lim_{\mathbb{N}} a = x$

(3) $(\exists a : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} A) \lim_{\mathbb{N}} a = x.$

Задатак: Доказати да су у дискретном метричком простору све тачке изоловане

Задатак: Нека је a_n низ у метричком простору који конвергира ка a_0.

Доказати да је

$$\overline{\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_0\}.$$

Тврђење: Нека је $(X, d_\infty) = \prod_{j=1}^{k} (X_j, d_j)$, $A_j \subseteq X_j$, $A = \prod_{j=1}^{k} A_j$. Тада важи:

(1) Пројекције $\pi_j : X \to X_j$ су **отворена пресликавања**: $V \in \tau(X) \Rightarrow \pi_j(V) \in \tau(X_j)$

(2) $\mathring{A} = \prod_{j=1}^{k} \mathring{A}_j$ и, специјално,

$A \in \tau(X) \Leftrightarrow (\forall j)\ A_j \in \tau(X_j)$

(3) $\overline{A} = \prod_{j=1}^{k} \overline{A}_j$ и, специјално (Комплементи)

$A \in \tau^c(X) \Leftrightarrow (\forall j)\ A_j \in \tau^c(X_j)$,

где је $\tau^c := \{F \mid F^c \in \tau\}$ фамилија свих затворених скупова.

Доказ: (1) $V \in \tau(X)$, $a \in V \Rightarrow (\exists \delta > 0)\ B]a; \delta[\subseteq V$

$\pi_j a = a_j \in X_j \Rightarrow B]a; \delta[= \prod_{j=1}^{k} B]a_j; \delta[$ по дефиницији метрике d_∞

$\Rightarrow B]a_j; \delta[\subseteq \pi_j(V) \Rightarrow \pi_j(V) \subseteq \tau(X_j)$

(2) $a \in \mathring{A} \iff (\exists \delta > 0)\ B]a;\delta[\subseteq A$

$\overset{(*)}{\iff} (\exists \delta > 0)(\forall j)\ B]\pi_j(a);\delta[\subseteq A_j$

$\overset{(**)}{\iff} (\forall j)(\exists \delta > 0)\ B]\pi_j(a);\delta[\subseteq A_j$

$\iff (\forall j)\ \pi_j(a) \subseteq \mathring{A}_j$

(*) $B]a;\delta[= \prod_{j=1}^{k} B]\pi_j(a);\delta[$ по дефиницији d_∞

(**) $\Leftarrow$ важи јер има коначно много j.

(3) $a \in \overline{A} \iff (\forall \varepsilon > 0)\ A \cap B]a;\varepsilon[\neq \emptyset$

$\overset{(*)}{\iff} (\forall \varepsilon > 0)(\forall j)\ A_j \cap B]\pi_j(a);\varepsilon[\neq \emptyset$

$\iff (\forall j)\ \pi_j(a) \in \overline{A_j} \iff a \in \prod_{j=1}^{k} \overline{A_j}$

(*) $\prod_j A_j \cap \prod_j B]\pi(a_j);\varepsilon[= \prod_j (A_j \cap B]\pi_j(a);\varepsilon[)$ $\blacksquare$

Задатак: Доказати да претходно тврђење важи и ако се за метрику на X уместо d_∞ узме d_p за било које $1 \leq p \leq \infty$.

Теорема: Нека су X и Y метрички простори. За $f: X \to Y$ следећи искази су еквивалентни:

(а) f је непрекидно.

(б) За сваки отворен скуп $V \subseteq Y$ скуп $f^{-1}(V) \subseteq X$ је отворен.

(в) За сваки затворен скуп $G \subseteq Y$ скуп $f^{-1}(G)$ је затворен.

(г) За сваки подскуп $A \subseteq X$ је $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Доказ: (а) $\Rightarrow$ (г) $a \in \overline{A} \Rightarrow (\exists a_n \in A)\ a_n \to a$

$\Rightarrow f(A) \ni f(a_n) \longrightarrow f(a)$ (због $f \subset a$)

$\Rightarrow f(a) \in \overline{f(A)}$.

(г) $\Rightarrow$ (в) $G \subseteq Y$ затворен

$f(\overline{f^{-1}(G)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(G))} \subseteq \overline{G} = G$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(G)} \subseteq f^{-1}(G) \Rightarrow \overline{f^{-1}(G)} = f^{-1}(G)$

$\boxed{\text{због } f^{-1}(f(G)) \subseteq G \text{ и тога што је адхеренција растуће пресликавање}}$

затворен скуп ↯

(β) $\Rightarrow$ (δ) $V \subseteq Y$ otvoren $\Rightarrow Y \setminus V$ zatvoren

$\Rightarrow f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ zatvoren

$\Rightarrow f^{-1}(V)$ otvoren

(δ) $\Rightarrow$ (α) $a \in X$, $W \in \mathcal{F}_{f(a)}$

$\Rightarrow \exists$ otvoren $V \subseteq Y$ takav da je $f(a) \in V$, $V \subseteq W$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$, $f^{-1}(V)$ otvoren

$\Rightarrow f^{-1}(W) \in \mathcal{F}_a$ ▨

Tvrdnja: Neka je $(G, +, \|\cdot\|, 0)$ topološka grupa i $A \subseteq G$ neka podgrupa ($\neq \emptyset$, $0 \in A$ i $A - A \subseteq A$). Tada je i $\bar{A}$ podgrupa grupe G.

Dokaz: $f : G \times G \to G$, $f(x,y) = x - y$ je neprekidno preslikavanje

$\bar{A} - \bar{A} := \{x - y \mid (x,y) \in \bar{A} \times \bar{A}\} = f(\bar{A} \times \bar{A})$

$= f(\overline{A \times A}) \subseteq \overline{f(A \times A)} = \overline{A - A} \subseteq \bar{A}$ ▨

Тврђење: $(X, d_X), (Y_j, d_{Y_j})_{j=1}^k$ метрички простори, $Y := \prod_{j=1}^k Y_j$ производ са метриком d_∞ (или неком од d_p за $1 \le p < \infty$), $f : X \to Y$, $f = (f_1, \dots, f_k)$, $f_j = \pi_j \circ f$, $A \subseteq X$, $a \in A$.

Тада важи:

(1) f Ca $\iff (\forall j)$ f_j Ca

(2) $f \in C(A) \iff (\forall j)\ f_j \in C(A)$

(3) f је равномерно непрекидно $\iff$ за свако j f_j су равномерно непрекидна

(4) f је Липшицово $\iff (\forall j)$ f_j је Липшицово.

Доказ (за метрику d_∞): (1) - (3) следе из

$$d_{Y_j}(a_j, b_j) \le d_\infty(a, b) = \sup_j d_{Y_j}(a_j, b_j)$$

(4) $\operatorname{lip} f = \sup_{a \neq b} \sup_j \dfrac{d_{Y_j}(f_j(a), f_j(b))}{d_X(a, b)} = \sup_j \operatorname{lip} f_j$

За метрике d_p - сами (домаћи) ▨

Пример: ① Дељење у $\mathbb{K}$ је непрекидно:

$f: \mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \to \mathbb{K}$, $f(\xi, \eta) = \frac{\xi}{\eta}$

f је композиција пресликавања

$\mathbb{K} \times \mathbb{K}^* \to \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$, $(\xi, \eta) \mapsto (\xi, \eta^{-1})$

које је непрекидно јер су му непрекидна координатна пресликавања (константа 1) и множења, које је непрекидно на основу једног од претходних примера (о вишелинеарним пресликавањима)

② Полиноми више променљивих:

У тополошком векторском простору над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ $J \subseteq \mathbb{N}^\ell$ коначан скуп, $a: J \to Y$ коначан низ

$p: \mathbb{K}^\ell \to Y$, $p(x) = \sum_{j \in J} a_j x^j$ $\left[(x_1, \dots, x_\ell)^{(j_1, \dots, j_\ell)} = x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_\ell^{j_\ell} \right]$

је непрекидно пресликавање.

Тврђење (Принцип продужења једнакости):
Нека су X, Y метрички простори, $f, g: X \to Y$ непрекидна пресликавања, $A \subseteq X$. Тада важи:

(1) Скуп $S = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ је затворен.

(2) $f|_A = g|_A \Rightarrow f|_{\bar{A}} = g|_{\bar{A}}$.

Доказ: (1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow d(f(x), g(x)) = 0$

$\Rightarrow S = (d(f,g))^{-1}(\{0\})$ је инверзна слика затвореног скупа $\{0\}$ у $\mathbb{R}$ при непрекидном пресликавању

$$X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \xrightarrow{d} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (f(x), g(x)) \longmapsto d(f(x), g(x))$$

$\Rightarrow S$ је затворен.

(2) $f|_A = g|_A \Rightarrow A \subseteq S \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{S} = S$

$\Rightarrow f|_{\bar{A}} = g|_{\bar{A}}$ ▨

Тврдење (Принцип продужења неједнакости):
Нека је X метрички простор, $A \subseteq X$ и
$f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрекидна пресликавања.
Тада важи:

(1) Скуп $V = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ је отворен

(2) скуп $H = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ је затворен

(3) $f|_A \leq g|_A \iff f|_{\overline{A}} \leq g|_{\overline{A}}$

(4) $\sup f(A) = \sup f(\overline{A})$

$\inf f(A) = \inf f(\overline{A})$.

Доказ: $\varphi := g - f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ је непрекидно пресликавање, као композиција непрекидних пресликавања $X \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\xi, \eta) \longmapsto \eta - \xi$.

(1) $]0, +\infty[$ отворен $\Rightarrow V = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$ отворен

(2) $[0,+\infty[$ затворен $\Rightarrow H = \varphi^{-1}([0,+\infty[)$ затворен.

(3) $f|_A \leq g|_A \Rightarrow A \subseteq H \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{H} = H \Rightarrow f|_{\bar{A}} \leq g|_{\bar{A}}$

(4) $C \in \mathbb{R}$, $f|_A \leq C \Leftrightarrow f|_{\bar{A}} \leq C$

$\Leftarrow$ тривијално, $\Rightarrow$ (3) са $g \equiv C$

$\Rightarrow f(A)^{\leq} = f(\bar{A})^{\leq}$ ▨

Дефиниција: (X,d) метрички простор, $A \subseteq X$ дијаметар скупа $A \subseteq X$ је број

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$$

$$= \sup d(A \times A)$$

Пошто је пресликавање

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

непрекидно, из Дефиниције непосредно следи неједнакост скупа:

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A})$$

Задатак: (X,d) метрички простор.

Растојање између два скупа $A,B\subseteq X$ је

$$d(A,B) := \inf\{d(a,b) \mid a\in A, b\in B\}$$

или, другим речима, $d(A,B) := \inf d(A\times B)$.

Доказати да је $d(A,B)=d(\bar{A},\bar{B})$.

Дефиниција: Пресликавање $f: X\to Y$ је хомеоморфизам тополошких простора (X,τ_X) и (Y,τ_Y) ако је оно бијекција и ако су $f: X\to Y$ и $f^{-1}: Y\to X$ непрекидна пресликавања.

Другим речима: Хомеоморфизам тополошких простора (X,τ_X) и (Y,τ_Y) је изоморфизам скупова

$$f: (X,\tau_X)\longrightarrow (Y,\tau_Y)$$

Дефиниција: Метрике d_1 и d_2 на скупу X су **тополошки еквивалентне** ако је идентичко пресликавање $1_X : X \to X$ хомеоморфизам (X, d_1) на (X, d_2).

Пример: Све метрике d_p $(1 \le p \le \infty)$ на производу $X_1 \times \dots \times X_k$ метричких простора $X_1, \dots, X_k$ су тополошки еквивалентне.

Доказ следи из

$$d_\infty(x,y) \le d_p(x,y) \le k^{1/p} d_\infty(x,y)$$

(задатак!) ▨

Дефиниција: Метрике d_1 и d_2 на метричком простору X су **слабо тополошки еквивалентне** ако

$$(\exists m, M > 0)\ (\forall a, b \in X)\ m d_1(a,b) \le d_2(a,b) \le M d_1(a,b)$$

Тврђење: Нека је (X, τ_X) тополошки простор и $A \subseteq X$. Фамилија

$$\tau_A := \{ V \cap A \mid V \in \tau_X \}$$

је топологија на A.

Доказ: Лагани задатак ▨

Дефиниција: Топологија τ_A из претходног тврђења назива се релативном топологијом на подскупу A.

Пример: Нека је $X = \mathbb{R}$ са стандардном топологијом τ_X и $A = [0, 2[$ са релативном топологијом τ_A. Тада је $[0, 1[$ отворен у топологији τ_A, а није у τ_X.

Задатак: Да ли је $[1, 2[$ затворен скуп у топологији τ_A?

Тврђење: Нека је (X, d) метрички простор, $B \subseteq A \subseteq X$, τ_X и τ_A топологије на X и A индуковане метриком d и τ_X^c, τ_A^c фамилије затворених скупова:

$$\tau_A^c = \{F \subseteq A \mid A \setminus F \in \tau_A\}, \quad \tau_X^c = \{F \subseteq X \mid X \setminus F \in \tau_X\}.$$

Тада важи:

Гадхеренција у A

(1) $a \in \overline{B}^A \iff a \in A \cap \overline{B}$

(2) $\tau_A^c = A \cap \tau_X^c := \{A \cap F \mid F \in \tau_X^c\}$

(3) $\tau_A^c \subseteq \tau_X^c \iff A \in \tau_X^c$

(4) $\tau_A = A \cap \tau_X$

(5) $\tau_A \subseteq \tau_X \iff A \in \tau_X$

(6) $\mathcal{F}_a^A = A \cap \mathcal{F}_a^X$

(7) $\mathcal{F}_a^A \subseteq \mathcal{F}_a^X \iff A \in \mathcal{F}_a^X$ за $a \in A$.

Филтер околина у A Филтер околина у X

Доказ: (1) $a \in \overline{B}^A \iff a \in A \wedge d(a,B) = 0$

$\iff a \in A \wedge a \in \overline{B}$

(2) $B \in \tau_A^c \Rightarrow B = \overline{B}^A \overset{(1)}{=} A \cap \overline{B} \Rightarrow B \in A \cap \tau_X^c$

(3) ($\Rightarrow$) $\tau_A^c \subseteq \tau_X^c \Rightarrow A \in \tau_X^c$ јер је $A \in \tau_A^c$

($\Leftarrow$) $A \in \tau_X^c$, $F \in \tau_A^c \overset{(2)}{\Rightarrow} (\exists G \in \tau_X^c)\ F = A \cap G$

$\Rightarrow F \in \tau_X^c$ као пресек две затворене скупа.

(4) $A \supseteq V \in \tau_A \iff (\exists F \in \tau_X^c)\ A \setminus V = A \cap F$

$\iff (\exists F \in \tau_X^c)\ V = A \cap (X \setminus F)$

$\iff (\exists U \in \tau_X)\ V = A \cap U$

(5), (6), (7) слично (задатак) ▨

Нека је $\mathcal{F}$ филтер на скупу X и $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Тада је $\mathcal{F}(A) := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{F}\}$ филтер на скупу A, ако је $(\forall B \in \mathcal{F})\ B \cap A \neq \emptyset$.

Доказ: Задатак.

Дефиниција: Нека су X и Y метрички простори, $A \subseteq X$, $a \in \bar{A}$. Тачка $\xi \in Y$ је гранична вредност (лимес) пресликавања $f: A \to Y$ у тачки a ако је

$$\xi = \lim_{\mathcal{F}_a^0(A)} f.$$

[$\mathcal{F}_a^0$ – филтер пробушених околина тачке a у X]

Друге ознаке: $\xi = \lim_{x \to a} f(x)$; $f(x) \to \xi$ над $x \to a$.

Следеће дефиниције лимеса су еквивалентне:

(0) $\xi = \lim_{\mathcal{F}_a^0(A)} f$

(1) пресликавање $\bar{f}: \bar{A} \cup \{a\} \to Y$

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ \xi & x = a \end{cases}$$

је непрекидно у тачки a

(2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)$

$$0 < d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), \xi) < \varepsilon$$

(3) $(\forall V \in \mathcal{F}_S)(\exists U \in \mathcal{F}_a)\ f(A \cap U) \subseteq V$

(4) $(\forall a_n \in A \setminus \{a\})\ \lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = S$

Задатак: Нека су X, Y, A, a, f, S као у претходној дефиницији. Доказати:

(а) $S \in \overline{f(A)}$

(б) $B \subseteq A,\ a \in \overline{B} \Rightarrow \lim_{x\to a} f|_B = S$ (рестрикција на B)

(в) Z метрички простор, $g: Y \to Z$, g непрекидна у S $\Rightarrow \lim_{x\to a} g \circ f(x) = g(S)$.

Тврђење (Смена променљивих): Нека су X, Y, A, a, f, S као у претходној дефиницији, и $\varphi: M \to X$ хомеоморфизам метричког простора M на X. Тада је

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{t\to \varphi^{-1}(a)} f\circ\varphi(t).$$

Доказ: $\operatorname{dom}(f\circ\varphi) = \varphi^{-1}(A) \overset{?}{\Rightarrow} \varphi^{-1}(a) \in \overline{\varphi^{-1}(A)}$

$\varphi(\bar{A}) = \overline{\varphi(A)}$; $\varphi^{-1}(\bar{A}) = \overline{\varphi^{-1}(A)}$, јер је φ хомеоморфизам.

$$\left.\begin{array}{l} A \ni a_n \to a \quad (\text{где } a \in \bar{A}) \\ \varphi^{-1}(A) \ni \varphi^{-1}(a_n) \to \varphi^{-1}(a) \quad (\text{где } \varphi^{-1}(a)) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi^{-1}(a) \in \overline{\varphi^{-1}(A)}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \beta \Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{F}_\beta)(\exists U \in \mathcal{F}_a^\circ)\, f(A\cap U) \subseteq V$$

φ хомеоморфизам $\Rightarrow \{\varphi(W) \mid W \in \mathcal{F}^\circ_{\varphi^{-1}(a)}\} = \mathcal{F}_a^\circ$

$$\Rightarrow (\exists W \in \mathcal{F}^\circ_{\varphi^{-1}(a)})\, f(A\cap U) = f(A \cap \varphi(W)) =$$

$$= f(\varphi(\varphi^{-1}(A)) \cap \varphi(W)) = f\circ\varphi(\varphi^{-1}(A)\cap W)$$ ▨

Други доказ: $\lim_{x\to a} f(x) = \beta$, $\varphi^{-1}(A) \ni t_n \to \varphi^{-1}(a)$

$$\Rightarrow A \ni \varphi(t_n) \to \varphi(\varphi^{-1}(a)) = a \quad (\text{где } \varphi C_a)$$

$$\Rightarrow f(\varphi(t_n)) \to \beta \quad (\text{где } \lim_{x\to a} f(x) = \beta)$$

одавде: $\lim_{t\to\varphi^{-1}(a)} f\circ\varphi(t) = \beta$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\varphi(\varphi^{-1}(a))} (f\circ\varphi)\circ\varphi^{-1}(x) = \beta$$ ▨

Теорема о три лимеса: $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$

$a \in \overline{A}$, $f \leq_{\mathcal{F}_a^\circ(A)} g \leq_{\mathcal{F}_a^\circ(A)} h$, $\lim\limits_{x\to a} f = \lim\limits_{x\to a} h = \zeta$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g = \zeta$.

Доказ: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists U, V) \in \mathcal{F}_a$

$$\left.\begin{array}{l} f(A\cap U) \subseteq]\zeta-\varepsilon, \zeta+\varepsilon[\\ h(A\cap V) \subseteq]\zeta-\varepsilon, \zeta+\varepsilon[\end{array}\right\} W := U\cap V \in \mathcal{F}_a$$

$\Rightarrow g(A\cap W) \subseteq]\zeta-\varepsilon, \zeta+\varepsilon[$ $\blacksquare$

Тврђење (Принцип продужења неједнакости):

Нека је $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$, $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \beta$. Тада важи:

(1) $(\exists B)(B \subseteq A \wedge a \in \overline{B} \wedge f|_B \leq g|_B) \Rightarrow \alpha \leq \beta$

(2) $\alpha < \beta \Rightarrow (\exists V \in \mathcal{F}_a^\circ)(\forall x \in A\cap V)\ f(x) < g(x)$

$$\Updownarrow$$

$$f \leq_{\mathcal{F}_a^\circ(A)} g$$

Доказ: (1) $B \ni b_n \to a$, $f(b_n) \le g(b_n)$

$\Rightarrow \alpha = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \le \lim_{n\to\infty} g(b_n) = \beta$

(2) $\alpha < \beta \Rightarrow (\exists \gamma)\ \alpha < \gamma < \beta$

$(\exists U \in \mathcal{F}_a^\circ)\ f(A \cap U) \subseteq [-\infty, \gamma[\in \mathcal{F}_\alpha$

$(\exists V \in \mathcal{F}_a^\circ)\ g(A \cap V) \subseteq]\gamma, +\infty] \in \mathcal{F}_\beta$

$W := U \cap V \in \mathcal{F}_a^\circ$, $x \in W \Rightarrow f(x) < \gamma < g(x)$. ▨

Дефиниција: Нека је $\mathcal{F}$ филтер на скупу S. Горња и доња граница дефинисана је $f: S \to \overline{\mathbb{R}}$ по филтеру $\mathcal{F}$ са

$$\overline{\lim_{\mathcal{F}}} f := \inf_{U \in \mathcal{F}} \sup_{x \in U} f(x)$$

$$\underline{\lim_{\mathcal{F}}} f := \sup_{U \in \mathcal{F}} \inf_{x \in U} f(x).$$

Тврђење: $\lim_{\mathcal{F}} f = \alpha \iff \overline{\lim_{\mathcal{F}}} f = \alpha = \underline{\lim_{\mathcal{F}}} f$.

Доказ: $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\mathcal{F}} f = \alpha \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists V \in \mathcal{F})\ f(V) \subseteq]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$$

$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists V \in \mathcal{F})\ \alpha - \varepsilon \leq \inf_V f \leq \sup_V f \leq \alpha + \varepsilon$$

$$\iff (\forall \varepsilon > 0)\ \alpha - \varepsilon \leq \sup_{\mathcal{F}} \inf_V f \leq \inf_{\mathcal{F}} \sup_V f \leq \alpha + \varepsilon$$ ▨

Пример: Функција

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

нема лимес у $(0,0)$. У поларним координатама $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ је $f(x,y) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$, одакле се види да је у свакој околини V тачке $(0,0)$ $\sup_V f = \frac{1}{2}$, $\inf_V f = -\frac{1}{2}$, па је

$$\underline{\lim_{(x,y)\to(0,0)}} f(x,y) = -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} = \overline{\lim_{(x,y)\to(0,0)}} f(x,y)$$

Комплетност

Дефиниција: Низ a_n у метричком простору (X, d) је **Кошијев** ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists l \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})\ m \geq l \wedge n \geq l \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Ово својство је еквивалентно следећим својствима:

(1) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists l \in \mathbb{N}) \sup_{m \geq l,\, n \geq l} d(a_m, a_n) < \varepsilon$

(2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists l \in \mathbb{N})\ \operatorname{diam}\{a_l, a_{l+1}, \ldots\} < \varepsilon$

(3) $\lim_{l \to \infty} \operatorname{diam}\{a_l, a_{l+1}, \ldots\} = 0.$

Тврђење: Кошијев низ је ограничен.

Доказ: $\varepsilon > 0$, $\exists l \in \mathbb{N}$ $\operatorname{diam}\{a_l, a_{l+1}, \ldots\} < \varepsilon$,

$\{a_0, a_1, \ldots\} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{l-1}\} \cup \{a_l, a_{l+1}, \ldots\}$ је унија два ограничена скупа. ▨

Тврдење: Конвергентан низ је Коширов.

Доказ: Нека је $\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$. Тада

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists l \in \mathbb{N})\ n \geq l \Rightarrow d(a_n, a_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$$

За $m \geq l$, $n \geq l$ тада је

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a_\infty) + d(a_n, a_\infty) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ ▨

Тврдење: Коширов низ који има конвергентан подниз је конвергентан.

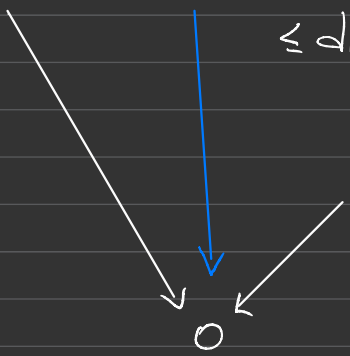
Доказ: a_n Коширов, $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго растућа $\lim_{n\to\infty} a_{\psi(n)} = a_\infty$. Индукцијом: $\psi(n) \geq 0$.

$$0 \leq d(a_n, a_\infty) \leq d(a_n, a_{\psi(n)}) + d(a_{\psi(n)}, a_\infty)$$

$$\leq \operatorname{diam}\{a_n, a_{n+1}, \dots\} + d(a_{\psi(n)}, a_\infty)$$

$\to 0$ јер је низ Коширов

$\to 0$ јер $a_{\psi(n)} \to a_\infty$



▨

Тврђење: Равномерно непрекидна слика Кошијевог низа је Кошијев низ.

Доказ: $\varepsilon>0$, $f: X\to Y$ равномерно непрекидно,

$$(\exists \delta>0)\ d(a,b)<\delta \Rightarrow d(f(a),f(b))<\varepsilon$$

x_n Кошијев низ у $X \Rightarrow (\exists l)\ m,n\geq l \Rightarrow d(x_m,x_n)<\delta$.

$$\Downarrow$$

$$m\geq l,\ n\geq l \Rightarrow d(x_m,x_n)<\delta \Rightarrow d(f(x_m),f(x_n))<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

низ $f(x_n)$ је Кошијев низ у Y. ▨

Дефиниција: Метрички простор је **комплетан** ако је сваки Кошијев низ у њему конвергентан.

Примери: ① У анализи 1 смо доказали: сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}$ (или у $\mathbb{C}$) је конвергентан. Дакле: $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ су комплетни.

② Дискретан метрички простор је комплетан.

Доказ: $\operatorname{diam}\{a_l, a_{l+1}, \dots\} = \begin{cases} 0, & (\forall n \geq l)\ a_n = a_l \\ 1, & (\exists n \geq l)\ a_n \neq a_l \end{cases}$

$\Rightarrow [a_n \text{ је Кошијев} \Leftrightarrow a_n =_{\mathcal{F}_N} a_\infty]$ ▨

Дефиниција: Подскуп $A \subseteq X$ метричког простора (X, d) је комплетан ако и само ако је потпростор $(A, d|_{A\times A})$ комплетан.

Теорема: Подскуп $A \subseteq X$ комплетног простора X је комплетан ако и само ако је затворен.

Доказ: ($\Rightarrow$) A комплетан, $a_\infty \in \bar{A}$

$\Rightarrow (\exists \text{ низ } a_n \text{ у } A \mid \lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty \Rightarrow a_n$ Кошијев

$\Rightarrow a_n$ конвергентан у A (због комплетности)

$\Rightarrow a_\infty \in A$ (јединственост лимеса)

$\Rightarrow \bar{A} = A \Rightarrow A$ затворен.

($\Leftarrow$) A затворен, a_n Кошијев низ у A

$\Rightarrow a_n \to a_\infty \in X$ (јер је X комплетан)

$\Rightarrow a_\infty \in A$ (јер је $A = \bar{A}$)

$\Rightarrow a_n$ конвергира у $A \Rightarrow A$ комплетан. ▨

Пример некомплетних простора: незатворени подскупови комплетних.

Теорема: Производ $(X, d_\infty) = \prod_{j=1}^{k} (X_i, d_i)$ је комплетан ако и само ако су сви X_j комплетни.

Доказ: $\pi_j : X \to X_j$ пројекција је

$d_j(\pi_j a_n, \pi_j a_\infty) \le d_\infty(a_n, a_\infty) = \max_{1 \le j \le k} d_j(\pi_j a_n, \pi_j a_\infty)$

$\Rightarrow$ низ a_n у X конвергира ако и само ако за све $1 \le j \le k$ низови $\pi_j a_n$ конвергирају у просторима X_j.

$$\sup_{m\geq l,\, n\geq l} d_\infty(a_m, a_n) = \sup_{m\geq l,\, n\geq l} \sup_{1\leq j\leq k} d_j(\pi_j a_m, \pi_j a_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{diam}\{a_l, a_{l+1}, \dots\} = \max_{1\leq j\leq k} \operatorname{diam}\{\pi_j a_l, \pi_j a_{l+1}, \dots\}$$

$$\Downarrow$$

a_n je Košijev $\Leftrightarrow$ $(\forall j)$ $\pi_j a_n$ je Košijev

Ako su svi X_j kompletni, a_n Košijev u X

$\Rightarrow \pi_j a_n$ Košijevi $\Rightarrow \pi_j a_n$ konvergira

$\Rightarrow a_n$ konvergira $\Rightarrow X$ kompletan

Obrnuto: ako je X kompletan, onda je

lako dokazati $X_1 \times \{c_2\} \times \dots \times \{c_k\}$ zatvoren,

jer je zadat neprekidnom jednačinom

$(\pi_2(x), \dots, \pi_k(x)) = (c_2, \dots, c_k)$, pa je

kompletan, a bijekcija $j: X_1 \to X_1 \times \{c_2\} \times \dots \times \{c_k\}$

je izometrija, pa je X_1 kompletan. ▨

Теорема (Канторова карактеризација комплетности): Метрички простор (X,d) је комплетан ако и само ако сваки опадајући низ непразних затворених подскупова чији низ дијаметара тежи нули има непразан пресек.

Доказ: ($\Rightarrow$) Претпоставимо да је X комплетан. Нека је F_n низ непразних затворених подскупова, који је опадајући: $F_n \supseteq F_{n+1}$ и такав да је $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. Изаберимо $a_n \in F_n$ за све $n \in \mathbb{N}$.

$F_n \downarrow \Rightarrow [k \geq n \Rightarrow F_k \subseteq F_n] \Rightarrow \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \subseteq F_n$

$\Rightarrow 0 \leq \operatorname{diam}\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq \operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow a_n$ је Кошијев $\Rightarrow a_n \to a_\infty$

$[(\forall k \in \mathbb{N})\ n \geq k \Rightarrow a_n \in F_k] \Rightarrow (\forall k)\ a_\infty \in \overline{F}_k = F_k$

$\Leftarrow$ $a_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

($\Leftarrow$) Претпостављамо: X има Канторово својство.

Нека је a_n Кошијев низ у X. Дефинишимо низ скупова $F_n := \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Он је опадајући, сви F_n су затворени, и

$\operatorname{diam}(F_n) = \operatorname{diam}\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \to 0$ када $n \to \infty$

↑ [$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$ (доказано раније)]

↑ [јер је a_n Кошијев]

$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$

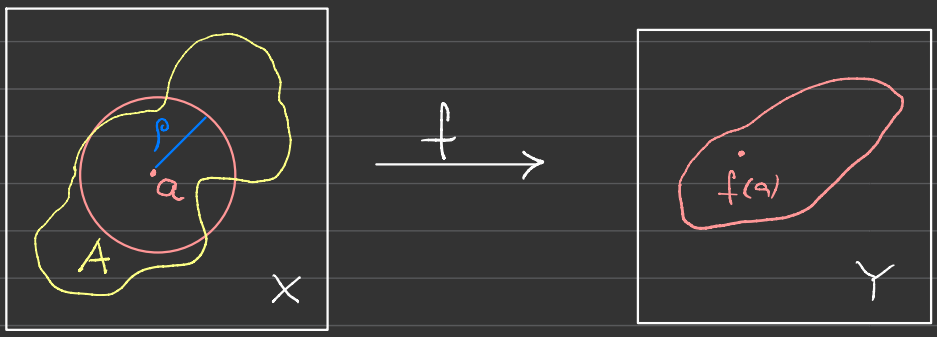
$0 \le d(a_n, a_\infty) \le \operatorname{diam}(F_n)$

$\Rightarrow a_n$ конвергентан $\Rightarrow X$ комплетан. ▨

Дефиниција: $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$, $a \in \overline{A}$.

Осцилација пресликавања f у тачки a је

$$\omega(a; f) := \inf_{\rho > 0} \operatorname{diam} f(A \cap B]a; \rho[)$$



Напомена: Пресликавање

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+; \quad \rho \longmapsto \operatorname{diam} f(A \cap B]a; \rho[)$$

је растуће, па је

$$\omega(a; f) = \lim_{\rho \to 0_+} \operatorname{diam} f(A \cap B]a; \rho[)$$

Лема: $\omega(a;f)=0$ ако и само ако је за сваки низ $a_n \in A$ који конвергира ка a, низ $f(a_n)$ конвергира у Y.

Доказ: ($\Rightarrow$) Ако је $\omega(a;f)=0$, онда

$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\ d(x,a)<\delta \wedge d(y,a)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon.$

$A \ni a_n \to a \quad \Rightarrow \left[(\exists l)\ n \geq l \Rightarrow d(a_n,a)<\delta\right]$

$m \geq l,\ n \geq l \Rightarrow d(a_n,a)<\delta \wedge d(a_m,a)<\delta$

$\Rightarrow d(f(a_n),f(a_m))<\varepsilon \Rightarrow f(a_n)$ Кошијев низ.

($\Leftarrow$) Контрапозиција: ако је $\omega(a;f)\neq 0 \Rightarrow$

$(\exists \varepsilon)(\forall \delta)\ d(x,a)<\delta \wedge d(y,a)<\delta \wedge d(f(x),f(y)) \geq \varepsilon$

За $\delta = \frac{1}{n}$, $n=1,2,\ldots$ добијамо низове $x_n, y_n \in A$

$d(x_n,a)<\frac{1}{n},\ d(y_n,a)<\frac{1}{n},\ d(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon$

$\{a_n\} = \{x_1,y_1,x_2,y_2,\ldots\} \to a,\ \operatorname{diam}\{f(a_n),f(a_{n+1}),\ldots\} \geq \varepsilon$

$\Rightarrow f(a_n)$ није Кошијев. ▨

Последица (Коширев критеријум непрекидности)

$X \xrightarrow{f} Y$, Y комплетан, $a \in X$. Тада:

$$f \text{ C } a \iff \omega(a; f) = 0$$

Доказ: f непрекидно у тачки $a \in X$

$\Updownarrow$

$(\forall \text{низ } a_n \text{ у } X)\ a_n \to a \Rightarrow f(a_n) \to f(a)$

$f(a_n)$ конвергентан

$\Updownarrow$ ← Y комплетан

$f(a_n)$ Коширев

$\Updownarrow$ ← претходна лема

$\omega(a; f) = 0$

$\exists \lim_{n\to\infty} f(a_n) = L \wedge \omega(a; f) = 0 \Rightarrow L = f(a)$.

Контрапозиција: $d(f(a), L) = 2\varepsilon > 0$, $a_n \to a$

$\Rightarrow (\forall \delta > 0)(\exists n)\, d(a_n, a) < \delta \wedge d(f(a), f(a_n)) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ контрадикција са $\omega(a; f) = 0$ ▨

Задатак: $X \supseteq A \xrightarrow{f} Y$, Y комплетан, $a \in \overline{A}$

$$\omega^\circ(a;f) := \inf_{\rho>0} \operatorname{diam} f(A \cap B]a;\rho[\setminus \{a\})$$

Доказати Коширев критеријум постојања лимеса:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \iff \omega^\circ(a;f) = 0.$$

Пример: $-\infty < \alpha \le \beta \le +\infty$, $f: [\alpha,\beta[\to \mathbb{C}$

$$f \in \mathcal{R}_{loc}[\alpha,\beta[\overset{\alpha\in\mathbb{R}}{\iff} (\forall b \in [\alpha,\beta[)\ f \in \mathcal{R}[\alpha,b]$$

↑ f је локално интегрибилна — f је интегрибилна ↑

$$F: [\alpha,\beta[\to \mathbb{C}; \quad F(x) := \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

Несвојствени интеграл $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ конвергира акко и само ако $\exists \lim_{x\to\beta-} F(x)$

Ово је проширење појма Римановог интеграла, јер за $\beta \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathcal{R}[\alpha,\beta] \Rightarrow \lim_{x\to\beta-} F(x) = F(\beta)$ јер је f непрекидна.

Пошто је $\mathbb{C}$ комплетан, из Кошијевог критеријума постојања $\lim_{x\to\beta-} F(x)$ следи да $\int_a^\beta f(t)dt$ конвергира ако и само ако

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists c\in[a,\beta[)\ c\le x<y<\beta \Rightarrow |F(y)-F(x)|<\varepsilon$$

Приметимо да је $|F(y)-F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right|$.

Задатак: Доказати да $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^p}dt$ конвергира ако и само ако је $p>0$.

Упутство: За $p>0$ парцијалном интеграцијом добијамо

$$\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t^p}dt\right| \le \frac{1}{x^p}+\frac{1}{y^p}+\int_x^y |\cos t|\cdot\left(\frac{1}{t^p}\right)'dt$$

$$\le 2\left(\frac{1}{x^p}+\frac{1}{y^p}\right)$$

За $p\le 0$ искористити неједнакост

$$\left|\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \frac{\sin t}{t^p}dt\right| \ge \frac{1}{(2n\pi)^p}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi} \sin t\,dt \not\to 0.$$

Теорема (Продужење непрекидних пресликавања): Нека су X, Y метрички простори, $A \subseteq X$, $\overline{A} = X$ ($\Leftrightarrow$: A је густ у X) и $f: A \to Y$ непрекидно пресликавање. Тада важи:

(1) Постоји непрекидно пресликавање $F: X \to Y$ са особином $F|_A = f$ ако и само ако

$$(\forall x \in X)\ \exists \lim_{t \to x} f(t) =: g(x).$$

При томе је $F \equiv g$ (јединственост продужења).

(2) Ако је f равномерно непрекидно и Y комплетан, онда постоји и равномерно непрекидно $F: X \to Y$ са особином $F|_A = f$.

Доказ: (1) ($\Rightarrow$) $\exists$ непрекидно $F: X \to Y$, $F|_A = f$.

$$(\forall x \in X)\ F \subset x \Rightarrow F(x) = \lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} F|_A(x) =$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) =: g(x).$$

($\Leftarrow$) $\exists g(x) := \lim_{t \to x} f(t)$ за све $x \in X$. Доказимо да је g непрекидно (и онда је $g = F$ тражено проширење). Нека је $x_0 \in X$ и $y_0 = g(x_0)$, тј. $y_0 = \lim_{t \to x_0} f(t)$ (по дефиницији пресликавања g). По дефиницији лимеса, за сваку лопту $V = B[y_0; \varepsilon]$ постоји лопта $U = B]x_0; \delta[$ таква да је $f(A \cap U) \subseteq V$. Тада важи:

$$x \in U \Rightarrow g(x) = \lim_{t \to x} f(t) = \lim_{t \to x} f|_{A \cap U}$$

$$\Rightarrow g(x) \in \overline{f(A \cap U)} \subseteq \overline{V} = V$$

$$\Rightarrow g(U) \subseteq V \Rightarrow g \text{ C } x_0$$

(2) $\varepsilon > 0$; f равномерно непрекидно $\Rightarrow (\exists \delta > 0)$

$(a_1, a_2 \in A)\ d(a_1, a_2) < \delta \Rightarrow d(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon$

$x \in X$, $\overline{A} = X \Rightarrow B]x; \delta[\cap A \neq \emptyset$ [$\varepsilon > 0$ произвољно]

$a_1, a_2 \in B]x; \delta[\cap A \Rightarrow d(f(a_1), f(a_2)) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega^\circ(x; f) = 0$

$\Rightarrow \exists \lim_{t \to x} f(t)$ (Коши-јев услов, Y комплетан)

$\Rightarrow \exists F \in C(X; Y),\ F|_A = f$ (на основу (1)).

Још да је F равномерно непрекидно:

Нека је $\varepsilon > 0$. Тада је $f: A \to Y$ равномерно непрекидна

$(\exists \delta > 0)\ a, b \in A \wedge d(a,b) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Нека су $x, y \in X$ тачке за које је $d(x,y) < \delta/4$.

Пошто је $\overline{A} = X$ следи: $(\exists a, b \in A)\ d(a,x) < \delta/4,\ d(b,y) < \delta/4$.

Тада је $d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,y) + d(b,y) < \delta$

$\Rightarrow d(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

$d(F(x), F(y)) \leq d(F(x), f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), F(y))$

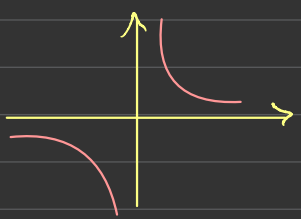
$F(x) = \lim_{t \to x} f(t) = \lim_{t \to x} f|_{A \cap B]a; \delta/4[}(t)$

$\Rightarrow F(x) \in f(A \cap B]a; \delta/4[) \subseteq B[f(a); \frac{\varepsilon}{3}]$

и слично за $F(y) \Rightarrow d(F(x), F(y)) < \varepsilon$ ▨

Примери: ① $X = Y = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\overline{A} = \mathbb{R}$

$f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$



f не може да се продужи у 0.

② Кошијева једначина

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

индукцијом: $f(n) = n \cdot f(1)$ за $n \in \mathbb{N}$

$f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow f(k) = k \cdot f(1)$ за $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow f(q) = q f(1)$ за $q \in \mathbb{Q}$

(јер је $kf(1) = f(k) = f(n \cdot kn^{-1}) = nf(kn^{-1})$)

$|f(y) - f(x)| = |f(y-x) - f(0)|$ непрекидност у 0 са леве стране $\Leftrightarrow$ равномерна непрекидност

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x \cdot f(1)$ за све $x \in \mathbb{R}$.

Дефиниција: Непокретна (фиксна) тачка тачка пресликавања $f: X \to X$ је тачка $a \in X$ таква да је $f(a) = a$.

Другим речима: a је решење једначине $f(x) = x$.

Геометријски: график пресликавања f је

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times X.$$

Фиксна тачка је пројекција π_1 пресека графика са дијагоналом $\Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$.



Дефиниција: Контракција (сажимање) метричког простора X је пресликавање $f: X \to X$ са особином $\text{Lip } f < 1$, тј.:

$$(\exists q \in]0,1[)(\forall x, y)\ d(f(x), f(y)) \leq q\, d(x, y).$$

Банахов став о непокретној тачки:

Нека је X комплетан метрички простор, $f: X \to X$ контракција, $0 < q = \sup f < 1$.

Тада f има тачно једну непокретну тачку, тј. постоји јединствена тачка $a_\infty \in X$ таква да је $f(a_\infty) = a_\infty$.

Тачка a_∞ је гранична вредност низа дефинисаног рекурентно:

a_0 произвољно, $a_{n+1} = f(a_n)$

(низ узастопних апроксимација) и при томе важи

$$d(a_n, a_\infty) \leq \frac{q^n}{1-q} d(a_0, a_1).$$

Доказ: $d(a_{n+2}, a_{n+1}) = d(f(a_{n+1}), f(a_n))$

$\leq q\, d(a_{n+1}, a_n)$.

Множењем са $q^{-(n+1)}$ добијамо

$$q^{-(n+1)} d(a_{n+2}, a_{n+1}) \leq q^{-n} d(a_{n+1}, a_n)$$

$\Rightarrow$ низ $q^{-n} d(a_{n+1}, a_n)$ је опадајући

$\Rightarrow q^{-n} d(a_{n+1}, a_n) \leq q^{-0} d(a_1, a_0)$

$\Rightarrow d(a_{n+1}, a_n) \leq q^n d(a_1, a_0)$ (*)

$$m > n \Rightarrow d(a_m, a_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1})$$

уопштена неједнакост троугла

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{k=n}^{\infty} q^n d(a_1, a_0)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sup_{m \geq n} d(a_m, a_n) \leq d(a_1, a_0) \cdot \frac{q^n}{1-q} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\Rightarrow a_n$ је Кошијев $\Rightarrow a_n \to a_\infty$

$$\Rightarrow a_\infty = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a_\infty)$$

f је a_∞

Јединствености: $f(b_\infty) = b_\infty$

$d(a_\infty, b_\infty) = d(f(a_\infty), f(b_\infty)) \leq q\, d(a_\infty, b_\infty)$, $q < 1$.

$\Rightarrow d(a_\infty, b_\infty) = 0$.



Дефиниција: Нека је $(X, +, \cdot, \|\cdot\|, 0)$ нормиран векторски простор. **Ред** у X је пар низова (a_n, s_n) у X, такви да је $s_n = s_{n-1} + a_n$, $s_0 = a_0$. (*) Ред конвергира ако конвергира низ s_n (одакле, на основу (*), следи $a_n \to 0$). Лимес s_∞ низа s_n називамо **сумом реда** (a_n, s_n) и означавамо: $s_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Уместо ознаке (a_n, s_n) за ред користимо и $\sum a_n$. Низ a_n називамо **општим чланом** реда $\sum a_n$, а низ s_n **парцијалним (делимичним) сумама**. Ред $\sum a_n$ у X је **апсолутно конвергентан** ако је конвергентан ред $\sum \|a_n\|$ у $\mathbb{R}$.

Теорема: Нормирани векторски простор X је комплетан ако и само ако је сваки апсолутно конвергентан ред у њему конвергентан.

Доказ: ($\Rightarrow$) X комплетан (!), $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty$

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \|a_k\|$, σ_n конвергира.

$m > n \Rightarrow \|s_m - s_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\| \overset{(*)}{\leq} \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| = \sigma_m - \sigma_n$

σ_n конвергира $\Rightarrow \sigma_n$ Кошијев $\overset{(*)}{\Rightarrow} s_n$ Кошијев $\overset{(!)}{\Rightarrow} s_n$ конвергира.

($\Leftarrow$) Нека је a_n Кошијев низ у X.

Тада $(\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N})$ $\|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)}\| < 2^{-n}$

$A_n = \{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $A_n \supseteq A_{n+1}$, a_n Кошијев $\Rightarrow \operatorname{diam} A_n \to 0$

φ можемо да дефинишемо индуктивно:

$\varphi(0) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{diam} A_n < 2^{-0}\}$

$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n) \wedge \operatorname{diam} A_k < 2^{-(n+1)}\}$

$d(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n+1)}) \leq \operatorname{diam} A_{\varphi(n)} < 2^{-n}$

Геометријски ред $\sum 2^{-n}$ конвергира

$\Downarrow \leftarrow$ [поредбени принцип за позитивне редове у $\mathbb{R}$

$\sum (a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)})$ апсолутно конвергира.

претпоставка овог смера теореме) $\rightarrow \Downarrow$

$\sum (a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)})$ конвергира

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_{\varphi(k)} - a_{\varphi(k+1)}) = \lim_{n\to\infty} (a_{\varphi(0)} - a_{\varphi(n+1)})$$

$\Rightarrow a_{\varphi(n)}$ конвергира

$\Rightarrow a_n$ Кошијев низ који има конвергентан подниз $\Rightarrow a_n$ конвергира $\Rightarrow X$ комплетан. $\blacksquare$

Дефиниција: Комплетан нормирани векторски простор назива се Банаховим простором.

Комплетан унитарни (пред-Хилбертов) простор назива се Хилбертовим простором.

Кошијев критеријум: Ред $\sum a_n$ у Банаховом простору конвергира ако и само ако је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} \left\| \sum_{k=n}^{m} a_k \right\| = 0$$

Доказ: Због комплетности, низ парцијалних сума конвергира ако и само ако је Кошијев. ▨

X, Y нормирани векторски простори

$B(X;Y) = \{$скуп свих ограничених $f : X \to Y\}$

$f : X \to Y$ је ограничено ако је $\operatorname{diam} f(X) < \infty$.

Друга ознака за $B(X;Y)$: $B_Y(X)$.

$B_Y(X)$ је векторски простор са операцијама наслеђеним из простора Y:

$(f+g)(x) := f(x)+g(x)$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_Y \mid x \in X\}$ је норма на $B_Y(X)$.

Теорема: $B_Y(X)$ је Банахов ако и само ако је Y Банахов. Другим речима, комплетност $B_Y(X)$ је еквивалентна комплетности кодомена Y.

Доказ: ($\Leftarrow$) Нека је Y комплетан.

$f_n : X \to Y$; $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$, $x \in X$.

$\|f_n(x)\| \leq \|f\|_\infty := \sup\{\|f_n(x)\| \mid x \in X\}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n(x)\|$ конвергира (поредак итд.)

Пошто је Y комплетан $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ конвергира.

Нека је $s_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

$\|s_\infty(x)\| \leq \|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty \Rightarrow s_\infty \in B_Y(X)$.

$0 \leq \|s_\infty - \sum_{k=0}^{n} f_k\|_\infty = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_\infty \to 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ конвергира у $B_Y(X) \Rightarrow B_Y(X)$ комплетан.

($\Rightarrow$) Нека је $B_Y(X)$ комплетан, $\{b_n\} \in Y^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \|b_n\| < \infty$. Дефинишимо $f_n : X \to Y$; $f_n(x) \equiv b_n$.

Тада је $\|f_n\|_\infty = \|b_n\|$, па је $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty$.

Пошто је $B_Y(X)$ комплетан, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ конвергира.

Нека је $S_\infty(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Тада је $\left\| S_\infty(t) - \sum_{k=0}^{n} b_n \right\| \leq \left\| S_\infty - \sum_{k=0}^{n} f_n \right\|_\infty \to 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{n} b_n$ конвергира $\Rightarrow Y$ је комплетан ▨

Последица: $\mathcal{L}(X;Y)$ је комплетан ако и само ако је Y комплетан

Доказ: $\mathcal{L}(X;Y) \hookrightarrow B_Y(S)$, $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$

↑ изоморфизам на затворени подскуп ▨

Специјално: ако је X нормирани векторски простор над телом $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, онда је нормин дуал $X^* := \mathcal{L}(X;K)$ комплетан.

Напомена: У коначно димензионом случају је $X \cong X^*$ тј. важи Рисова теорема о репрезентацији:

$$(\forall \alpha \in X^*)(\exists a \in X)(\forall v \in X)\ \alpha(v) = \langle v, a \rangle,$$

где је $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скаларни производ на X.

У бесконачно димензионом случају то не можемо да очекујемо: X не мора да буде комплетан, а X^* је увек комплетан. Ако је X Хилбертов, онда је $X \cong X^*$ и важи Рисова теорема о репрезентацији.

Теорема: Нека су X, Y нормирани векторски простори, при чему је X Банахов и $L \in \mathcal{L}(X, Y)$. Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, онда и $\sum_{n=0}^{\infty} L a_n$ конвергира и важи $L \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} L a_n$.

Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, онда и ред $\sum_{n=0}^{\infty} La_n$ апсолутно конвергира.

Доказ: $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to S_\infty \Rightarrow$

$LS_n \to LS_\infty$ (због непрекидности L),

$LS_n = \sum_{k=0}^{n} La_k$ (због линеарности L)

$$\Rightarrow L\sum_{n=0}^{\infty} a_n = LS_\infty = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} La_k = \sum_{n=0}^{\infty} La_n$$

Тврђење о апсолутној конвергенцији следи из $\|La_n\| \le \|L\| \cdot \|a_n\|$ и поредбеног критеријума. ▨

Задатак: Нека је $l_1(X) := \{a_n \in X^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} \|a_n\| < \infty\}$.

Доказати да је

$$B : l_1(X) \times \mathcal{L}(X;Y) \to l_1(Y),\ B(a_n, L) = La_n$$

непрекидно билинеарно пресликавање.

Компактност

Дефиниција: Метрички простор (X,d) је **компактан** ако сваки низ у њему има конвергентан подниз.

Скуп A у метричком простору (X,d) је компактан ако је метрички простор $(A, d|_{A\times A})$ компактан, тј. ако сваки низ (a_n) у A има подниз који конвергира ка неком тачком $a_0 \in A$.

Примери: ① Коначан подскуп у сваком метричком простору је компактан.

② Отворени и затворени подскупови у $\mathbb{R}$ је компактан. Слично: отворени и затворени подскупови у $\mathbb{C}$ је компактан.

③ Ограничен и затворен подскуп у $\mathbb{K}^r$, за $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ је компактан.

Задатак: Доказати ово, користећи ② и чињеницу да низ у производу метричких простора конвергира ако конвергира по координатама.

④ $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ нису компактни: низ $a_n = n$ нема конвергентан подниз.

Тврђење: Компактан метрички простор је комплетан.

Доказ: (X, d) компактан, a_n Кошијев низ. Из компактности следи да a_n има конвергентан подниз, а Кошијев низ који има конвергентан подниз и сам конвергира. ▨

Напомена: (1) Компактан скуп је затворен.
(2) Затворен подскуп компактног скупа је компактан.

Доказ: (1) Компактан скуп је ограничен, а онда је дијаметар је коначан затворен.
(2) (X,d) компактан A затворен, $A \subseteq X$.
$a_n \in A$ низ у A, a_n има подниз који конвергира ка неком $a_\infty \in X$, али пошто је A затворен $\Rightarrow a_\infty \in A \Rightarrow a_n$ има подниз који конвергира у $A \Rightarrow A$ компактан. ▨

Последица: Подскуп у $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ је компактан ако и само ако је ограничен и затворен.

Напомена: Непрекидна слика компактног скупа је компактна. Другим речима:

Ако су X, Y метрички простори, при чему је X компактан, и $f: X \to Y$ непрекидно пресликавање, онда је $f(X)$ компактан.

Доказ: Бирајмо низ у $f(X) \Rightarrow (\exists a_n \in X)\ f(a_n) = b_n$

X компактан $\Rightarrow (\exists \varphi: \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N})\ \lim_{n\to\infty} a_{\varphi(n)} = a_\infty$

f непр. $a_\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} f(a_{\varphi(n)}) = f(a_\infty)$

$\Rightarrow$ бирали смо конвергентан подниз $\Rightarrow f(X)$ компактан. ▨

Последица: Непрекидна реална функција на компактном скупу је ограничена и има минимум и максимум.

Доказ: X компактан, $f: X \to \mathbb{R}$ непрекидна

$\Rightarrow f(X) \subseteq \mathbb{R}$ компактан $\Rightarrow f(X)$ ограничен

(па $\exists \sup f(X), \inf f(X)$ и знамо да $\exists \max f(X), \min f(X)$ јер $\sup A, \inf A \in \overline{A}$ ▨

Тврђење: Производ метричких простора је компактан ако и само ако су тачни производни фактори.

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је $X_1 \times X_2$ компактан. Пројекције $\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$, $\pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ су непрекидне сурјекције, па су им слике компактне.

($\Leftarrow$) Нека су (X_1, d_1), (X_2, d_2) компактни и нека је $a_n = (x_n, y_n)$ низ у $X_1 \times X_2$.

X_1 компактан $\Rightarrow (\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}) \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x_\infty$

X_2 компактан $\Rightarrow (\exists \psi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}) \lim_{n\to\infty} y_{\psi(\varphi(n))} = y_\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{\varphi\circ\psi(n)} = (x_\infty, y_\infty) \Rightarrow X_1 \times X_2$ компактан. ▨

Задатак: Доказати у $\mathbb{R}^k$ или $\mathbb{C}^k$ је компактан ако и само је ограничен и затворен.

Тврђење: Компактан скуп је ограничен.

Доказ: X метрички простор $A \subseteq X$ компактан.
$a \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x,a)$ непрекидна
$\Rightarrow f$ ограничена, $\exists r := \max f$
$\Rightarrow A \subseteq B[a;r] \Rightarrow A$ ограничен. ▨

Тврђење: Нека су X, Y метрички простори,
X компактан, $f: X \to Y$ непрекидна бијекција.
Тада је f хомеоморфизам, тј. пресликавање
$f^{-1}: Y \to X$ је такође непрекидно.

Доказ: $F \subseteq X$ затворен $\Rightarrow F$ компактан
$\Rightarrow f(F)$ компактан $\Rightarrow f(F)$ затворен
$\Rightarrow$ За свако затворено скуп $F \subseteq X$ његова
инверзна слика при пресликавању $f^{-1}: Y \to X$
$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ је затворена $\Rightarrow f^{-1} \in C(Y;X)$ ▨

Пример: $\varphi: [0, 2\pi[\to S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$\varphi(t) := e^{it}$ је непрекидна бијекција

која није хомеоморфизам.

Доказ: S^1 је ограничен и затворен скуп

у $\mathbb{C}$ (затворен је јер је $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

непрекидно пресликавање, а $S^1 = |\cdot|^{-1}(\{1\})$.

$\Rightarrow S^1$ је компактан.

$\Rightarrow \varphi^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi[$ није непрекидно,

јер $\varphi^{-1}(S^1) = [0, 2\pi[$ није компактан

подскуп у $\mathbb{R}$ (јер није затворен), а

непрекидна слика компактног скупа

је компактан скуп.

Напомена: Нека су X, Y метрички

простори и $\varphi : X \to Y$ хомеоморфизам.

Тада, ако је један од простора X, Y компактан, онда је такав и други.

Ту чињеницу формулишемо и као: компактност је тополошка инваријанта метричког простора, јер хомеоморфизме можемо да схватимо као изоморфизме тополошких структура. То отвара природно питање: да ли можемо да дефинишемо компактност у тополошком простору, а не само у метричком? Видећемо касније да је одговор потврдан.

Ово не важи за комплетност:

$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ је хомеоморфизам, $\mathbb{R}$ је комплетан, а $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ није.

Теорема (Канторова): Непрекидно пресликавање на компактном скупу је равномерно непрекидно.

Друга верзија: ако је X компактан и $f \in C(X,Y)$ онда је f равномерно непрекидно.

Доказ: Претпоставимо супротно: да је X компактан, $f: X \to Y$ непрекидно, а није равномерно непрекидно.

$$\neg(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall x,y)\ d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$$

$$(\exists \varepsilon>0)(\forall \delta>0)(\exists x,y)\ d(x,y)<\delta \wedge d(f(x),f(y)) \geq \varepsilon$$

$$\delta := \frac{1}{n} \Rightarrow (\exists x_n, y_n)\ d(x_n,y_n)<\frac{1}{n} \wedge d(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon$$

$$X \text{ компактан} \Rightarrow (\exists \varphi: \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}) \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x_\infty$$

$$d(x_n,y_n)<\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = x_\infty$$

$$f \in C x_\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(y_{\varphi(n)}) = f(x_\infty)$$

што је контрадикција са $d(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon$. ∎

Лема: Нека је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Свака норма

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{R}$$

на векторском простору $\mathbb{K}^r$ је Липшицово еквивалентна нормираном векторском простору $(\mathbb{K}^r, |\cdot|)$ са стандардном еуклидском нормом

$$|\cdot| : \mathbb{K}^r \longrightarrow \mathbb{R}_+, \qquad |x| = (|x_1|^2 + \dots + |x_r|^2)^{1/2}$$

(за $x := (x_1, \dots, x_r)$) у скупу $\mathbb{R}_+$.

иста ознака за различите норме

Доказ: $e_j = (\delta_{jk})_{k \le r}$ стандардна база у $\mathbb{K}^r$

$$x = (x_1, \dots, x_r) \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{r} x_j e_j$$

$$\|x\| = \Big\| \sum_{j=1}^{r} x_j e_j \Big\| \le \sum_{j=1}^{r} \|x_j e_j\|$$

Коши-Шварцова $\le$

$$= \sum_{j=1}^{r} |x_j| \cdot \|e_j\| \le \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{r} |x_j|^2 \Big)^{1/2}}_{|x|} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{r} \|e_j\|^2 \Big)^{1/2}}_{C}$$

$$\Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| \le \|x - y\| \le C |x - y|$$

∎

Дефиниција: Нека је $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,

$$|\cdot| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+, \quad |x| = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$$

(за $x := (x_1, \dots, x_n)$) стандардна еуклидска норма на $\mathbb{K}^n$ и $\|\cdot\|$ било која друга норма.

Тврдња је $\|\cdot\| \sim |\cdot|$, тј:

$$(\exists m, M \in]0, +\infty[)(\forall x \in \mathbb{K}^n)\ m|x| \le \|x\| \le M|x|$$

Доказ: Јединична сфера $S := \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x| = 1\}$ је компактан скуп (јер је затворен и ограничен), а $\|\cdot\| : S \to \mathbb{R}_+$ је непрекидна функција (по претходној леми) па постоје

$$m := \min\{\|x\| \mid x \in S\}, \quad M := \max\{\|x\| \mid x \in S\}.$$

$m > 0$ зато $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin S$.

$$x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{x}{|x|} \in S \Rightarrow m \le \left\|\frac{x}{|x|}\right\| \le M$$

$$\Rightarrow m|x| \le \|x\| \le M|x| \qquad \blacksquare$$

Последица: Свака два нормирана векторска простора исте коначне димензије су алгебарски и тополошки изоморфна.

Доказ: Нека је $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани векторски простор над пољем $\mathbb{K}$, $\dim Y = r$ и нека је $L: \mathbb{K}^r \to Y$ алгебарски изоморфизам, тј. бијективно линеарно пресликавање. Тада је са $\|x\| := \|Lx\|_Y$ дефинисана норма на $\mathbb{K}^r$. Из претходног тврђења следи $m|x| \leq \|x\| \leq M|x|$ за неке $M \geq m > 0$.

Другим речима: $m|x| \leq \|Lx\|_Y \leq M|x|$, или $\|Lx\|_Y \leq M|x|$, $|L^{-1}(y)| \leq m^{-1}\|y\|_Y$.

Непрекидно $\Rightarrow$ Непрекидно

$$(\mathbb{K}^r, |\cdot|) \xrightarrow{L} (Y, \|\cdot\|_Y) \xrightarrow{L^{-1}} (\mathbb{K}^r, |\cdot|)$$

$\Rightarrow L$ линеарни хомеоморфизам: $(Y, \|\cdot\|_Y) \cong (\mathbb{K}^r, |\cdot|)$ ▨

Задатак: Нека су $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ нормирани векторски простори (који не обавезно исти) димензије и $L: X \to Y$ инјективно линеарно пресликавање. Доказати да је са $\|x\|' := \|Lx\|_Y$ дефинисана још једна норма на X (не обавезно једнака $\|\cdot\|_X$). Користећи идеју из доказа претходне теореме, доказати да је свако линеарно пресликавање нормираних векторских простора коначне димензије непрекидно.

Дефиниција: Нека је (X, d) метрички простор $A \subseteq X$ и $\varepsilon > 0$. Скуп $E \subseteq X$ је ε-мрежа за A ако $(\forall a \in A)(\exists e \in E)\, d(a,e) < \varepsilon$. Другим речима: $(\forall a \in A)\, d(a, E) < \varepsilon$. тј. $A \subseteq \bigcup_{e \in E} B]e, \varepsilon[$.

ε-мрежа може да се схвати као скуп $E \subseteq X$ који апроксимира A са тачношћу ε.

Дефиниција: Скуп $A \subseteq X$ у метричком простору је **тотално ограничен** (или **пред-компактан**) ако за свако $\varepsilon > 0$ има коначну ε мрежу.

Све еквивалентне наредне дефиниције:

(1) Тотално ограничен скуп је ограничен.

(2) Подскуп тоталног ограниченог скупа је тотално ограничен.

Теорема: Метрички простор је тотално ограничен ако и само ако сваки низ у њему има Кошијев подниз.

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је X тотално ограничен.

Нека је $a \in X^{\mathbb{N}}$ (тј $a_n \in X$).

Ако је низ $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ коначан, онда тј a_n има бесконачно много једнаких чланова и они дефинишу Кошијев подниз.

Нека је $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ бесконачан низ. Нека је E_1 коначна 1-мрежа скупа X. Тада се, за неко $e_1 \in E_1$, у лопти $B_1 := B]e_1; 1[$ налази бесконачно много чланова низа a_n. Нека је E_2 коначна $\frac{1}{2}$-мрежа скупа $B]e_1; 1[$. Тада за неко $e_2 \in E_2$ лопта $B_2 := B]e_2; \frac{1}{2}[$ садржи бесконачно много чланова низа a_n.

Продужимо поступак и добијамо тј лопти B_n полупречника $\frac{1}{n}$, таквих да је $B_{n+1} \subseteq B_n$ и $(\forall n)\ a^{-1}(B_n)$ је бесконачан.

$\{j \in \mathbb{N} \mid a_j \in B_n\}$

Дефинишимо $\varphi: \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ индуктивно:

$\varphi(0) := 0$, $\varphi(n+1) := \min a^{-1}(B_n \cap]\varphi(n), +\infty[)$

тј: $\varphi(n+1) := \min\{j > \varphi(n) \mid a_j \in B_n\}$.

$n \geq \ell \Rightarrow B_n \subseteq B_\ell$

$\Rightarrow d(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(\ell)}) < \operatorname{diam} B_\ell = \frac{2}{\ell}$

$\Rightarrow 0 \leq \sup_{n \geq \ell} d(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(\ell)}) < \frac{2}{\ell} \xrightarrow{\ell \to \infty} 0$

$\Rightarrow a \circ \varphi$ је Коширев низ.

($\Leftarrow$) X није тотално ограничен:

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \text{коначан скуп } E \subseteq X)(\exists a \in X)$:

$d(a, E) \geq \varepsilon$. Дефинишимо низ a_n индуктивно:

$a_0 \in X$, a_{n+1} : $d(a_{n+1}; \{a_0, \dots a_n\}) \geq \varepsilon$

$n > \ell \Rightarrow a_\ell \in \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$

$\Rightarrow d(a_\ell, a_n) \geq d(a_n, \{a_0, \dots, a_{n-1}\}) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow a_n$ нема Коширев подниз.



Последица ⊛: Метрички простор је компактан ако и само ако је комплетан и тотално ограничен.

Дефиниција: Скуп $A \subseteq X$ у метричком простору је **релативно компактан** ако је његово затворење $\bar{A}$ компактан скуп.

Тврђење: Подскуп $A \subseteq X$ комплетног метричког простора X је релативно компактан ако и само ако је тотално ограничен.

Доказ: A релативно компактан

$\Updownarrow$

$\bar{A}$ компактан — Последица ⊛ ←

$\Updownarrow$

$\bar{A}$ комплетан $\wedge$ $\bar{A}$ тотално ограничен

$\Updownarrow$

$\bar{A}$ тотално ограничен — Принцип продужења $\leq$ ($d(\cdot, E)$ непрекидна)

$\Updownarrow$

A тотално ограничен

$T \Leftarrow$ Јер је A затворен и X комплетан



Теорема: За метрички простор X следећи искази су еквивалентни:

(а) X је компактан

(б) Ако је $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија отворених скупова у X и $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = X$, онда је $\bigcup_{\lambda\in K} V_\lambda = X$ за неки коначан скуп $K\subseteq\Lambda$.

(в) Ако је $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија затворених скупова у X и $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda = \emptyset$, онда је $\bigcap_{\lambda\in K} F_\lambda = \emptyset$ за неки коначан скуп $K\subseteq\Lambda$.

(г) Ако је $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ опадајући низ затворених подскупова у X и $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = \emptyset$, онда је $F_n = \emptyset$ за неко $n\in\mathbb{N}$.

Својство (б) се назива Борел–Лебеговим својством (Борел–Лебеговом теоремом).

Доказ: (5) $\Leftrightarrow$ (6) следи из Де-Моргановых правила и чињенице F затворен $\Leftrightarrow F^c$ отворен.

(6) $\Rightarrow$ (7) $F_n \downarrow$, $K \subseteq \mathbb{N}$, K коначан и непразан

$$\Rightarrow \bigcap_{n \in K} F_n = F_{\max K}.$$

(7) $\Rightarrow$ (4): Нека је $a \in X^{\mathbb{N}}$ (a_n низ у X) и $F_n := \overline{\{a_n, a_{n+1}, \dots\}}$. F_n су затворени,

$F_n \downarrow$ ($F_n \supseteq F_{n+1}$), $(\forall n \in \mathbb{N})\ F_n \neq \emptyset$

$$\overset{(7)}{\Rightarrow} \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, a_\infty \in \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$$

$(\forall n \in \mathbb{N})$ a_∞ припада затвореву скупа $\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

$$\Rightarrow (\forall \delta > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\ B]a_\infty; \delta[\cap \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow (\forall \delta > 0)\ a^{-1}(B]a_\infty; \delta[) \text{ је бесконачан}$$

$$\Rightarrow (\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N})\ a_{\varphi(n)} \in B]a_\infty; \tfrac{1}{n}[$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{\varphi(n)} = a_\infty$$

$\Rightarrow$ сваки низ има конвергентан подниз.

(a) $\Rightarrow$ (б) Претпоставимо супротно: (а) и $\neg$(б)

X компактан, $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ отворено покривање које нема коначно потпокривање.

X - тотално ограничен (јер је компактан)

$\Rightarrow$ X је коначна унија лопти полупречника 1:

$$X = \bigcup_{j=0}^{k} B]a_j; 1[$$

Ниједна од њих се не може покрити коначном фамилијом скупова V_λ, означимо ту лопту са B_1. Пошто је $B_1 \subseteq X$, и B_1 је тотално ограничен скуп, та може да се покрије коначном фамилијом лопти полупречника $\frac{1}{2}$:

$$B_1 \subseteq \bigcup_{j=0}^{\ell} B]b_j; \tfrac{1}{2}[.$$

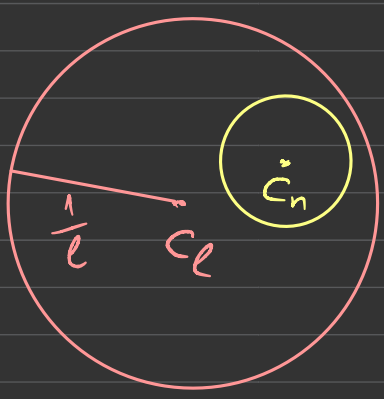
Нека од лопти на десној страни не може да се покрије коначном фамилијом скупова V_λ; означимо ту лопту са B_2. Добијамо низ лопти B_n, полупречника $\frac{1}{n}$, тачан да је $B_{n+1} \subseteq B_n$ и низ који од њих не може да се покрије коначном фамилијом скупова V_λ. Означимо са C_n центар лопте B_n.

$n > l \Rightarrow B_n \subseteq B_l$

$\Rightarrow d(C_n, C_l) < \frac{1}{l}$

$\Rightarrow$ низ C_n је Кошијев

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} C_n = C_\infty \in V_{\lambda_0}$



$(\exists \delta > 0)\ B]C_\infty; \delta[\subseteq V_{\lambda_0}$

$(\exists n)\ \underbrace{B]C_n; \frac{1}{n}[}_{=B_n} \subseteq B]C_\infty; \delta[$

Контрадикција јер B_n не може да се покрије коначном фамилијом V_λ

Дефиниција: Тополошки простор (X,τ) је компактан ако има Борел–Лебегово својство (својство (б) у претходној теореми.

Напомене: Непрекидна слика компактног тополошког простора је компактна.

Доказ: X, Y тополошки прост., X компактан, $f \in C(X;Y)$, $f(X) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ отворено покривање Y

$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(V_\lambda)$, f непрекидна $\Rightarrow f^{-1}(V_\lambda)$ отворени

$\Rightarrow (\exists \text{коначан } K\subseteq\Lambda)\ X = \bigcup_{\lambda\in K} f^{-1}(V_\lambda) \Rightarrow f(X) = \bigcup_{\lambda\in K} V_\lambda$ ▨

Последица: Непрекидна функција $f: X \to \mathbb{R}$ на компактном тополошком простору X је ограничена и достиже минимум и максимум.

Доказ: исти као у случају метричког простора ▨

Лебегова лема: Нека је X компактан метрички простор и $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ његово отворено покривање. Тада $(\exists \delta>0)$ са својством да је свака отворена лопта полупречника δ садржана у неком V_λ.

Доказ: $(\forall a\in X)(\exists \lambda)\ a\in V_\lambda$

$\Rightarrow (\exists r_a>0)\ B]a;r_a[\subseteq V_\lambda$.

јер је X компактан

$X=\bigcup_{a\in X} B]a;\frac{1}{2}r_a[\Rightarrow (\exists \text{ коначан } A\subseteq X)\bigcup_{a\in A} B]a;\frac{1}{2}r_a[=X$

$\delta:=\frac{1}{2}\min_{a\in A} r_a$: $\quad\Leftrightarrow (\forall x\in X)(\exists a\in A)\ d(x,a)<\frac{1}{2}r_a$

$d(x,y)<\delta \Rightarrow d(y,a)\le d(a,x)+d(x,y)<\frac{1}{2}r_a+\frac{1}{2}r_a$

$\Rightarrow (\forall x\in X)(\exists a\in A)\ B]x;\delta[\subseteq B]a;r_a[\subseteq V_\lambda$ ▨

Дефиниција: Метрички простор X је **сепарабилан** ако има пребројив свуда густ подскуп, тј. ако постоји пребројив подскуп $P\subseteq X$ такав да је $\overline{P}=X$.

Тврђење: Сваки компактан метрички простор је сепарабилан.

Доказ: X компактан $\Rightarrow X$ тотално ограничен

$\Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) \exists$ коначна $\frac{1}{n}$-мрежа E_n:

$\Rightarrow (\forall x \in X)(\exists e_n \in E_n)\ d(e_n, x) < \frac{1}{n}$ (*)

Нека је $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Скуп E је пребројив.

(*) $\Rightarrow (\forall x \in X)(\exists e_n \in E)\ \lim_{n\to\infty} e_n = x$

$\Leftrightarrow \overline{E} = X$ ▨

Пример: $\mathbb{R}$ није компактан, али јесте сепарабилан, јер је $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Задатак: Доказати да је метрички простор сепарабилан ако и само ако свако његово отворено покривање има највише пребројиво потпокривање.

Простор непрекидних пресликавања

X, Y метрички простори, X компактан

[X може да буде и тополошки, ми ћемо да радимо са метричким, услови су једноставнији (Задесан)]

$$C(X;Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ непрекидно}\}$$

Друга ознака: $C_Y(X)$.

Сагласно, за $Y = \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ уместо $C(X;\mathbb{R})$ и $C(X;\mathbb{C})$ пишемо само $C(X)$ када је очигледно да је $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

$$B(X;Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ ограничено}\}$$

Подсетимо: $f : X \to Y$ ограничено

$\iff f(X)$ ограничен подскуп у Y

$\iff \operatorname{diam} f(X) < \infty$

Друге ознаке: $B_Y(X)$; за $Y = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$: $B(X)$.

Тврдење: X компактен $\Rightarrow C(X;Y) \subseteq B(X;Y)$.

Доказ: Нека је $b \in Y$. Функција

$$X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(b, f(x))$$

је композиција непрекинутих пресликавања

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{d(b,\cdot)} \mathbb{R}$$

па је непрекината. Пошто је X компактен она достиже максимум:

$$\exists M := \max\{d(b, f(x)) \mid x \in X\}$$

па је $f(X) \subseteq B[b; M]$. ▨

Рамномерна метрика на $B_Y(X)$:

$$d_\infty(f,g) := \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

X компактен $\Rightarrow (C_Y(X), d_\infty)$ је потпростор метричког простора $(B_Y(X), d_\infty)$.

На $C_Y(X)$ важи: $d_\infty(f,g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x))$.

Тврђење: $C_r(X)$ је затворен у $B_r(X)$.

Доказ: $f_n : X \to Y$ низ у $C_r(X)$

$$C_r(X) \ni f_n \xrightarrow{n\to\infty} f_\infty \in B_r(X)$$

Треба да докажемо: $f_\infty \in C_r(X)$, тј. $(\forall a \in X) f \subset a$.

Нека је $a \in X$ и $\varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} f_n \to f_\infty \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N})\, d_\infty(f_l, f_\infty) < \frac{\varepsilon}{3} \\ f_l \subset a \Rightarrow (\exists \delta > 0)(\forall x \in X)\, d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f_l(x), f_l(a)) < \varepsilon \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

За $d(x,a) < \delta$ важи:

$$\begin{aligned} d(f_\infty(x), f_\infty(a)) &\le d(f_\infty(x), f_l(x)) + d(f_l(x), f_l(a)) + d(f_l(a), f_\infty(a)) \\ &\le d_\infty(f_\infty, f_l) + d(f_l(x), f_l(a)) + d_\infty(f_l, f_\infty) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow f_\infty \subset a$, а пошто a произвољно $\Rightarrow f \in C_r(X)$. ▨

Последица: Ако је X компактан и Y комплетан, онда је $C_r(X)$ комплетан. ▨

Напомена: У доказу смо показали:

$f_n C a \wedge f_n \rightrightarrows f_\infty \Rightarrow f_\infty C a$,

Где је $f_n \rightrightarrows f_\infty$ ознака за

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} d(f_n(x), f_\infty(x)) = 0.$$

$$\Updownarrow \quad (\text{у } B_r(x))$$

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f_\infty) = 0$$

РАВНОМЕРНА (УНИФОРМНА) КОНВЕРГЕНЦИЈА

Важи: $f_n \rightrightarrows f_\infty \Rightarrow (\forall x \in X)\ f_n(x) \to f_\infty(x)$,

јер је $d(f_n(x), f_\infty(x)) \le d_\infty(f_n, f_\infty)$,

али не и обрнуто:

Пример: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$

$$(\forall x \in [0,1])\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1[\\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$(\forall n \in \mathbb{N})\ f_n C 1 \wedge f_\infty$ има прекид у 1.

$\Rightarrow$ мако $(\forall x)\ f_n(x) \to f_\infty(x)$, низ f_n

не конвергира ка f_∞ у $(B([0,1]), d_\infty)$. $\blacksquare$

Динијева теорема: Нека је X компактан метрички простор и f_n монотон низ у $C_{\mathbb{R}}(X)$ такав да важи:

(1) $(\forall x \in X) \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$

(2) $f_\infty \in C_{\mathbb{R}}(X)$.

Тада $f_n \rightrightarrows f_\infty$ (тј. $f_n \to f$ у $(C_{\mathbb{R}}(X), d_\infty)$).

Напомена 1: Релација поретка $\leq$ у $\mathbb{R}$ се преноси на $\mathbb{R}^X$:

$$f \leq g \iff (\forall x \in X)\, f(x) \leq g(x)$$

(преношење релације са кодомена Y на скуп пресликавања $f: X \to Y$)

Монотоност низа $(f_n) \in C_{\mathbb{R}}(X)^{\mathbb{N}}$ се односи на ову релацију; другим речима: $(\forall x \in X)$ низ $f_n(x)$ у $\mathbb{R}$ је монотон.

Доказ теореме: На скупу $\mathbb{R}$ метрика је дефинисана уз помоћ $|\cdot| \Rightarrow$ на $C_{\mathbb{R}}(X)$ имамо норму $\|g\|_\infty := \max_{x \in X} |g(x)|$ и одговарајућа метрика је $d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty$.

Посматрајмо ту функцију

$g_n : X \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = |f_\infty(x) - f_n(x)|$.

За њих важи:

1. $g_n \in C(X)$ (јер су $f_n, f_\infty, |\cdot|$ непрекидне)
2. $g_n \downarrow$, тј. $(\forall x \in X)\ g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$
3. $(\forall x \in X) \lim_{n \to \infty} g_n(x) = 0$.

$(\forall x) g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \Rightarrow \sup_{x \in X} g_{n+1} \leq \sup_{x \in X} g_n$

тј. 2. $\Rightarrow \|g_n\|_\infty \downarrow$.

Нека је $\varepsilon > 0$.

Посматрајмо скупове $F_n = \{ x \in X \mid g_n(x) \geq \varepsilon \}$.

$(\forall n)$ F_n је затворен $\quad (F_n = g_n^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ — непрекидно, затворен

$F_n \supseteq F_{n+1}$

$\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = \{ x \in X \mid (\forall n)\ g_n(x) \geq \varepsilon \} = \emptyset$ ← због 3.

$\Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N}) F_l = \emptyset$ због компактности X

$\Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N})(\forall x \in X)\ g_l(x) < \varepsilon \Rightarrow \|g_l\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_\infty = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_\infty < \varepsilon$

↑ јер $\|g_n\|_\infty \downarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_\infty = 0$

$\Updownarrow$

$\lim_{n\to\infty} \|f_\infty - f_n\|_\infty = 0$, тј. $f_n \rightrightarrows f_\infty$ ▨

Напомена: Ако је $(Y, \|\cdot\|)$ нормиран векторски простор, онда су и $B_Y(X)$, $C_Y(X)$, са нормом $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|$ Y Банахов $\Rightarrow C_Y(X)$ Банахов.

Коширов критеријум: Нека је (Y, d) комплетан метрички простор и f_n низ у Y^X. Тада f_n униформно конвергира ако и само ако је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{l\geq n} \sup_{x\in X} d(f_n(x), f_l(x)) = 0.$$

Ако је Y Банахов простор са нормом $\|\cdot\|$ и f_n низ у Y^X, тада f_n униформно конвергира ако и само ако је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{l\geq n} \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f_l(x)\| = 0.$$

Напомена: За дефинисање појма униформне конвергенције и за формулацију претходног става, довољно је да је X скуп, док за кодомен Y треба структура метричког простора.

Дефиниција: Векторски потпростор $M \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$ је **минимизирајући** ако:

(1) $1 \in M$ (1 је константна функција $X \ni x \mapsto 1 \in \mathbb{R}$)

(2) $(\forall a \in X)(\exists f \in M)$ $f(a)$ је строги min f.

Пример: $X = [\alpha, \beta]$ интервал у $\mathbb{R}$

$M := \{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \mid c_j \in \mathbb{R}\}$ је минимизирајући потпростор у $C[\alpha, \beta]$: $1 = 1 + 0x + 0x^2 \in M$,

$a \in [\alpha, \beta]$ $f(x) = (x-a)^2 = a - 2ax + x^2 \in M$

има строги минимум $f(a)$.

Дефиниција: Линеарно пресликавање

$$P : C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(X)$$

је позитивно ако важи

$$(\forall f \in C_{\mathbb{R}}(X))\ f \geq 0 \Rightarrow Pf \geq 0.$$

Еквивалентно: $(\forall f, g \in C_{\mathbb{R}}(X))\ f \leq g \Rightarrow Pf \leq Pg$

Корсовкинова теорема: Нека је X компактан метрички простор и $S \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$ подскуп, такав да је њиме генерисани векторски простор M минимизирајући. Ако је $P_n : C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(X)$ низ позитивних линеарних пресликавања такав да

$$(\forall f \in S)\ P_n f \rightrightarrows f,$$

тада важи

$$\boxed{(\forall f \in C_{\mathbb{R}}(T))\ P_n f \rightrightarrows f.}$$

Доказ: Због линеарности униформне конвергенције и линеарности P_n можемо да претпоставимо да је $S = M$.

Нека је $f \in C_{\mathbb{R}}(M)$. Доказ да $P_n f \rightrightarrows f$ изводимо у 3 корака.

I корак: Нека је $\varepsilon > 0$. Тада

(*) $(\forall a \in X)(\exists g \in M)\ g(a) \le f(a) + \varepsilon \wedge g \ge f$

доказ: $(\exists h \in M)$ h има строг минимум у a.

Можемо да претпоставимо: $h(a) = 0$

(у супротном, уместо h узмемо $h - h(a) \cdot 1 \in M$)

Тада $g_n = n h + f(a) + \varepsilon \in M$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} \infty, & x \neq a \\ f(a)+\varepsilon, & x = a \end{cases}$$

$V_n := \{x \in X \mid g_n(x) > f(x)\}$ су отворени скупови

$V_n \subseteq V_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X \Rightarrow (\exists \ell)\ V_\ell = X$

(јер је X компактан, прва фаза је доказана; теорема).

$g_\ell > f$ (по дефиницији скупа V_ℓ и због $V_\ell = X$)

$g_\ell(a) = f(a) + \varepsilon \Rightarrow g := g_\ell$ задовољава (*).

II корак: $(\forall \varepsilon > 0)$ $\exists$ коначан скуп $g_1, \dots, g_r \in M$ такав да је $f < \inf\{g_1, \dots, g_r\} \leq f + \varepsilon$.

доказ: На основу I корака:

$$(\forall a \in X)\ (\exists g_a \in M)\ f < g_a \wedge g_a(a) \leq f(a) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Пошто су g_a и f непрекидне, постоји отворена околина $V_a \ni a$ таква да је

$$(\forall x \in V_a)\ g_a(x) < f(x) + \varepsilon$$

$\{V_a\}_{a \in X}$ је отворено покривање скупа X из Борел-Лебегове својства следи:

$$(\exists a_1, \dots, a_r)\ X = V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_r}.$$

Тражене функције су $g_j = g_{a_j}$, $1 \leq j \leq r$, јер:

$$x \in X \Rightarrow (\forall j \in \{1, \dots, r\})\ f(x) < g_j(x) \Rightarrow f(x) < \inf_{1 \leq j \leq r} g$$

$$x \in X \Rightarrow \exists j_0 \in \{1, \dots, r\})\ x \in V_{j_0} \Rightarrow f(x) + \varepsilon > g_{j_0}(x) \geq \inf_{1 \leq j \leq r} g_j(x)$$

II корак: Нека је $\varepsilon > 0$. Изаберимо низ $g_1, \dots, g_r$ као у I кораку. За низ $P_n : C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(X)$ позитивних линеарних пресликавања важи

$\lim_{n\to\infty} \|P_n g_j - g_j\|_\infty = 0$ за све $1 \le j \le r$,

тј. $(\forall g \in M)\ P_n g \rightrightarrows g$ по претпоставци.

Дакле је скуп $1, \dots, n_1$ коначан, следи

$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\le j\le r} \|P_n g_j - g_j\|_\infty = 0$ или, другим речима:

$$(\exists \ell \in \mathbb{N})(\forall n \ge \ell) \sup_{1\le j\le r} \sup_{x\in X} |P_n g_j(x) - g_j(x)| < \varepsilon$$

$f \le g_j$ (I корак) $\Rightarrow (\forall j)(\forall n \ge \ell)\ P_n f \le P_n g_j \le g_j + \varepsilon$

$$\Rightarrow P_n f \le \inf_{1\le j\le r}(g_j + \varepsilon) = \inf_{1\le j\le r} g_j + \varepsilon \le f + 2\varepsilon$$

↑ II корак

Аналогно: $-P_n f = P_n(-f) \le -f + 2\varepsilon$

$$\Rightarrow -2\varepsilon < P_n f - f < 2\varepsilon \Rightarrow |P_n f - f| < 2\varepsilon \text{ за } n \ge \ell$$

$$\Rightarrow \|P_n f - f\|_\infty = \sup_{x\in X} |P_n f - f| < 2\varepsilon$$

∎

Пример: Бернштайнови полиноми:

$B_n : C[0,1] \to C[0,1]$; $B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f\left(\frac{j}{n}\right) x^j (1-x)^{n-j}$

B_n је линеарно и позитивно.

$S = \{e_0, e_1, e_2\}$, $e_0(x) \equiv 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$

M – векторски простор са базом $\{e_0, e_1, e_2\}$

$M \subseteq C[0,1]$, M инваријантан.

$$B_n e_0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = (x + (1-x))^n = 1 = e_0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-a)^{n-j} = (x+1-a)^n \quad / \frac{x}{n}\frac{d}{dx}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{j}{n} x^j (1-a)^{n-j} = x(x+1-a)^n \quad / \frac{x}{n}\frac{d}{dx}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{j}{n}\right)^2 x^j (1-a)^{n-j} = \frac{x}{n}(x+1-a)^{n-1}(1+(n-1)x)$$

$$a = x \Rightarrow B_n e_1 = e_1, \quad B_n e_2 = \frac{1}{n} e_1 + \frac{n-1}{n} e_2$$

$\Rightarrow B_n e_j \rightrightarrows e_j$ за све $j \in \{0,1,2\}$

Корнишова теорема $\Rightarrow (\forall f \in C[0,1])\ B_n f \rightrightarrows f$

Последица: I Вајерштрасова теорема

Скуп полинома је густ у $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

Доказ: Хомеоморфизам

$$\varphi: [0,1] \to [a,b]; \quad \varphi(t) = bt + a(1-t)$$

дефинише линеарну изометрију

$$\varphi^*: C[a,b] \to C[0,1]; \quad \varphi^* f := f \circ \varphi$$

$\Rightarrow$ Довољно је доказати тврђење за $C[0,1]$, а оно следи из претходног примера, јер $(\forall f \in C[0,1])\ B_n f$ су полиноми, $B_n f \rightrightarrows f$. $\blacksquare$

Примери: ① $f \in C[0,1]$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} B_n f(x)\,dx$$

равномерни лимес комутира са $\int_0^1$ $\rightarrow$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^1 B_n f(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ Кошијев интеграл = Римановом на $C[0,1]$

② Ако је непрекидна функција

$$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

важи $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$ за све $n = 0, 1, \ldots$

онда је $f \equiv 0$.

Доказ: Постоји низ полинома

$$P_n: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad P_n \rightrightarrows \overline{f}. \quad \}\ (*)$$

$$(\forall n)\ \int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 P_n(x) f(x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 P_n(x) f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty} P_n(x) f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \overline{f}(x) f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 |f(x)|^2\,dx \quad \Rightarrow f \equiv 0$$

Задатак: Доказати (*) (у Коровкиновој и Вајерштрасовој теореми смо радили са реалним функцијама).

За компактан метрички простор X и $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $C_K(X)$ има структуру нормираног векторског простора, али и више од тога - захваљујући множењу у K, на $C_K(X)$ имамо, сем сабирања и множења скаларом, још једно множење, дистрибутивно према $+$:

$$C_K(X) \times C_K(X) \xrightarrow{\cdot} C_K(X); \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Норма $\|f\|_\infty := \sup_X |f|$ задовољава, уз аксиоме нормираног векторског простора и

$$\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty; \quad \|1\|_\infty = 1$$

Овакве структуре називају се нормираним алгебрама.

Задатак: Доказати да је множење у нормираној алгебри непрекидно.

Комплетне нормиране алгебре називају се Банаховим алгебрама.

Примери: ① $\mathbb{K}$ је Банахова алгебра.

② X компактан $\Rightarrow C_{\mathbb{K}}(X)$ је Банахова алгебра.

③ Y Банахов простор $\Rightarrow \mathcal{L}(Y;Y)$ је Банахова алгебра са множењем $(L_1, L_2) \mapsto L_1 \circ L_2$.

Стоун-Вајерштрасов став

Нека је X компактан метрички простор.

Реални облик: Ако је $\mathcal{A}$ подалгебра алгебре $C_{\mathbb{R}}(X)$ која садржи 1 и разликује тачке, тј. важи

$$(\forall x, y \in X)\ x \neq y \Rightarrow (\exists f \in \mathcal{A})\ f(x) \neq f(y),$$

онда је $\mathcal{A}$ густа у $C_{\mathbb{R}}(X)$: $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(X)$.

Комплексни обим: Ако је $\mathcal{A}$ подалгебра алгебре $C_{\mathbb{C}}(X)$ која садржи 1, разликује тачке и затворена је за конјуговање, тј.

$$f \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{f} \in \mathcal{A} \qquad (\overline{f}(x) = \overline{f(x)})$$

онда је $\mathcal{A}$ густа у $C_{\mathbb{C}}(X)$.

Доказ: у скрипти. ▨

Примери: ① Полиноми разликују тачке ($p(x) = x$ разликује тачке) и садрже 1

$\Rightarrow$ I Вајерштрасова теорема

② $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ компактан

$id_{S^1} : S^1 \to S^1$, $id_{S^1}(z) = z$ разликује тачке

$\overline{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$, $\overline{id}_{S^1}(z) = \overline{z} = \frac{1}{z}$

Алгебра генерисана са $\{1, id_{S^1}, \overline{id}_{S^1}\}$ густа у $C_{\mathbb{C}}(S^1)$

Нека елемент су функције

$$p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \quad p(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

Нека је $C_k(2\pi)$ алгебра свих непрекидних 2π-периодичних функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.

Параметризација

$$\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1; \quad \varphi(t) = e^{it}$$

индукује изоморфизам Банахових алгебри

$$\varphi^* : C_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^1) \to C_{\mathbb{C}}(2\pi); \quad \varphi^* f = f \circ \varphi.$$

$\|\varphi^* f\|_\infty = \|f\|_\infty$, $\varphi^*(f+g) = \varphi^* f + \varphi^* g$, $\varphi^*(f \cdot g) = \varphi^* f \cdot \varphi^* g$

$\Rightarrow$ <u>II Вајерштрасова теорема:</u>

Алгебра генерисана скупом $\{e^{int}\}$ је гушта у $C_{\mathbb{C}}(2\pi)$. Алгебра генерисана скупом $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$ је гушта у $C_{\mathbb{R}}(2\pi)$.

Дефиниција: Низ пресликавања $f_n: X \to Y$ метричког простора X у метрички простор Y је равномерно непрекидан ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall n)\ d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon.$$

Арцела-Асколијева теорема: Нека је X сепарабилан и $f_n: X \to \mathbb{C}$ низ који је

1. ограничен по тачкама, тј.
$$(\forall x \in M) \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$$
2. равномерно непрекидан.

Тада низ f_n има подниз који равномерно конвергира на сваком компактном подскупу.

Доказ: Методом дијагонализације (видети скрипту)

Повезаност

Тврђење: За тополошки простор (X, τ) следећи искази су еквивалентни

(а) X не може да се представи као унија два дисјунктна непразна отворена скупа.

(б) X не може да се представи као унија два дисјунктна непразна затворена скупа.

(в) Једини подскупови у X који су и отворени и затворени су X и $\emptyset$.

(г) Свако непрекидно пресликавање $X \to \{0,1\}$ (где је $\{0,1\}$ метрички простор са дискретном метриком $d(0,1) = 1$, $d(0,0) = d(1,1) = 0$) је константно.

Доказ: (а) $\Leftrightarrow$ (б): $X = A \cup B$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = X \setminus B \wedge B = X \setminus A$

$\Rightarrow \begin{cases} A \text{ отворен} \Leftrightarrow B \text{ затворен} \\ B \text{ отворен} \Leftrightarrow A \text{ затворен} \end{cases}$

$\Rightarrow A$ и B отворени $\Leftrightarrow A$ и B затворени.

(а) $\Rightarrow$ (б): $A \subseteq X$ отворен и затворен

$\Rightarrow X \setminus A$ отворен

$X = A \cup (X \setminus A)$ дисјунктни и отворени

(а) $\Rightarrow$ нису непразни

(а) $\Rightarrow A = \emptyset \cup X \setminus A = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \vee A = X$.

(б) $\Rightarrow$ (а): $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$,

A и B отворени $\Rightarrow A = X \setminus B$ затворен

(б) $\Rightarrow A = \emptyset \vee A = X$

$\Rightarrow A = \emptyset \vee B = X \setminus A = \emptyset$

$\Rightarrow A$ и B нису непразни.

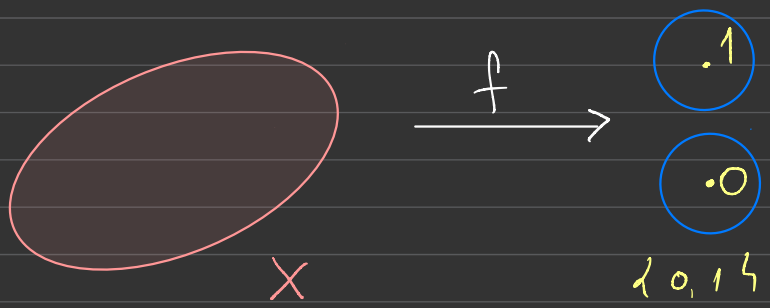
(a) $\Rightarrow$ (η): Предположимо супротно – ¬(η):

$f: X \to \{0,1\}$ недискретно и неконстантно

$\Rightarrow f(X) = \{0,1\}$

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$

$A := f^{-1}(B]0;\varepsilon[)$, $B := f^{-1}(B]1;\varepsilon[)$



$A \cap B = \emptyset$ (здоб $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $d(0,1) = 1$)

A и B отворени (здоб $f \subset X$)

$X = A \cup B$ (здоб $f(X) = \{0,1\}$)

$\Rightarrow$ ¬(a)

(η) $\Rightarrow$ (a): Предположимо ¬(a):

$X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, A, B otvoreni

$f : X \to \{0,1\}$, $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \in B \end{cases}$

$\Rightarrow (\forall V \subseteq \{0,1\})$

$f^{-1}(V) \in \{\emptyset, A, B, X\} \subseteq \tau$

$\Rightarrow$ inverzna slika svakog otvorenog skupa je otvoren skup

$\Rightarrow f$ neprekidno $\Rightarrow T(i)$ ▨

Definicija: Topološki prostor (X, τ) je povezan ako ima neko (a samim tim i svako) od svojstava (a)-(i) iz prethodnog tvrđenja. Podskup $S \subseteq X$ je povezan ako je povezan kao topološki potprostor (sa relativnom topologijom).

Napomena: U ovom kursu X je najčešće

метрички простор. Неке доказе даћемо само за тај случај.

Примери: ① Дискретан метрички простор није повезан (зашто?)

② Интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ је повезан, јер из Теореме о међувредности следи да не постоји непрекидна сурјекција $f : [a,b] \longrightarrow \{0,1\}$. Приметимо да је наслеђена (из $\mathbb{R}$) метрика на $\{0,1\}$ управо дискретна метрика.

③ Ако је $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал и $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{I}$, онда $A \cup I$ није повезан:

$$f : A \cup I \to \{0,1\}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & x \in I \\ 1, & x \in A \end{cases}$$

непрекидна сурјекција (доказати!)

Задаци: ① Доказати да је подскуп реалне праве повезан ако и само ако је интервал.

② Доказати да је конвексан подскуп нормираног векторског простора повезан.

Напомена: скуп A у векторском простору је конвексан ако

$$(\forall a_0, a_1 \in A)\ [a_0, a_1] := \{ t a_1 + (1-t) a_0 \mid 0 \le t \le 1 \} \subseteq A.$$

③ Доказати да су затворене и отворене лопте у нормираном векторском простору конвексни скупови и закључити (на основу ②) да су повезани). Да ли су лопте у нормираном простору увек повезане?

④ Доказати да је тополошки простор X повезан ако и само ако не може да се представи као дисјунктна унија непразних скупова A и B таквих да је $\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}$.

Тврђење: Ако је S повезан скуп и $S \subseteq A \subseteq \overline{S}$, онда је и A повезан.

Доказ: $f: A \to \{0,1\}$ непрекидно

$\Rightarrow f|_S : S \to \{0,1\}$ непрекидно

$\Rightarrow f|_S = \text{const.}$ (јер је S повезан)

$\Rightarrow (\forall s_\infty \in \overline{S})\ \exists \lim_{s \to s_\infty} f|_S(s)$

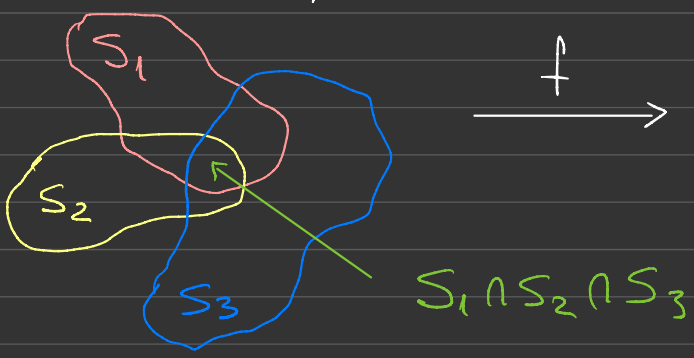
$\Rightarrow f|_S$ се продужава на $\overline{S}$

$\Rightarrow f|_{\overline{S}} = \text{const.}$ (Јединствено продужење =)

$\Rightarrow f|_A = \text{const.} \Rightarrow A$ повезан. ▨

Тврђење: Ако је $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија повезаних скупова и $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \neq \emptyset$, онда је $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ повезан скуп.

Доказ: Нека је $f: \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \to \{0,1\}$ непрекидно пресликавање.



S_λ повезан $\Rightarrow (\forall \lambda\in\Lambda)\ f|_{S_\lambda} = c_\lambda$ за неке константе $c_\lambda \in \{0,1\}$.

$S := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \neq \emptyset \Rightarrow (\forall \lambda)\ f|_S = c_\lambda$

$\Rightarrow c_\lambda$ не зависи од λ

$\Rightarrow f \equiv const \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ повезан. ▨

Уопштење: $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ повезани

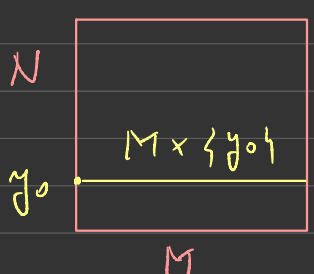
$(\exists\lambda_0)(\forall\lambda\in\Lambda)\ S_\lambda\cap S_{\lambda_0}\neq\emptyset$

$\Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ повезан.

Доказ: Аргументи исти као у доказу претходног тврђења (задатак!) ▨

Последица: Декартов производ повезаних метричких простора је повезан.

Доказ: $P=M\times N$, M,N повезани



$y_0\in N$

$M\times N=\bigcup_{a\in M}\{a\}\times N=$

$=\left(\bigcup_{a\in M}\{a\}\times N\right)\cup M\times\{y_0\}$

$\{a\}\times N\cong N$, $M\times\{y_0\}\cong M$ — повезани

Сви сечу $M\times\{y_0\}\Rightarrow M\times N$ повезан. ▨

Тврђење: Непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп.

Доказ: $f: X \to Y$ непрекидно, $S \subseteq X$ повезан.

$\varphi: f(S) \to \{0,1\}$ непрекидно

$\Rightarrow \varphi \circ f: S \to \{0,1\}$ непрекидно

$\Rightarrow \varphi \circ f = const$ (S је повезан)

$\Rightarrow \varphi = const$ ($f: S \to f(S)$ је НА)

$\Rightarrow f(S)$ је повезан. ▨

Дефиниција: Скуп S у тополошком простору је **путно повезан** ако за све $x_0, x_1 \in S$ постоји непрекидно пресликавање $\gamma: [0,1] \to S$ такво да је $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$.

$\gamma: [0,1] \xrightarrow{\text{непрекидно}} S$ „пут у S"

Једна дефиниција: скуп је путно повезан ако свака две његове тачке могу да се споје путем (непрекидно уопштење конвексности).

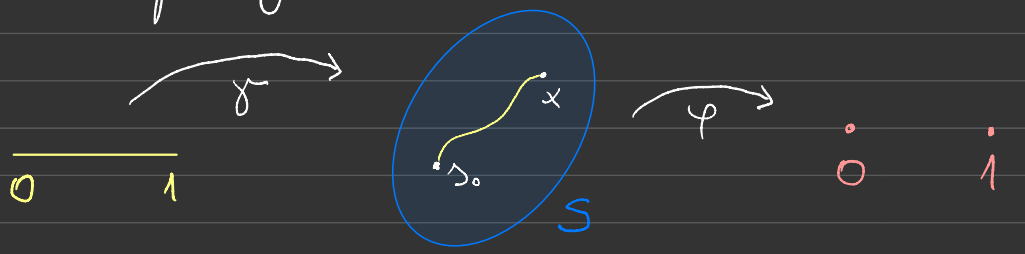
Тврђење: Путно повезан скуп је повезан.

Доказ: S путно повезан

$\varphi: S \to \{0,1\}$ непрекидно, $s_0 \in S$.

$(\forall x \in S)$ $\exists$ пут у S од s_0 до x, тј.

$(\exists$ непрекидно $\gamma: [0,1] \to S)$ $\gamma(0) = s_0$, $\gamma(1) = x$

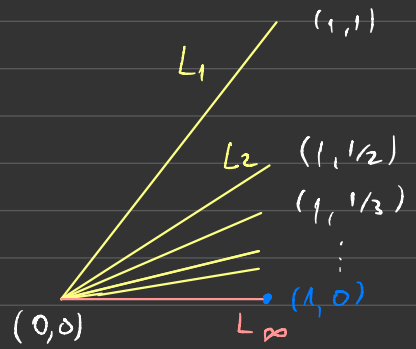


$\varphi \circ \gamma: [0,1] \to \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$ непрекидно

$\Rightarrow \varphi \circ \gamma = const$ (Теорема о међувредности)

$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(s_0) \Rightarrow \varphi = const.$ ▨

Пример (бесконачна метла):



L_n: дуж са крајевима $(0,0)$ и $(1, 1/n)$

L_∞: $[0,1]$ на x-оси.

$M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ - бесконачна метла

M је путно повезан скуп (свака тачка је повезана сегментом са $(0,0)$)

$\Rightarrow$ M је повезан.

Нека је $A := M \cup \{(1,0)\}$

$M \subseteq A \subseteq \overline{M} = M \cup L_\infty$

$\Rightarrow$ A је повезан.

Тврђење: A није путно повезан.

За доказ нам је потребно следеће помоћно тврђење:

Лема: Сваки непразан повезан подскуп у скупу $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ са топологијом наслеђеном из $\mathbb{R}$ је једночлан.

Доказ леме: $S \subseteq X$ непразан и повезан.

Ако $(\exists n) \frac{1}{n} \in S \Rightarrow \{\frac{1}{n}\} \subseteq S$,

$\{\frac{1}{n}\}$ отворен и затворен $\Rightarrow S = \{\frac{1}{n}\}$

Ако $(\forall n) \frac{1}{n} \notin S \Rightarrow S = \{0\}$ ▨

Доказ тврђења: Доказаћемо да не постоји пут који спаја $(1,0)$ и било који други тачку $a \in A$.

$\gamma : [0,1] \to A$ непрекидно, $\gamma(0) = (1,0)$

$T := \{ t \in [0,1] \mid \gamma(t) = (1,0) \} \subseteq [0,1]$

$T = \gamma^{-1}(\{(1,0)\})$, $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ neprekidno

$\{(1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ zatvoren $\Rightarrow$ T zatvoren

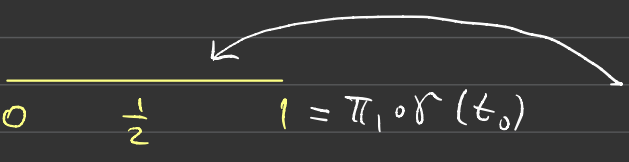
Dokažimo da je T i otvoren.

$t_0 \in T \Rightarrow \gamma(t_0) = (1,0)$

$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ neprekidno

$\Rightarrow (\exists \delta > 0)\ |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\pi_1 \circ \gamma(t) - 1| < \frac{1}{2}$

$\pi_1 \circ \gamma(t_0)$ $\qquad$ ε



$\Rightarrow$ za $|t - t_0| < \delta$ je $\pi_1 \circ \gamma(t) > 0$

Dijagonala nazad

$\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\eta(x,y) = \frac{y}{x}$

je neprekidna, kao i $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \eta \circ \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ je neprekidna

$\Rightarrow \eta \circ \gamma(]t_0-\delta, t_0+\delta[)$ повезан

$\gamma([0,1]) \subseteq A$, $\eta(A) \subseteq \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ скуп

$\Rightarrow \eta \circ \gamma(]t_0-\delta, t_0+\delta[)$ једночлан

(претходна лема)

$\eta \circ \gamma(t_0) = 0 \Rightarrow \eta \circ \gamma(]t_0-\delta, t_0+\delta[) = \{0\}$

$\Rightarrow \gamma(]t_0-\delta, t_0+\delta[)$ подскуп x-осе

$\Rightarrow \gamma(]t_0-\delta, t_0+\delta[) = \{(1,0)\}$

$\Rightarrow]t_0-\delta, t_0+\delta[\subseteq T$

$\Rightarrow$ T отворен.

$0 \in T$ (јер је $\gamma(0) = (1,0)$) $\Rightarrow T \neq \emptyset$

$\Rightarrow T = [0,1]$ као непразан, отворен и затворен подскуп повезаног скупа $[0,1]$

$\Rightarrow \gamma(t) = (1,0)$ за све t

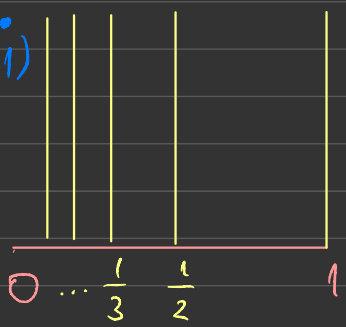
$\Rightarrow A$ није путно повезан. ▨

Дефиниција: Тополошки простор у коме су сви непразни подскупови једноставно повезани назива се **тотално неповезаним**.

Скуп $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ из претходне леме је тотално неповезан.

Задатак: Тополошки чешаљ је скуп

$$X = \bigcup_{n \geq 1} \left(\left\{\frac{1}{n}\right\} \times [0,1]\right) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(0,1)\}$$



са релативном топологијом наслеђеном из $\mathbb{R}^2$. Доказати да је X повезан, а да није путно повезан.

Тврђење: Непрекидна слика путно повезаног скупа је путно повезан скуп.

Доказ: $f: S \to Y$, S путно повезан

$y_0, y_1 \in f(S) \Rightarrow (\exists s_0, s_1 \in S)\ y_0 = f(s_0),\ y_1 = f(s_1)$

S повезан $\Rightarrow$

$(\exists$ непрекидно $\gamma: [0,1] \to S)\ \gamma(0) = s_0,\ \gamma_1 = s_1$

$\Rightarrow\ f \circ \gamma: [0,1] \to f(S)$ непрекидно

$f \circ \gamma(0) = f(s_0) = y_0,\quad f \circ \gamma(1) = f(s_1) = y_1$

(пут од y_0 до y_1)

$\Rightarrow f(S)$ путно повезан. $\blacksquare$

Напомена: Упоредити овај доказ са доказом да је непрекидна слика повезаног скупа повезан скуп.

(„метод обрнутих стрелица")

Повезаност:

$\varphi : X \to \{0,1\}$

непрекидно

$\Downarrow$

$\varphi \equiv const$

Путна повезаност

$\varphi : \{0,1\} \to X$

(изабор 2 тачке $\varphi(0), \varphi(1)$)

$\Downarrow$

$\exists$ непрекидно пресликавање

$\Phi : [0,1] \to X$

обрнуте стрелице (дуалан појам)

Доказ претходног тврђења и доказ сличног тврђења за повезаност користе исту чињеницу – да је композиција непрекидних пресликавања непрекидна, само са супротно усмерености стрелицама (и, због тога, другим редом компоновања пресликавања).

Скуп $\{0,1\}$ може да се схвати као сфера димензије 0: лопте у $\mathbb{R}$ су интервали, $\{0,1\} = \partial[0,1]$. Због тога се за путно повезан скуп користи и термин 0-повезан.

Уопштење: Тополошки простор X је просто повезан (или 1-повезан) ако важи:

(1) X је путно повезан

(2) свако непрекидно пресликавање

$$\varphi : S^1 \longrightarrow X$$

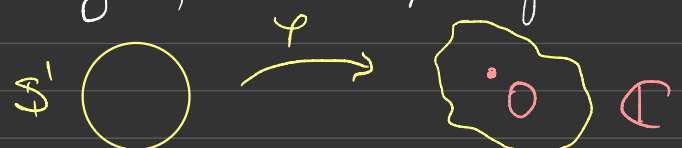
може да се продужи до непрекидног пресликавања

$$\Phi : D^2 \longrightarrow X$$

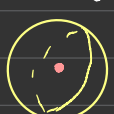
диска $D^2 := \{x^2+y^2 \leq 1\}$.

Дефиниција: Тополошки простор X је n-повезан ако за свако $l \leq n$ свако непрекидно пресликавање $\varphi: S^l \longrightarrow X$ сфере $S^l := \{x_1^2 + \dots + x_{l+1}^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{l+1}$ може да се продужи до непрекидног пресликавања $\Phi: B^{l+1} \longrightarrow X$ једничке лопте $B^l := \{x_1^2 + \dots + x_{l+1}^2 \leq 1\}$.

Примери: ① $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ је путно повезан, али није просто повезан

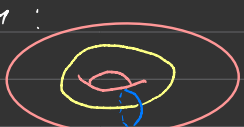


② $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ је просто повезан, али није 2-повезан.



③ Торус није прост повезан:

$T^2 \simeq S^1 \times S^1$

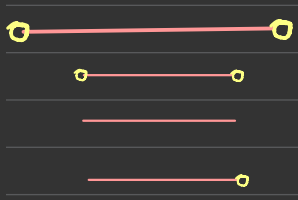


Задаци: ① Доказати да је непрекидна слика путно повезаног скупа путно повезан скуп. Да ли је непрекидна слика просто повезаног скупа просто повезан скуп?

② Нека је $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ фамилија путно повезаних скупова, таква да је $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \neq \emptyset$. Доказати да је $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ путно повезан. Да ли ово важи за просто повезане скупове?

③ Доказати да је Декартов производ путно повезаних скупова путно повезан. Да ли ово важи и за просто повезане скупове?

④ Koji od sledećih skupova su homeomorfni?



$]a,b[$ za neke $-\infty \le a < b \le +\infty$

$]0,1[$

$[0,1]$

$[0,1[$



$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$



$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1 \}$



$\{ z \in \mathbb{C} \mid \|z\|_\infty \le 1 \}$



$\{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \le 1 \}$



$\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} \le |z| \le 1 \}$



$\{ x_1^2 + x_2^2 = 1 , \; 0 \le x_3 \le 1 \}$



$\{ x_1^2 + x_2^2 = 1 , \; 0 < x_3 \le 1 \}$

2. ДИФЕРЕНЦИРАЊЕ

X, Y нормирани векторски простори над $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$V \subseteq X$ $f: V \to Y$, $a \in \mathring{V}$ (унутрашња тачка)

Дефиниција: Пресликавање f је **диференцијабилно** у тачки a ($f \otimes a$) ако постоји $L \in \mathcal{L}(X;Y)$ за које важи

$$f(a+h) = f(a) + Lh + \alpha(h) \text{ кад } h \to 0.$$

Напомена: $\alpha(x,h) = \alpha(h)$ кад $h \to 0$ значи

$$\lim_{h \to 0} \|\alpha(x,h)\|_Y \cdot \|h\|_X^{-1} = 0$$

Непрекидно линеарно пресликавање L назива се **првим изводом** пресликавања f у тачки a и означава:

$$Df(a),\ f'(a),\ df(a),\ \frac{d}{dx} f\Big|_{x=a},\ \dots$$

Тврђење: Извод је дефинисан једнозначно.

Доказ: $f(x+h) = f(x) + L_j h + o(h) \quad j \in \{1,2\}$

$L = L_1 - L_2 \in \mathcal{L}(X;Y)$

$\Rightarrow Lh = o(h)$ кад $h \to 0$ ← по дефиницији једнакости скупова

$\Rightarrow Lh_0 = \frac{1}{\lambda} L(\lambda h_0) = \frac{1}{\lambda} o(\lambda) \quad \lambda \to \lambda \to 0$

пређашком на $\lim_{\lambda \to 0} \Rightarrow Lh_0 = 0$ ▨

локалност $= \lim_{h \to 0} \Rightarrow$ локалност $= Df, \nabla f$.

$f =_{F_a} g \Rightarrow (f \in \mathcal{D}_a \Leftrightarrow g \in \mathcal{D}_a)$

$f =_{F_a} g \wedge f \in \mathcal{D}_a \Rightarrow g \in \mathcal{D}_a \wedge Df(a) = Dg(a)$

Ако је V отворен и $(\forall a \in V)\ f \in \mathcal{D}_a$

тада $f \in \mathcal{D}V$ или $f \in \mathcal{D}_r(V)$

$\mathcal{D}_r(V) := \{ f : V \to Y \mid (\forall a \in V)\ f \in \mathcal{D}_a \}$

↖ скуп диференцијабилних и тада $\mathcal{D}(V)$

Тврђење: Диференцијабилно пресликавање је непрекидно, тј: $f \otimes a \Rightarrow f \subset a$

Доказ: $V \subseteq X$, $f: V \to Y$, $a \in \mathring{V}$, $f \otimes a$

$\Rightarrow f(x) - f(a) = Df(a) \cdot (x-a) + \alpha(x-a)$, $x \to a$

$Df(a) \in \mathcal{L}(X;Y)$ (непрекидно линеарно пресл.)

$\Rightarrow f(x) - f(a) \to$ кад $x \to a$

$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f \subset a$ ▨

Напомена: Користили смо да је, по дефиницији, извод $Df(a)$ непрекидно линеарно пресликавање. Постоји и други приступ (видети свуда). У коначно димензионим нормираним векторским просторима свако линеарно пресликавање је непрекидно.

Теорема (линеарност диференцијала):

$\mathcal{D}_x(V)$ је векторски простор, а

$D : \mathcal{D}_x(V) \longrightarrow \mathcal{L}(X;Y)^V$, $f \longmapsto Df$

линеарно пресликавање.

Другим речима,

$\mu, \eta \in \mathbb{K}, f, g \in \mathcal{D}_x(V) \Rightarrow \mu f + \eta g \in \mathcal{D}_x(V)$

и за све $x \in V$ важи

$$D(\mu f + \eta g)(x) = \mu Df(x) + \eta Dg(x)$$

Доказ: $(\mu f + \eta g)(x+h) - (\mu f + \eta g)(x) =$

$= (\mu f(x+h) + \eta g(x+h)) - (\mu f(x) + \eta g(x)) =$

$= \mu(f(x+h) - f(x)) + \eta(g(x+h) - g(x)) =$

$= \mu(Df(x)h + o(h)) + \eta(Dg(x)h + o(h)), \quad h \to 0$

$= \mu Df(x)h + \eta Dg(x)h + o(h), \quad h \to 0$ ▨

Напомена: Доказали смо и више:

$(\forall a \in X)\ \mathcal{O}_Y(a) := \{f \mid f \text{ око } a\} \subseteq Y^X$

је векторски простор и пресликавање

$\frac{d}{dx}\Big|_{x=a} : \mathcal{O}_Y(a) \to \mathcal{L}(X;Y)$

је линеарно.

Задатак: Нека је X нормиран векторски простор над телом $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $V \subseteq X$, $f, g : V \to \mathbb{K}$, $a \in \mathring{V}$, f око a, g око a.

(а) Доказати да је $f \cdot g$ око a и да важи

$$D(f \cdot g)(a) = g(a)\,Df(a) + f(a)\,Dg(a)$$

(б) $g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ око a и важи

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{(g(a))^2}\left(g(a)\,Df(a) - f(a)\,Dg(a)\right)$$

множење скаларом

Теорема (извод сложене функције):

X, Y, Z нормирани векторски простори

$V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ отворени скупови

$$\begin{array}{ccccc} X \supseteq V & \xrightarrow{f} & Y & & \\ & & \cup & & \\ & & W & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

$a \in V$, $f(a) \in W$. Тада важи

$$f \text{ диф. у } a \;\wedge\; g \text{ диф. у } f(a) \Rightarrow g \circ f \text{ диф. у } a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a) \quad (*)$$

Ако је $f \in \mathcal{D}_1(V)$, $f(V) \subseteq W$, $g \in \mathcal{D}_2(W)$, онда је $g \circ f \in \mathcal{D}_2(V)$ и $(*)$ важи за све $a \in V$, тј:

$$D(g \circ f) = (Dg \circ f) \cdot Df.$$

Композиција линеарних пресликавања

Доказ: $f \not\infty a$, $g \not\infty f(a)$

$f \not\infty a \Rightarrow f \subset a \Rightarrow f(a+h) - f(a) \xrightarrow{h \to 0} 0.$

Кад $h \to 0$ важи:

$f \not\infty a \Rightarrow f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + o(h) = O(h)$

(јеф је $\|f'(a)h\| \leq \|f'(a)\| \cdot \|h\|$)

$\Rightarrow o(f(a+h) - f(a)) = o(O(h)) = o(h)$

$\Rightarrow g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = g(f(a+h)) - g(f(a)) =$

$= g'(f(a)) \cdot (f(a+h) - f(a)) + o(f(a+h) - f(a))$

$= g'(f(a))(f'(a) \cdot h + o(h)) + o(f(a+h) - f(a))$

$= g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h + \alpha(a, h)$, где је

$\alpha(a, h) = g'(f(a)) \cdot o(h) + o(f(a+h) - f(a))$

$g'(f(a)) \subset 0 \Rightarrow g'(f(a)) \cdot o(h) = o(h)$

$\Rightarrow g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) \cdot h + o(h)$

кад $h \to 0$

$\Rightarrow g \circ f \not\infty a \wedge (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ ▨

Теорема (извод инверзне функције):
Нека су X, Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен скуп, $a \in V$ и $f: V \to Y$ пресликавање са следећим својствима:

(1.) $f \otimes a$

(2.) $Df(a) \in \mathcal{L}(X;Y)$ је инвертибилно и $(Df(a))^{-1} \in \mathcal{L}(Y;X)$ (непрекидно је)

(3.) у неком отвореном W тачке $b := f(a)$ f има инверзно пресликавање $f^{-1}: W \to V$

(4.) $f^{-1} \subset b$

Тада је $f^{-1} \otimes b$ и важи

$$\boxed{(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}}$$

тј.:

$$\underline{Df^{-1} \circ f = (Df)^{-1}} \quad \text{или} \quad \underline{Df^{-1} = (Df)^{-1} \circ f^{-1}}$$

Напомена: (2) $\Rightarrow X \cong Y$, јер је $Df(a)$ алгебарски и тополошки изоморфизам, па не умањује општост ако се обо тврђење формулише за $X = Y$.

Доказ тврђења: $b = f(a)$, $a = f^{-1}(b)$

Транслације $\tau_a : X \to X$, $\tau_a(x) = a + x$

$\tau_b : Y \to Y$, $\tau_b(y) = b + y$

су хомеоморфизми, $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$

$$f(a+h) = f \circ \tau_a(h) = \tau_b(t) = b + t$$

$$\Rightarrow f^{-1}(b+t) = f^{-1} \circ \tau_b(t) = \tau_a(h) = a + h$$

h довољно мало $\Rightarrow \tau_a(h) \in V$, $\tau_b(t) = f \circ \tau_a(h) \in W$

$f \in a \Rightarrow t = f(a+h) - b = f(a+h) - f(a) \xrightarrow{h \to 0} 0$

$f^{-1} \in b \Rightarrow h = f^{-1}(b+t) - a = f^{-1}(b+t) - f^{-1}(b) \xrightarrow{t \to 0} 0$ (h)

$f \in a \Rightarrow t = f'(a) \cdot h + o(h)$, када $h \to 0$ (*)

$f'(a) \in \mathcal{L}(X;Y) \Rightarrow \|f'(a)\| < C$

(*) $\Rightarrow \|t\| \le C\|h\| + \|o(t)\| \Rightarrow t = O(h)$

(*) $\Rightarrow (f'(a))^{-1} t = h + (f'(a))^{-1} o(h)$, $h \to 0$

$= h + o(h)$, $h \to 0$

здоп $(f'(a))^{-1} \in \mathcal{L}(Y;X) \Rightarrow \|(f'(a))^{-1}\| < C$

$\Rightarrow \|(f'(a))^{-1} o(h)\| \le C\|o(h)\|$

$\Rightarrow (f'(a))^{-1} o(h) = O(o(h)) = o(h)$ над $h \to 0$

Даље: $\|(f'(a))^{-1} t\| = \|h + o(h)\| \ge \|h\| - \|o(h)\|$

$\|o(h)\|$ мање од $\|h\|$

$\Downarrow$

$\|(f'(a))^{-1} t\| \ge \frac{1}{2}\|h\|$ за h довољно мало

$\Rightarrow h = O(t) \Rightarrow o(h) = o(O(t)) = o(t)$

(h) $\Rightarrow f^{-1}(b+t) - f^{-1}(b) = h = (f'(a))^{-1} t + o(h) =$

$= (f'(a))^{-1} t + o(t)$

$\Rightarrow f^{-1}$ диф b и $(f^{-1})'(b) = (f'(a))^{-1}$ ▨

Примери: ① локално константно пресликавање

$X \supseteq V \xrightarrow{f} Y$, $(\forall a \in X)$ постоји околина $a \in U_a \subseteq V$ таква да је $f|_{U_a} \equiv C_{U_a} \in Y$.

Тада је $f'(x) = 0$ за све $x \in X$, јер је за h довољно мало да $x+h \in U_x$

$f(x+h) - f(x) - 0 \cdot h = C_{U_x} - C_{U_x} - 0 = 0 = o(h)$, $h \to 0$

② Ако је $f: X \to Y$ непрекидно линеарно пресликавање, онда је $(\forall x \in X)\ f'(x) = f$, јер је $f(x+h) - f(x) - f(h) = 0 = o(h)$ кад $h \to 0$.

Специјално, за $X = Y = \mathbb{R}$ свако линеарно пресликавање је облика $f(x) = ax$, а знамо да је тада $f'(x) = a$, тј. је матрица линеарног пресликавања $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h \longmapsto ah$.

③ $X \supseteq V \xrightarrow{f} Y$, $L \in \mathcal{L}(Y; Z)$.

Из ② и правила за извод композиције следи $(\forall x \in V)\ (L \circ f)'(x) = L \circ f'(x)$.

④ $V \subseteq X$, $a \in \mathring{V}$, $f: V \to Y_1 \times \dots \times Y_\ell$

$f = (f_1, \dots, f_\ell)$ диф. у $a \iff (\forall j \in \{1, \dots, \ell\})\ f_j$ диф. у a

f диф. у $a \Rightarrow f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_\ell'(a))$

(следи из одговарајућег својства лимеса)

⑤ $L \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_\ell; Y)$ једнозначно ℓ-линеарно пресликавање $L: X_1 \times \dots \times X_\ell \to Y$.

Тада је за свако $a = (a_1, \dots, a_\ell)$, $h = (h_1, \dots, h_\ell)$

$DL(a)h = L(h_1, a_2, \dots, a_\ell) + \dots + L(a_1, \dots, a_{\ell-1}, h_\ell)$.

$\ell = 2$: $L(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = L(a_1, a_2 + h_2) + L(h_1, a_2 + h_2)$

$= L(a_1, a_2) + L(a_1, h_2) + L(h_1, a_2) + L(h_1, h_2)$

$DL(a) \cdot h$ $\qquad$ $\leq \|h\|^2 \|L\|$

$= o(h),\ h \to 0$

(6) $V \subseteq X$, $a \in \mathring{V}$, $f : V \to Y_1 \times \dots \times Y_\ell$, $f \not\partial a$

$L \in \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_\ell; Z)$

Из (5) и правила за извод композиције следи

$$(L \circ f)'(a) = L(f_1'(a), f_2(a), \dots, f_\ell(a)) + \dots + L(f_1(a), \dots, f_{\ell-1}(a), f_\ell'(a))$$

(6.1) $f_1, \dots, f_\ell :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{C}$, $(\forall j)\, f_j \not\partial a$

$L : \mathbb{C}^\ell \to \mathbb{C}$, $L(z_1, \dots, z_\ell) = z_1 \cdot \ldots \cdot z_\ell$

$\Rightarrow$ Лајбницово правило из анализе 1

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_\ell)'(a) = f_1'(a) \cdot f_2(a) \cdot \ldots \cdot f_\ell(a) + \dots$$

(6.2) $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ унитарни простор

$V \subseteq X$, $a \in \mathring{V}$, $f_1, f_2 : V \to Y$, $f_1 \not\partial a$, $f_2 \not\partial a$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\Big|_{x=a} \langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \langle f_1'(a), f_2(a) \rangle + \langle f_1(a), f_2'(a) \rangle$$

(6.3) $f_1, f_2 : V \to \mathbb{R}^3$, $f_1 \not\partial a$, $f_2 \not\partial a$

$$\Rightarrow (f_1 \times f_2)'(a) = f_1'(a) \times f_2(a) + f_1(a) \times f_2'(a),$$

где је $\times$ векторски производ у $\mathbb{R}^3$.

(6.4) $f_1, f_2, f_3 : V \to \mathbb{R}^3$, $f_1 \diamond a$, $f_2 \diamond a$, $f_3 \diamond a$

$[\cdot;\cdot;\cdot] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ мешовити производ

$$\Rightarrow [f_1, f_2, f_3]'(a) = [f_1'(a), f_2(a), f_3(a)] +$$

$$+ [f_1(a), f_2'(a), f_3(a)] + [f_1(a), f_2(a), f_3'(a)]$$

(6.5) Правило диференцирања детерминанте:

$V \subseteq X$, $a \in \mathring{V}$, $f_1, \dots, f_\ell : V \to \mathbb{C}^\ell$, $(\forall j)\ f_j \diamond a$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\Big|_{x=a} \det(f_1(x), \dots, f_\ell(x)) = \dots \text{ (задатак)}$$

(7) $GL(X) := \{L \in \mathcal{L}(X;X) \mid \exists L^{-1} \in \mathcal{L}(X;X)\}$

је група у односу на сабирање пресликавања, назива се главном линеарном групом простора X. Посматрајмо пресликавање

$$f : GL(X) \to GL(X), \quad f(L) = L^{-1}.$$

Да бисмо имали смисла говорити о његовој диференцијабилности, дефинишемо следеће појмове.

Тврђење: Ако је простор X Банахов, онда је $GL(X)$ отворен у $\mathcal{L}(X;X)$.

Доказ: $A \in GL(X)$, $h \in \mathcal{L}(X;X)$

$(\exists r>0)\ \|h\|<r \Rightarrow A+h \in GL(X)$

$(\Rightarrow B]A;r[\subseteq GL(X) \Rightarrow GL(X)$ отворен)

$A+h \in GL(X) \Leftrightarrow \exists (A+h)^{-1} \Leftarrow \exists [A(\mathbb{1}+A^{-1}h)]^{-1}$

Бет простор, $A \in GL(X)$ $\Leftrightarrow \exists (\mathbb{1}+A^{-1}h)^{-1}A^{-1}$ $=: -Q$

$(\mathbb{1}-Q)^{-1}$ је збир „геометријског реда" $\sum_{n=0}^{\infty} Q^n$, ако овај ред конвергира. Доказ је исти као за редове у $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$:

множење у $GL(X)$ је непрекидно и дистрибутивно, па је

$(\mathbb{1}-Q)\cdot\sum_{n=0}^{\infty} Q^n = \sum_{n=0}^{\infty}(Q^n - Q^{n+1}) = Q^0 - Q^{\infty} = \mathbb{1}$

и слично $(\sum_{n=0}^{\infty} Q^n)\cdot(\mathbb{1}-Q) = \mathbb{1}$.

Ако је $\|Q\| < 1$, због $\|Q^n\| \leq \|Q\|^n$

ред $\sum_{n=0}^{\infty} Q^n$ апсолутно конвергира, јер

геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} \|Q\|^n$ у $\mathbb{R}$ конвергира.

Тако је X (а самим тим и $\mathcal{L}(X;X)$)

Банахов $\Rightarrow \sum Q^n$ конвергира.

У нашем случају је $Q = -A^{-1}h$

$\|Q\| < 1 \Leftrightarrow \|A^{-1}h\| < 1$

$\|A^{-1}h\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|h\|$

$\Rightarrow \left(\|h\| < \|A^{-1}\|^{-1} \Rightarrow A+h \in GL(X) \right)$ ▨

Последица: $Df(A)h = -A^{-1}hA^{-1}$

Доказ: $f(A+h) - f(A) = (A+h)^{-1} - A^{-1} =$

$= (\mathbb{1} + A^{-1}h)^{-1}A^{-1} - A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}h)^n A^{-1} - A^{-1} =$

$= (A^{-1} + A^{-1}hA^{-1} + (A^{-1}h)^2 A^{-1} + \dots) - A^{-1}$

$= A^{-1}hA^{-1} + o(h)$, кад $h \to 0$ ▨

Напомена: Претходно тврдење (које је непосредно уопштење формуле $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$) важи и у сваком Банаховом алгебром $\mathcal{A}$ а не само у $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X;X)$ (видети скрипту).

Задаци: ① Нека је X Банахов простор, а Y произвољан нормирани векторски простор.

(а) Доказати да је скуп инвертибилних елемената у $\mathcal{L}(X;Y)$, тј. скуп $\{L \in \mathcal{L}(X;Y) \mid \exists L^{-1} \in \mathcal{L}(X;Y)\}$ отворен.

(б) Доказати да је пресликавање $f(L) = L^{-1}$ на скупу из (а)

$$f'(A)h = -A^{-1}hA^{-1}.$$

② Нека је $L : \mathbb{R} \to GL(\mathbb{K}^l)$ глатка и нека је $\gamma(t) = L(t)^{-1}$. Наћи $\gamma''(t)$ (видети скрипту).

Напомена: Претходни задатак има смисла и у $GL(X)$ за произвољни Банахов простор X (и општије, у произвољној Банаховој алгебри $\mathcal{A}$). Овде смо га формулисали за $G(\mathbb{K}^l)$ зато што још увек нисмо дефинисали II извод у општем случају. Главна линеарна група $G(\mathbb{K}^l)$ је отворен подскуп у $\mathbb{K}^{l\times l}$, а пошто се диференцирање са кодоменом у Декартовом производу врши по координатама, појам γ'' може да се сматра уведеним помоћу извода скаларних функција. У решењу, међутим, не треба користити координате.

③ Наћи извод пресликавања

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (-y, x).$$

④ Линеарни оператор $L \in \mathcal{L}(X;X)$ је нилпотентан ако $(\exists k \in \mathbb{N})\ L^k = 0$. Доказати.

(а) $L \in \mathcal{L}(X;X)$ нилпотентан $\Rightarrow \mathbb{1} - L \in GL(X)$

(б) Оператор диференцирања $D: \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ на простору полинома $\mathbb{K}[x]$ је нилпотентан.

(в) $(\forall a \in \mathbb{R})\ \exists\ \exp(aD) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (aD)^n$.

(г) $\exp(aD)\,P(x) = P(x+a)$, тј.

$$\exp(aD)\,P = P \circ \tau_a$$

⑤ Нека је $A \in \mathcal{L}(X;X)$. Доказати да је са $f(t) := \exp(tA)$ добро дефинисан непрекидни хомоморфизам адитивне групе $(\mathbb{R}, +)$ у мултипликативну групу $(GL(X), \circ)$.

Дефиниција: Хомоморфизам $\mathbb{R} \to G$ адитивне групе $(\mathbb{R}, +)$ у групу G назива се једнопараметарском подгрупом групе G.

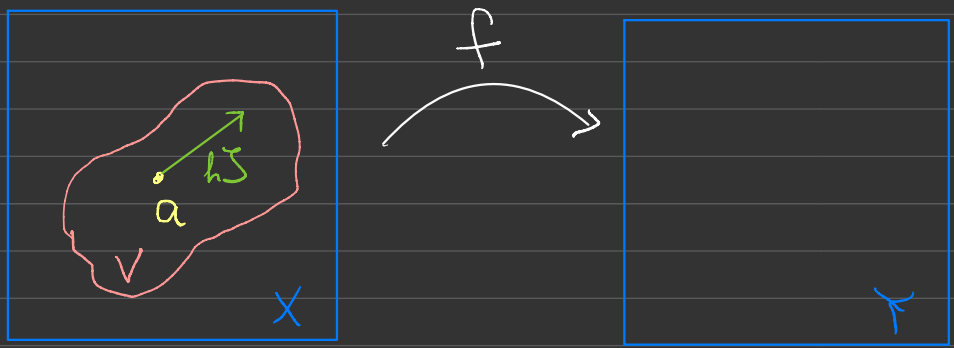
Парцијални изводи и изводи у правцу

X, Y нормирани векторски простори

$V \subseteq X$, $a \in \mathring{V}$, $f: V \to Y$.

Дефиниција: Нека је $\xi \in X$. Извод пресликавања f у правцу вектора ξ је

$$D_\xi f(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + \xi h) - f(a)}{h}$$



Другим речима:

$$D_\xi f(a) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+t\xi)$$

$$\mathbb{K} \ni t \longmapsto f(a+t\xi) \in Y$$

(рестрикција f на праву кроз a са нагибом ξ)

Тврђење: $f \mathcal{D} a \Rightarrow D_\xi f(a) = Df(a)\xi$

Доказ: лимес комутира са рестрикцијом $\blacksquare$

Напомена: Обрнуто не важи: из постојања извода у правцу произвољног вектора не следи постојање извода.

Задаци: ① Доказати да функција

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)=(0,0) \\ x^2y/(x^4+y^2), & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

има извод $D_\xi f(0,0)$ у правцу сваког вектора ξ, али да није диференцијабилна у $(0,0)$.

② Доказати да је функција

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3$

непрекидна и да има изводе у правцу свакој вектора у свакој тачки, али да није диференцијабилна у $(0,0)$.

Дефиниција: $X = X_1 \times X_2$, $V \subseteq X$, $a \in \overset{\circ}{V}$

Парцијални изводи пресликавања $f: V \to Y$ у тачки $a = (a_1, a_2)$ су

$D_1 f(a) = D(f \circ j_1^a)(a_1)$, $D_2 f(a) = D(f \circ j_2^a)(a_2)$

где је $j_1^a: X_1 \to X_1 \times X_2$, $j_1^a(x_1) := (x_1, a_2)$

$j_2^a: X_2 \to X_1 \times X_2$, $j_2^a(x_2) := (a_1, x_2)$

Напомена: $V \subseteq \mathbb{R}^l$, $f: V \to Y$, $a \in \overset{\circ}{V}$

$\Rightarrow D_j f(a) = D_{e_j} f(a)$, $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 на j-том месту)

Пример: $V \subseteq \mathbb{K}^\ell$ отворен, $f: V \to \mathbb{K}$, $a \in V$

$f \not\infty a \Rightarrow (\forall \xi \in \mathbb{K}^\ell)\, df(a)\xi = D_\xi f(a)$

$e_j := (\delta_{kj})_{1 \le k \le \ell}$, $1 \le j \le \ell$ стандардна база у $\mathbb{K}^\ell$

матрица линеарног пресликавања $df(a)$ у

тој бази је $(df(a)e_1, \dots, df(a)e_\ell)$

$df(a)e_j = D_{e_j} f(a) =: D_j f(a)$ парцијални извод

друге ознаке: $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, $\partial_j f(a)$, $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x=a} f$.

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\ell)$, $\pi_j \xi = \xi_j$, $\pi_j : \mathbb{K}^\ell \to \mathbb{K}$

$$df(a)\xi = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\xi_1 + \dots + \frac{\partial f_\ell}{\partial x_\ell}(a)\xi_\ell$$

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\pi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(a)\pi_\ell$$

пројекције $\pi_j : \mathbb{K}^\ell \to \mathbb{K}$, $\pi_j(x) = x_j$ су

линеарне $\Rightarrow \pi_j = d\pi_j = dx_j$

Диференцијал функције у координатама:

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_\ell} dx_\ell}$$

Специјално, за $\underline{\ell = 1}$, $df = f'dx$, тј:

$f' = \frac{df}{dx}$ – извод функције.

Дефиниција: $V \subseteq \mathbb{K}^\ell$, $f: V \to \mathbb{K}^r$, $a \in \mathring{V}$, $f \text{ на } a$

$f = (f_1, \dots, f_r)$, $f_k = \pi_k \circ f$, $1 \le k \le r$

$\Rightarrow f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_r'(a))$

$f_k: V \to \mathbb{K} \Rightarrow f_k'(a) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}(a)\right)$

$$\Rightarrow \boxed{(Df(a)) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le k \le r \\ 1 \le j \le \ell}}}$$

матрица извода (Јакобијева матрица) у координатама.

$\det(Df(a))$ се назива Јакобијаном пресликавања f у тачки a.

Пример: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ крива у $\mathbb{R}^3$

$f \circ \gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Реална функција реалне променљиве

$\gamma \in \mathbb{R}$ и $f \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow f \circ \gamma \in \mathbb{R}$

$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

(x, y, z) Декартове координате у $\mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\gamma'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

$(df) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$

Задатак: Доказати да су парцијални изводи функције $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ у поларним координатама

$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta + r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta.$

Теорема о коначном приращају:

Нека су X, Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен и $f : V \to Y$ непрекидно. Ако је

$$[a, a+h] := \{ a+th \mid 0 \le t \le 1 \} \subseteq U$$

и ако је пресликавање f диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a+h[:= \{ a+th \mid 0 < t < 1 \}$$

онда важи

$$\boxed{\|f(a+h) - f(a)\| \le \sup_{x \in]a, a+h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|}$$

$\|\cdot\|$ у X ↑ $\|\cdot\|$ у $\mathcal{L}(X;Y)$ ↑ $\|\cdot\|$ у Y

Доказ: Довољно је да докажемо да је

$$(*) \quad \|f(c_2) - f(c_1)\| \le \sup_{x \in [c_1, c_2]} \|f'(x)\| \cdot \|c_2 - c_1\|$$

за сваки сегмент $[c_1, c_2] \subseteq]a, a+h[$.

Заиста, пошто је $\sup$ $\uparrow$ у односу на $\subseteq$, десна страна у последњој неједнакости је мања (или једнака) од десне стране у неједнакости у исказу теореме, док је лева страна непромењена, па се тражена неједнакост добија из претходне неједнакости.

Ознаке: $\Delta f := f(c_2) - f(c_1)$, $\Delta x = c_2 - c_1$.

Претпоставимо да (*) не важи, тј:

$$\sup_{x \in [c_1, c_2]} \| f'(x) \| < \frac{\| \Delta f \|}{\| \Delta x \|} \quad (**)$$

Поделимо интервал $[c_1, c_2]$ на два и означимо са $\Delta' f$, $\Delta'' f$ и $\Delta' x$, $\Delta'' x$ приращаје f једног интервала на свакој од те две половине.

Очигледно важи:

$$\Delta f \le \Delta' f + \Delta'' f \,, \quad \Delta x = \Delta' x + \Delta'' x$$

Помоћна лема: Ако за $\alpha, \beta, \gamma, c, a, b \in \mathbb{R}_+$ важи $c \le a + b$, $\gamma = \alpha + \beta$, онда је

$$\frac{c}{\gamma} \le \max\left\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right\}$$

Доказ помоћне леме: тврђење очигледно важи за $c = \gamma = 1$, општи случај следи из хомотености све пријелазије у њему. $\blacksquare$

Из Помоћне леме следи:

$$\frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|} \le \max\left\{\frac{\|\Delta' f\|}{\|\Delta' x\|}, \frac{\|\Delta'' f\|}{\|\Delta'' x\|}\right\},$$

па на бар једном подинтервалу (нпр. $\Delta' x$) важи

$$\frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|} \le \frac{\|\Delta' f\|}{\|\Delta' x\|}.$$

Продужимо овај поступак. Добијамо низ I_n интервала који имају заједничку тачку c_∞.

$$(**) \Rightarrow (\exists \delta > 0)\ \|f'(c_\infty)\| + \varepsilon < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}. \leftarrow \text{A}$$

Применимо Помоћну лему још једном, на сваки од интервала I_n, подељен тачком c_∞: добијамо низ тачака $c_n \in I_n$ за који важи

$$\frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|} \leq \frac{\|f(c_n) - f(c_\infty)\|}{\|c_n - c_\infty\|}. \leftarrow \text{Б}$$

$f \mathcal{D} c_\infty \Rightarrow$

$$f(c_n) - f(c_\infty) = f'(c_\infty)(c_n - c_\infty) + o(c_n - c_\infty),\ c_n \to c_\infty$$

$\Rightarrow$ За довољно велико n:

$$\frac{\|f(c_n) - f(c_\infty)\|}{\|c_n - c_\infty\|} \leq \|f'(c_\infty)\| + \varepsilon$$

$$< \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|} \quad \text{због A.}$$

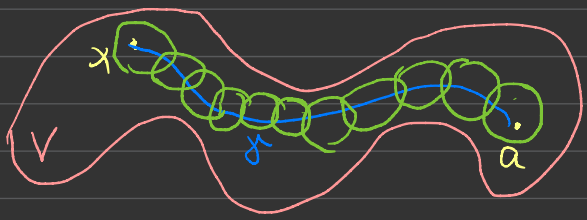
што је контрадикција са Б. $\blacksquare$

Последица 1: Ако је V отворен и повезан, $f: V \to \mathbb{R}$ диференцијабилно и $Df \equiv 0$, онда је $f = const$.

Доказ: V је путно повезан (видети следеће задатке)

$a \in V$ фиксирано

$\Rightarrow (\forall x \in V)$ постоји γ од a до x



γ непрекидан, може да се покрије коначним бројем лоптама садржаних у V, лопте су конвексне и на њима је $f \equiv const$ због Теореме о коначном прирасту $\Rightarrow (\forall x) f(x) = f(a)$ ▨

Задатак: Доказати да је отворен подскуп у нормираном векторском простору повезан ако и само ако је путно повезан. Упутство: доказати да је скуп тачака које могу да се повежу путем са фиксираном тачком $a \in V$ и отворен и затворен.

Последица 2: Ако је f као у Теореми о коначном прирасту и $L \in \mathcal{L}(X;Y)$, онда је

$$\|f(a+h)-f(a)-Lh\| \leq \sup_{x \in]a,a+h[} \|f'(x)-L\| \cdot \|h\|$$

Доказ: следи применом Теореме о коначном прирасту на

$F:[0,1] \to Y$, $F(t) = f(x+th)-Lh$. ▨

Хомогене функције и Ојлерова теорема

X, Y нормирани векторски простори над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Пресликавање $f: X \to Y$ је **хомогено** ако важи $(\forall x \in K)(\forall c \in \mathbb{K})\ f(cx) = cf(x)$.

Тврђење: f хомогено и $f \not\equiv 0 \Rightarrow f$ линеарно

Доказ: $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 f(x) = 0$; $h \in K \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{1}{h} f(hx) = \frac{1}{h}(f(hx) - f(0)) \quad / \lim_{h \to 0}$$

$$\Rightarrow f(x) = f'(0) \cdot x \Rightarrow f = f'(0) \in \mathcal{L}(X; Y) \quad \blacksquare$$

Дефиниција: Пресликавање $f: X \to Y$ је **хомогено степена** $k \geq 0$ ако је $(\forall x \in X)(\forall c \in \mathbb{K})\ f(cx) = c^k f(x)$.

Пример: (хомогени полиноми):

$p(x, y, z) = x^2 y + xyz + z^3$ хомоген степена 3.

Ојлерова теорема: Нека је X отворен векторски подскуп над пољем $\mathbb{R}$. Диференцијабилна функција $f: X \to \mathbb{R}$ је хомогена степена $k > 0$ ако и само ако је $\boxed{df(x) \cdot x = k f(x)}$.

Доказ: За $x \in X$ дефинишимо функцију

$\psi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$.

$(\Rightarrow)$ f хомогена степена $k \Rightarrow \psi \equiv 0$

$\Rightarrow \psi'(t) \equiv 0 \Rightarrow df(tx) \cdot x - k t^{k-1} f(x) \equiv 0$

$(t = 1) \Rightarrow df(x) \cdot x = k f(x)$

$(\Leftarrow)$ $df(x) \cdot x = k f(x)$

$\psi'(t) = df(tx) \cdot x - k t^{k-1} f(x)$

$= \frac{1}{t} (df(tx) \cdot (tx) - k t^k f(x)) = \frac{k}{t} \psi(t)$

$\Rightarrow (t^{-k} \psi(t))' = 0 \Rightarrow \psi(t) \equiv \psi(1) = 0$ ▨

Непрекидно диференцијабилна пресликавања

X, Y нормирани векторски простори $V \subseteq X$ отворен

$f: V \to Y$, $f \in \mathcal{D}_Y(V)$.

$$Df: V \to \mathcal{L}(X;Y)$$

$\mathcal{L}(X;Y)$ је такође нормиран векторски прост.

Дефиниција: Пресликавање $f: V \to Y$ назива се непрекидно диференцијабилним ако је:

(1) $f \in \mathcal{D}V$ ($f: V \to Y$ диференцијабилно)

(2) $Df \in CV$ ($Df: V \to \mathcal{L}(X;Y)$ непрекидно).

Скуп свих непрекидно диференцијабилних пресликавања $f: V \to Y$ означавамо са $C^1(V;Y)$, $C^1_Y(V)$, $C^1(V)$.

$$f \in C^1_Y(V) \iff f \in \mathcal{D}_Y(V) \wedge Df \in C(V, \mathcal{L}(X;Y))$$

$$C^1_r(V) \subseteq \mathcal{O}_r(V) \subseteq C_r(V)$$

векторска поткласа

Задаци: ① Доказати да је функција $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, дефинисана са

$$f(x,y) := \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y}, & xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, y = 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y}, & x = 0, y \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

диференцијабилна, али није непрекидно диференцијабилна у тачки $(0,0)$.

② Доказати да функција $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & (x,y) = (0,0) \\ xy(x^2+y^2)^{-1/2}, & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

непрекидна и има ограничене парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, али није диференцијабилна у $(0,0)$.

Trditev: Naj je $X = X_1 \times \dots \times X_\ell$, $V \subset X$ odprta in $f \in \mathcal{D}_r(V)$. Tedaj je

$$f \in C^1_r(x) \Leftrightarrow (\forall j \in \{1, \dots, \ell\})\ D_j f \in C_r(V).$$

Dokaz: Za $a \in V$, $h = (h_1, \dots, h_\ell) \in X$ velja

$$Df(a)h = D_1 f(a) h_1 + \dots + D_\ell f_\ell(a) \cdot h_\ell, \text{ torej je}$$

$$(Df(x) - Df(a)) \cdot h = \sum_{j=1}^{\ell} (D_j f(x) - D_j f(a)) h_j.$$

$$\Rightarrow \|Df(x) - Df(a)\| \leq \sum_{j=1}^{\ell} \|D_j f(x) - Df(a)\| \quad (*)$$

Za drugi smer

$$(D_j f(x) - D_j f(a)) h = D_{h_j} f(x) - D_{h_j} f(a) = (Df(x) - Df(a)) h_j$$

(zato ker $f \in \mathcal{D}_a \Rightarrow D_\zeta f(a) = Df(a)\zeta$)

torej je $\|D_j f(x) - D_j f(a)\| \leq \|Df(x) - Df(a)\|$ $(**)$

(ker je $\|L\| = \mathrm{lip}(L)$, $\mathrm{lip}(L|_{\pi_j X}) \leq \mathrm{lip}(L)$).

$(*)$ in $(**)$ $\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to a} Df(a) \Leftrightarrow (\forall j)\ D_j f(x) \xrightarrow{x \to a} D_j f(a)$

$\Rightarrow Df \in C_a \Leftrightarrow (\forall j)\ D_j f \in C_a$ ∎

Теорема: Нека су $X = X_1 \times \dots \times X_\ell$ и Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ и $a \in \mathring{V}$. Ако пресликавање $f : V \to Y$ има све парцијалне изводе $D_j f$, $1 \le j \le \ell$, и ако су они непрекидни у тачки a, онда је пресликавање f диференцијабилно у a.

Другим речима:

$$(\forall j)(\forall x)\ \exists D_j f(x) \wedge D_j f \text{ C} a \implies f \mathcal{D} a$$

Доказ: Претпоставићемо да је $X = X_1 \times X_2$, случај $\ell > 2$ се доказује на исти начин, или, тачније $X_1 \times \dots \times X_\ell = X_1 \times (X_2 \times \dots \times X_\ell)$ скоро индукцијом по случаја $\ell = 2$.

Нека је $Lh = D_1 f(a) h_1 + D_2 f(a) h_2$.

Доказаћемо да је $L = Df(a)$.

$$f(a+h) - f(a) - Lh = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) - D_1 f(a) h_1 - D_2 f(a) h_2$$

$$= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) - D_1 f(a) h_1 + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) - D_2 f(a) h_2 .$$

Ако на прва 3 сабирка применимо Последицу 2 Теореме о коначном прирасту за $L = D_1 f(a)$, а на друга 3 за $L = D_2 f(a)$, добијамо:

$$\|f(a+h) - f(a) - L \cdot h\| \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq t_1 \leq 1} \|D_1 f(a_1 + t_1 h_1, a_2 + h_2) - D_1 f(a_1, a_2)\| \cdot \|h_1\| +$$

$$+ \sup_{0 \leq t_2 \leq 1} \|D_2 f(a_1, a_2 + t_2 h_2) - D_2 f(a_1, a_2)\| \cdot \|h_2\|$$

Пошто је $\|h_1\| \leq \|h\|$, $\|h_2\| \leq \|h\|$, и пошто су парцијални изводи $D_1 f$ и $D_2 f$ непрекидни у тачки a, следи да је последњи израз $= o(h)$ кад $h \to 0$ ▨

Последица: Пресликавање $f: V \to Y$ дефинисано на отвореном скупу $V \subseteq X_1 \times \dots \times X_l$ је непрекидно диференцијабилно онда и само онда су му сви парцијални изводи $D_j f$, $1 \le j \le l$, непрекидни.

Задаци: ① Нека је $V \subseteq X$ отворен, $a \in V$ и $f \in \mathcal{D}_{V \setminus \{a\}}$. Доказати:

$$\left(\exists \lim_{x \to a} Df(x) =: L\right) \Rightarrow f \in \mathcal{D}_a \wedge Df(a) = L$$

② Нека је $V \subseteq X$ отворен, $K \subseteq V$ компактан конвексан подскуп и $f \in C^1(V; Y)$. Доказати да је $f|_K : K \to Y$ Липшицово.

③ $f \in C_Y[0,1] \cap \mathcal{D}_Y]0,1[$, $g \in C_{\mathbb{R}}[0,1] \cap \mathcal{D}_{\mathbb{R}}]0,1[$ и $(\forall t \in]0,1[)\ \|f'(t)\| \le g'(t)$. Доказати да је $\|f(1) - f(0)\| \le |g(1) - g(0)|$. Упутство: сећити, Глава 1.

Изводи вишег реда

X, Y нормирани векторски простори

$V \subseteq X$ отворен, $f: V \to Y$, $f \in \mathcal{D}V$

$\Rightarrow Df: V \to \mathcal{L}(X; Y)$

$\mathcal{L}(X; Y)$ је нормирани векторски простор

$\Rightarrow$ има смисла говорити о диференцијабилности пресликавања Df. Ако је оно диференцијабилно, његов извод је пресликавање

$$D(Df): V \to \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X, Y))$$

Називамо га **другим изводом** пресликавања f и означавамо са $D^2 f$, f'', $f^{(2)}$, $\frac{d^2}{dx^2} f$:

$$\boxed{D^2 V: V \to \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))}$$

Напомена: $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)) \cong \mathcal{L}(X, X; Y)$

- $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$: линеарна пресликавања $X \to \mathcal{L}(X; Y)$
- $\cong$: линеарна изометрија
- $\mathcal{L}(X, X; Y)$: билинеарна пресликавања $X \times X \to Y$

Доказ: $L \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X,Y)) \Rightarrow L : X \to \mathcal{L}(X;Y)$

Дефинишимо

$$\tilde{L} : X \times X \to Y, \qquad \tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

$\tilde{L}$ је билинеарно: линеарност по првој променљивој следи из линеарности L, а по другој из линеарности $L(\eta)$ за свако η.

$\varphi : \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X;Y)) \to \mathcal{L}(X,X;Y)$, $\varphi(L) = \tilde{L}$ је линеарна изометрија (задатак!) ▨

Последица: Ако пресликавање $f : V \to Y$ може да се схвати као пресликавање

$$\boxed{D^2 f : V \to \mathcal{L}(X,X;Y)}$$

Индуктивно се дефинише n-ти извод:

$$D^n f := D(D^{n-1} f) : V \to \mathcal{L}(X,\dots,X;Y)$$

простор n-линеарних пресликавања

Друге ознаке: $f^{(n)}$, $\frac{d^n}{dx^n} f$.

Ознаке: $f \mathcal{D}^n a \Leftrightarrow \exists D^n f(a)$

$$f \mathcal{D}^n V \Leftrightarrow (\forall x \in V)\ f \mathcal{D}^n x$$

$$\mathcal{D}^n_Y(V) := \{ f : V \to Y \mid f \mathcal{D}^n V \}$$

Изводи вишег реда и извод у правцу

Подсетање: $f : V \to Y$, $a \in V$, $h \in X$

$$D_\xi f(a) := \lim_{\mathbb{K} \ni h \to 0} \frac{f(a+h\xi) - f(a)}{h} \in Y$$

(1) За $c \in \mathbb{K}$: смена $t = ch$

$$\Rightarrow \quad D_{c\xi} f(a) = c D_\xi f(a)$$

(2) $L \in \mathcal{L}(Y; Z) \Rightarrow L$ комутира са векторским операцијама и са $\lim_{h \to 0}$

$$\Rightarrow \quad D_\xi (L \circ f)(a) = L \circ D_\xi f(a)$$

(3) $f \mathcal{D} a \Rightarrow D_\xi f(a) = Df(a)\xi$

јер су обе стране извод рестрикције f на праву $\{a + t\xi \mid t \in \mathbb{K}\}$.

Neka je $f \in \mathcal{D}^2 a$. Tada je $D^2 f(a) \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X;Y))$.

$$\xi \in X \Rightarrow D^2 f(a)\xi \in \mathcal{L}(X;Y)$$

$$\eta \in X \Rightarrow (D^2 f(a)\xi)\eta \in Y$$

$D^2 f(a)\xi := D(Df)(a)\xi = D_\xi (Df)(a)$ (zbog (3))

$Df : V \to \mathcal{L}(X;Y) \Rightarrow D_\xi (Df)(a) \in \mathcal{L}(X;Y)$

$\Rightarrow D^2 f(a)(\xi,\eta) = (D_\xi (Df)(a))\eta$ (*)

Promatramo kompoziciju

$$V \xrightarrow{Df} \mathcal{L}(X;Y) \xrightarrow{L} Y$$

gdje je $L(A) := A\eta$.

(3) $\Rightarrow L \circ Df = D_\eta f$

(2) $\Rightarrow D_\xi (L \circ Df)(a) = L \circ D_\xi (Df)(a)$

$\Rightarrow D_\xi (D_\eta f)(a) = D_\xi (Df)(a)\eta$

(*) $\Rightarrow$ $\boxed{D^2 f(a)(\xi,\eta) = D_\xi D_\eta f(a)}$

Индукцијом: Ако је $f \in \mathcal{D}^n a$ онда је

$$\boxed{D^n f(a)(\xi_1, \dots, \xi_n) = D_{\xi_1} \cdots D_{\xi_n} f(a)}$$

Тврдња: $f \in \mathcal{D}^n a \Rightarrow D^n f(a)$ је симетрично n-линеарно пресликавање. Општије тврдња:

$$D^n f(a)(\xi_1, \dots, \xi_n) = D^n f(a)(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(n)})$$

за сваку пермутацију $\sigma : 1, \dots, n \to 1, \dots, n$.

Доказ: Друга пермутација је транспозиција $\Rightarrow$ довољно је доказати тврдње за $n = 2$.

За $\xi, \eta \in X$ дефинишемо функцију од $t \in K$:

$$F_{\xi,\eta}(t) := f(a + t(\xi+\eta)) - f(a+t\xi) - f(a+t\eta) - f(a).$$

Доказаћемо да је

$$D^2 f(a)(\xi, \eta) = \lim_{t \to 0} \frac{F_{\xi,\eta}(t)}{t^2}. \quad (*)$$

Тада је $F_{\xi,\eta}(t) = F_{\eta,\xi}(t)$, одакле следи тврдње.

Нека је $\varphi(h) = f(a+t(\xi+h\eta)) - f(a+th\eta)$.

Тада је $F_{\xi,\eta}(t) = \varphi(1) - \varphi(0)$.

Последица 2 Тејлорове о коначном приращају примењена на φ и $L = t^2 D^2 f(a)\xi \in \mathcal{L}(X;Y)$

$$\Rightarrow \|F_{\xi,\eta}(t) - t^2 D^2 f(a)(\xi,\eta)\| =$$

$$= \|\varphi(1) - \varphi(0) - t^2 D^2 f(a)(\xi)\eta\|$$

$$\leq \sup_{0\leq s\leq 1} \|D\varphi(s\eta) - t^2 D^2 f(a)\xi\| \cdot \|\eta\|$$

$$= \sup_{0\leq s\leq 1} \|Df(a+t(\xi+s\eta)) - Df(a+s\eta) - t^2 D^2 f(a)\cdot\xi\| \cdot \|\eta\|$$

Применом дефиниције тј. израза за Df добијамо:

$$Df(a+t(\xi+s\eta)) = Df(a) + D^2 f(a)(t(\xi+s\eta)) + o(t),$$

$$Df(a+s\eta) = Df(a) + D^2 f(a)(s\eta) + o(t), \text{ кад } t \to 0$$

Одузимањем се добија једнакост и применом линеарности $D^2 f(a)$ добијамо, после сређивања

$F_{\xi,\eta}(t) - t^2 D^2 f(a)(\xi,\eta) = o(t^2)$ одакле следи ✳ ▨

Последица: $f \in \mathcal{D}^2 a \Rightarrow (\forall \xi, \eta)\ D_\xi D_\eta f(a) = D_\eta D_\xi f(a)$

Доказ: Следи из $f \in \mathcal{D}^2 a \Rightarrow D_\xi D_\eta f(a) = D^2 f(\xi, \eta)$. ▨

Задаци: ① Нека је $f: V \to Y$ двапут диференцијабилно дефинисано на отвореном скупу $V \subseteq X$ и нека за неке $\xi, \eta \in X$ постоје извод у односу $D_\xi D_\eta f(x)$ и $D_\eta D_\xi f(x)$ за сваке $x \in V$. Доказати:

$$D_\xi D_\eta f\,Ca \wedge D_\eta D_\xi f\,Ca \Rightarrow D_\xi D_\eta f(a) = D_\eta D_\xi f(a).$$

② Уопштити претходну последицу и претходни задатак на изводе реда $n > 2$.

③ Нека је $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ стандардна база у $\mathbb{R}^2$. Увешемо ознаке:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} := D_{e_1} D_{e_1}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} := D_{e_1} D_{e_2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} := D_{e_2} D_{e_1}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = D_{e_2} D_{e_2}.$$

Хесијан функције $f: V \to \mathbb{C}$ у тачки $a \in V$ у којој постоје све парцијалне изводе другог реда је матрица

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Доказати:

$$f \in \mathcal{D}^2 a \Rightarrow D^2 f(a)(h,h) = h \cdot H_f(a) \cdot h^T$$

за $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$.

④ Урадити задатак ③ за функцију $f \in \mathcal{D}^2_{\mathbb{K}}(V)$ за $V \subseteq \mathbb{K}^2$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

⑤ (а) Доказати да не постоји функција $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таква да је

$$df(x,y) = (x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy$$

(5) Да ли постоји функција $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таква да је $df(x,y) = (x^2+y^2)dx + 2xy\,dy$?

(6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-1}$ за $(x,y) \neq (0,0)$ и $f(0,0) = 0$. Доказати да су функције $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрекидне на $\mathbb{R}^2$ и да је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Да ли је ово у противречности са претходном Последицом?

(7) Доказати да функција

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

има у свакој тачки све парцијалне изводе произвољног реда, који не зависе од поретка диференцирања, али да је f прекидна у $(0,0)$.

⑧ Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^2$ отворен и повезан скуп и $f: V \to \mathbb{R}$ диференцијабилна функција, таква да је $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$. Да ли одатле следи да f не зависи од y? (Одговор: НЕ)

⑨ Нека је $f \in \mathcal{C}^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ хомотена функција. Доказати да је њен Хесијан $H_f(x)$ сингуларна матрица у свакој тачки $x \in \mathbb{R}^2$.

⑩ Нека су $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ два дисјунктна отворена скупа. Доказати да постоји функција $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ таква да је:
(1) $(\forall n \in \mathbb{N})\ f \in \mathcal{C}^n \mathbb{R}^2$ (2) $f|_U \equiv 0$ (3) $f|_V \equiv 1$.
Упутство: сетити се функције $\exp(-\frac{1}{x})$ из Задатка 1 (или бисте сетили из Задатка 2).

Дефиниција: Пресликавање $f: V \to Y$ је класе C^n, или n пута непрекидно диференцијабилно, ако је

$$f \in \mathcal{D}^n_Y(V) \wedge D^n f \in C_Y(V).$$

Ознаке: fC^nV, $f \in C^n(V)$, итд:

$$C^n_Y(V) := \{ f: V \to Y \mid f \in \mathcal{D}^n_Y(V) \wedge D^n f \in C_Y(V) \}.$$

Пресликавање $f: V \to Y$ је класе C^∞ ако је $(\forall n \in \mathbb{N})\, f \in C^n_Y(V)$.

$$C^\infty_Y(V) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n_Y(V)$$

$$C_Y(V) \subsetneq \mathcal{D}^1_Y(V) \subsetneq C^1_Y(V) \subsetneq C^\infty_Y(V)$$

све инклузије су строге

Задатак: Дати пример пресликавања $f \in \mathcal{D}^1(V) \setminus C^1(V)$.

Тејлорова формула

Лема: Нека је $L: X \times \dots \times X \to Y$ симетрично n-линеарно пресликавање и

$$F: X \to Y, \quad F(x) = L(x, \dots, x)$$

Тада је $DF(x)h = n\,L(x, \dots, x, h)$.

Ознаке: $L(x, \dots, x) =: Lx^n$

$$L(x, \dots, x, h) =: (Lx^{n-1})h$$

$$\Rightarrow \boxed{(Lx^n)' = nLx^{n-1}}$$

Доказ: За свако n-линеарно пресликавање је $DL(a)\xi = L(\xi_1, a_2, \dots, a_n) + \dots + L(a_1, \dots a_{n-1}, \xi_n)$.

Ако је $a = (x, \dots, x)$, $\xi = (h, \dots, h)$, онда је

$$DL(a)\xi = L(h, x, \dots, x) + \dots + L(x, \dots, x, h)$$

L симетрично $\Rightarrow$ сви сабирци су једнаки

$$\Rightarrow DL(a)\xi = n(Lx^{n-1})h$$



Теорема: Нека су X, Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен, $a \in V$, $f \in \mathcal{D}^{n-1} V$ и $f \in \mathcal{D}^n a$. Тада је

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot h^n + o(\|h\|^n)$$

када $h \to 0$.

Напомена: $f^{(j)}(a) \cdot h^j$ је дефинисано у лему.

Доказ: Индукцијом по n:

$n = 1$: Теорема о коначном прирасту

$(n-1) \to n$: Из последице 2 Теореме о коначном прирасту, претходне леме и индуктивне хипотезе следи:

$$\|f(a+h) - \left(f(a) + f'(a) \cdot h + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot h^n\right)\| \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq \vartheta \leq 1} \|f'(a+\vartheta h) - \left(f'(a) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a+\vartheta h)(\vartheta h)^{n-1}\right)\| \cdot \|h\|$$

$$= o(\|h\|^{n-1}) \cdot \|h\| = o(\|h\|^n), \text{ када } h \to 0$$

∎

Последица: Нека је $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $V \subseteq K^\ell$ отворен, $a = (a_1, \dots, a_\ell) \in V$, $f \in C_K^n(V)$. Тада је

$$f(a_1+h_1, \dots, a_\ell+h_\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{\ell} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k f(a) + r_n(a;h)$$

где је $r_n(a;h) = o(\|h\|^{n-1})$ кад $h \to 0$.

Напомена: $\left(\sum_{j=1}^{\ell} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) f(a) := \sum_{j=1}^{\ell} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a) \cdot h$

индуктивно: $\left(\sum_{j=1}^{\ell} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k f := \left(\sum_{j=1}^{\ell} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{k-1} df(a) \cdot h$

Оправдано је и формално сређивање, нпр:

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 = h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} + h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Задатак: Нека је у претходној Последици $K = \mathbb{R}$. Доказати:

(а) $r_n(a;h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\sum_{j=1}^{\ell} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n f(a+th)\, dt$

(б) $(\exists \theta \in]0,1[)\ r_n(a;h) = \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=1}^{\ell} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n f(a+\theta h)$.

Напомена (о пољу скалара): До сада смо све радили са нормираним векторским просторима над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. У случају $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ постоје две врсте диференцијабилности: реална и комплексна. У случају реалне, у дефиницији извода захтевамо да $Df(a)$ буде пресликавање које је линеарно над $\mathbb{R}$, док у случају комплексне захтевамо и линеарност над $\mathbb{C}$.

Свако комплексно диференцијабилно пресликавање је и реално диференцијабилно, али не и обрнуто: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ је диференцијабилно над $\mathbb{R}$, а није над $\mathbb{C}$.

Унутрашње тачке екстремума

X нормирани векторски простор над $\mathbb{R}$

$V \subseteq X$ отворен, $a \in V$, $f : V \to \mathbb{R}$, $f \mathcal{D}^n a$.

$Df(a) = 0, \ldots, D^{n-1}f(a) = 0, D^n f(a) \neq 0.$

Тврђење: Да би a била тачка локалног екстремума функције f:

- неопходно је да је n паран број а $D^n f(a)$ семидефинитна форма (*) (дефиниција на следећој страни)
- довољно је да су вредности $D^n f(a) \cdot h^n$ на јединичној сфери $\|h\| = 1$ одвојене од нуле, при чему, ако $(\exists \delta)(\forall h \in S[0;1])$

$D^n f(a) \cdot h^n \geq \delta > 0 \Rightarrow a$ је локални минимум

а ако $(\exists \delta)(\forall h \in S[0;1])$

$D^n f(a)\, h^n \leq \delta < 0 \Rightarrow a$ је локални максимум.

(*) **Напомена:** n-линеарна форма L је **позитивно семидефинитна** ако је $(\forall h)\ Lh^n \geq 0$, а **негативно семидефинитна** ако је $(\forall h)\ Lh^n \leq 0$.

Доказ: $D^j f(a) = 0$ за $1 \leq j < n \Rightarrow$ Тејлорова формула гласи:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{n!} D^n f(a) \cdot h^n + o(\|h\|^n), \quad h \to 0.$$

$\Rightarrow$ За свако $h_0 \in X$ и довољно мало $t \in \mathbb{R}$:

$$f(a+th_0) - f(a) = \left(\frac{1}{n!} D^n f(a) \cdot h_0^n + \alpha(th_0)\|h_0\|\right) t^n,$$

где $\alpha(th_0) \to 0$ кад $t \to 0$ (дефинција $o(\|h\|^n)$)

$\Rightarrow$ За довољно мало t $f(a+th_0) - f(a)$ је истог знака као $D^n f(a) \cdot h_0^n$

а локални екстреми $\Rightarrow$ тај знак је исти за све $h_0 \Leftrightarrow$ и тачно и $D^n f(a)$ семидефинитна.

Time je dokazan dovoljan uslov.

Za dokaz neophodnog uslova pretpostavimo da je $D^n f(a) \cdot h^n \geq \delta > 0$ za sve h na jedinicnoj sferi $S[0;1] := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$.

Tada je, za neko α, takvo da $\alpha(h) \to 0$ kad $h \to 0$:

$$f(a+h) - f(h) = \frac{1}{n!} D^n f(a) \cdot h^n + \alpha(h) \cdot \|h\|^n$$

$$= \left(\frac{1}{n!} D^n f(a) \left(\frac{h}{\|h\|} \right)^n + \alpha(h) \right) \|h\|^n$$

$$\geq \left(\frac{\delta}{n!} + \alpha(h) \right) \|h\|^n.$$

Posto $\alpha(h) \to 0$ kad $h \to 0$, za dovoljno malo h je $f(a+h) - f(h) > 0$

$\Rightarrow a$ je tacka lokalnog minimuma.

Dovoljan uslov za lokalni maksimum sledi iz (dokazanog) dovoljnog uslova za lokalni minimum za funkciju $-f$. ▨

Напомене: (1) Ако је $\dim X < \infty$, јединична сфера је компактан скуп, па непрекидна функција $h \mapsto D^n f(a) \cdot h^n$ на њему достиже минимум и максимум. Ако су они различитог знака, због повезаности сфере $D^n f(a) \cdot h_0^n = 0$ за неко h_0, па је a тачка локалног екстремума. Ако је минимум строго позитиван (−), ако је форма $D^n f(a)$ позитивно дефинитна) онда је a тачка минимума, а ако је форма $D^n f(a)$ негативно дефинитна, онда је a тачка максимума. Ово су једноставнији критеријуми од оних у теореми, који важе и у случају $\dim X = \infty$.

② У случају $X = \mathbb{R}$ (реалне функције једне реалне променљиве), ако је $f^{(j)}(a) = 0$ за $1 \leq j < n$ и $f^{(n)}(a) \neq 0$, онда је a критична тачка функције f истог типа (минимум, максимум или превојна тачка) коју је 0 критична тачка функције $g(x) = f^{(n)}(a) \cdot x^n$. Другим речима, $f^{(n)}(a)$ даје тражени одговор о типу критичне тачке. У случају $\dim X > 1$ то није случај, јер $D^n f(a)$ може да буде недефинитна форма, иако је $D^n f(a) \neq 0$.

③ Зато и ако је $D^n f(a)$ семидефинитна форма, а не мора да буде тачка локалног екстремума – видети следећи пример.

Пример: ① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

$$df(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) \in \{(-1,0), (0,0), (1,0)\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D^2 f(-1,0)h^2 = 8h_1^2 \\ D^2 f(0,0)h^2 = -4h_1^2 \\ D^2 f(1,0)h^2 = 8h_1^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ све три форме су семидефинитне.

$$f(x,y) = (x^2-1)^2 + y^4 - 1$$

$\Rightarrow (-1,0)$ и $(1,0)$ су тачке локалног минимума.

$f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ за x близу 0

$f(0,y) = y^4 > 0$ за $y \neq 0$

$\Rightarrow (0,0)$ није тачка локалног екстремума.

② $X = C^1([a,b],0,0) \subseteq C^1(]a,b[) \cap C([a,b])$

простор непрекидних функција $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ класе C^1 на $]a,b[$ таквих да је $f(a) = f(b) = 0$,

$L \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

$S: X \to \mathbb{R}$, $S(f) := \int_a^b L(t, f(t), f'(t))\, dt$

S је композиција

$$X \xrightarrow{\Psi} C[a,b] \xrightarrow{\int_a^b} \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto L(\cdot, f(\cdot), f'(\cdot)) \longmapsto \int_a^b L(\cdot, f(\cdot), f'(\cdot))$$

$$\left.\begin{array}{l} L \in C^1 \mathbb{R}^3 \Rightarrow \Psi \in \mathcal{O}(X) \\ \int_a^b \in \mathcal{L}(X; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{O}(X) \end{array}\right\} \Rightarrow S \in \mathcal{O}(X)$$

$$dS(f)h = d\left(\int_a^b \circ \Psi\right)(f)h = \int_a^b d\Psi(f)h =$$

$$= \int_a^b \left(D_2 L(t, f(t), f'(t))\, h(t) + D_3 L(t, f(t), f'(t)) h'(t)\right) dt$$

Применимо парцијалну интеграцију на други сабирак, имајући у виду да је $h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow$

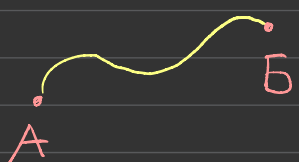
$$dS(f)h = \int_a^b \left(D_2L(t,f,f') - \frac{d}{dt}D_3L(t,f,f')\right)\cdot h\,dt$$

$$dS(f) = 0 \iff (\forall h)\ dS(f)h = 0$$

$$\iff \boxed{D_2L(t,f(t),f'(t)) = \frac{d}{dt}D_3L(t,f(t),f'(t))}$$

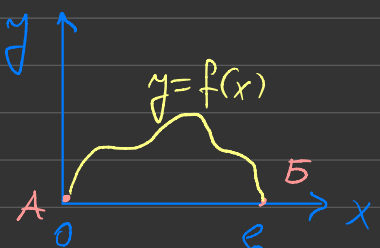
Ојлер-Лагранжеве једначине

③ Права као најкраћи пут



шта је најкраћи пут од А до Б?

Поставимо координатни систем тако да је $A=(0,0)$, $B=(b,0)$:



Дужина криве $y=f(x)$:

$$l(f) = \int_0^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Треба да минимизујемо $f \longmapsto l(f)$.

Овде је $L(x, f, f') = \sqrt{1+(f'(x))^2}$

Ојлеф - Лагранжева једначина

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(D_3 L) = D_2 L$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \Big/ \sqrt{1+(f'(x))^2} \equiv \text{Const}$$

$s \longmapsto s/\sqrt{1+s^2}$ није константна ни на једном интервалу $\Rightarrow f' \equiv C_0$

$\Rightarrow (f(x) - C_0 x)' = 0 \Rightarrow \underline{f(x) = C_0 x + C_1}$.

Напомена: Ако су X и Y нормирани векторски простори, онда је

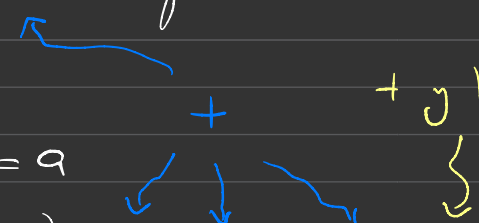
$f(a+h) = f(a) + Df(a)h + o(h), \quad h \to 0$

$\Updownarrow$ ← смена $x - a = h$

$f(x) - f(a) = Df(a)(x-a) + o(x-a), \quad x \to a$ (*)

Међутим, $(*)$ има смисла и у нормираном афином простору.

Подсетимо: Афини простор је структура $(A, X, +)$ где је A скуп, X векторски простор и $+: A \times X \to A$ задовољава следеће аксиоме



(A1) $(\forall a \in A)\ a + 0 = a$

(A2) $(\forall a \in A)(\forall x_1, x_2 \in X)\ (a + x_1) + x_2 = a + (x_1 + x_2)$

(A3) $(\forall a_1, a_2 \in A)(\exists \text{ јединствено } x \in X)\ a_2 = a_1 + x$

Ознака: $X \ni x := a_2 - a_1 \iff a_2 = a_1 + x$

Ако је на X задата норма $\|\cdot\|$, структуру $(A, X, +, \|\cdot\|)$ зовемо нормирани афини простор.

Тада је са $d(a_1, a_2) := \|a_2 - a_1\|$ дефинисана метрика на A.

Ако су $(A, X, +, \|\cdot\|)$, $(B, Y, +, \|\cdot\|)$ нормирани векторски простори, $V \subseteq A$, $a \in \overset{\circ}{V}$, $f: V \to B$, онда је са (*) дефинисан први извод пресликавања f у тачки a,

$$Df(a) \in \mathcal{L}(X; Y)$$

④ Уопштење Примера ②:

$A := C^1([a,b], \alpha, \beta) \subseteq C[a,b] \cap C^1]a,b[$

скуп непрекидних пресликавања $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ таквих да је $f \in C^1]a,b[$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$.

Задатак: Нека је X као у Примеру ②

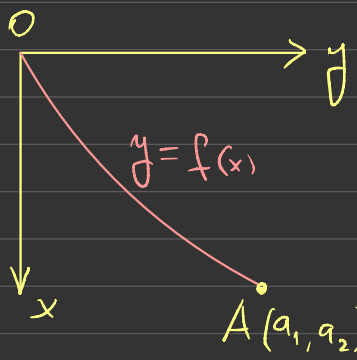
(а) Доказати да је $(A, X, +, \|\cdot\|_\infty)$ нормирани векторски простор.

(б) Доказати да Ојлер-Лагранжева једначина

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial f'} = 0$$

важи и за $S: A \to \mathbb{R}$, $S(f) = \int_a^b L(t, f(t), f'(t))\,dt$.

⑤ Брахистохрона



По којој кривој ће тело у гравитационом пољу најбрже да стигне од тачке O до тачке A?

Претпостављамо да је почетна брзина 0.

Једноставности ради узимамо да је маса тела $m = 1 \Rightarrow$ кинетичка енергија је $K = \frac{v^2}{2}$, где је v брзина.

Потенцијална енергија гравитационог поља је $U = -gx$.

Закон очувања енергије $\Rightarrow E := K + U \equiv \text{Const}$.

У почетном положају: $v = 0$, $x = 0$

$\Rightarrow K + U = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{2} - gx = 0 \Rightarrow v = \sqrt{2gx}$

Дужина пређеног пута за време t_0:

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx \quad (*)$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v}$$

$\Rightarrow$ треба да минимизирамо време:

$$t = \int_0^{a_1} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{a_1} \sqrt{\frac{1 + (f'(x))^2}{x}}\, dx$$

Ојлер-Лагранжеве једначине за

$$L(x, q, p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{x}}$$

су:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{x(1+(f'(x))^2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = c\sqrt{x}$$

(*) $\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = \dfrac{dy}{ds} \Rightarrow \dfrac{dy}{ds} = c\sqrt{x}$ (**)

(x) $\Rightarrow \left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow (\exists \alpha) \quad \dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \dfrac{dy}{ds} = \sin\alpha$

(**) $\Rightarrow x = \dfrac{1}{c^2}\sin^2\alpha$ (ако је $c \neq 0$)

$\dfrac{dy}{d\alpha} = \dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{d\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \dfrac{d}{d\alpha}\left(\dfrac{\sin^2\alpha}{c^2}\right) = 2\dfrac{\sin^2\alpha}{c^2}$

$\Rightarrow y = \dfrac{2}{c^2}(2\alpha - \sin 2\alpha) + b$

Једноставније ознаке: $t := 2\alpha$, $a := 2/c^2$

$\Rightarrow x = a(1-\cos t), \quad y = a(t-\sin t) + b$

Пошто наша крива пролази кроз тачку $(0,0)$; можемо да претпоставимо да она одговара вредности $t = 0$

$t = 0 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow \boxed{x = a(1-\cos t), \quad y = a(t-\sin t)}$

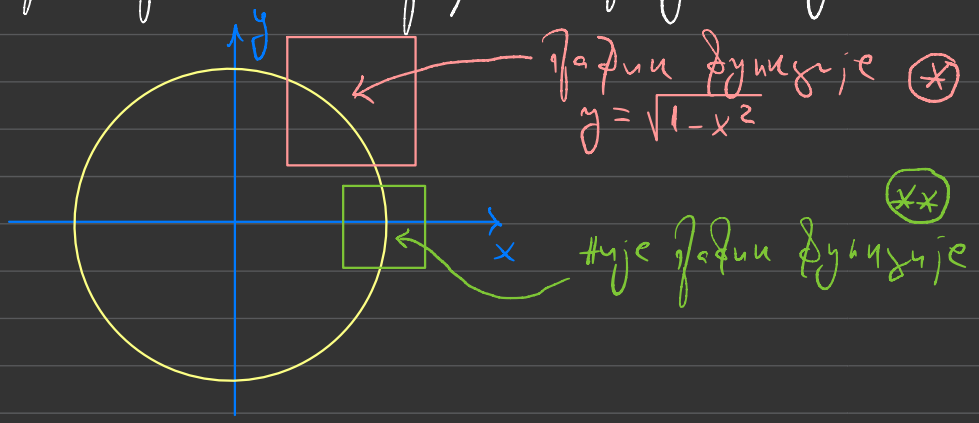
Задатак: (а) Продискутовати случај $c=0$.

(б) Шта је геометријски смисао угла α?

(в) Симулирати брахистохрону.

Теорема о имплицитној функцији

Пример: Посматрајмо криву $x^2+y^2=1$



(*) $\Leftarrow$ тангента на криву није вертикална

(**) $\Leftarrow$ тангента на криву у $(1,0)$ је вертикална

Питање: $F: X\times Y \to Z$; да ли једначина $F(x,y)=0$ има решење $y=f(x)$, $f: X\to Y$?

Теорема: Нека су X, Y, Z нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $W = B]x_0; \alpha[\times B]y_0; \beta[\subseteq X \times Y$.

Претпоставимо да пресликавање $F: W \to Z$ испуњава следеће услове:

(1.) $F(x_0, y_0) = 0$

(2.) $F \in C(x_0, y_0)$

(3.) $D_2 F$ дефинисано на W и непрекидно у (x_0, y_0)

(4.) $\exists (D_2 F(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$.

Тада постоје околине $X \supseteq U \ni x_0$, $Y \supseteq V \ni y_0$ и пресликавање $f: U \to Y$ са својствима

(a) $U \times V \subseteq W$

(б) $[(x,y) \in U \times V \wedge F(x,y) = 0] \Leftrightarrow y = f(x)$

(в) $f \in C_{x_0}$

Доказ: Тврђења су хомеоморфизми

$\Rightarrow$ можемо да претпоставимо $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и

$$W = \{(x,y) \in X \times Y \mid \|x\| < \alpha, \ \|y\| < \beta\}.$$

За свако $x \in B]0;\alpha[\subseteq X$ дефинишемо помоћну функцију на $B]0;\beta[\subseteq Y$:

$$g_x : B]0;\beta[\longrightarrow Y, \quad g_x(y) := y - (D_2F(0,0))^{-1} F(x,y).$$

Тада важи

$$F(x,y) = 0 \iff g_x(y) = y,$$

тј. фиксне тачке пресликавања g_x. Да бисмо на g_x могли да применимо Банахов став о фиксној тачки, доказаћемо:

- g_x је контракција
- g_x слика неки комплетан скуп у себе.

$$Dg_x(y) = \mathbb{1}_Y - (D_2F(0,0))^{-1} D_2F(x,y) =$$

$$= (D_2F(0,0))^{-1} [\, D_2F(0,0) - D_2F(x,y)].$$

(3) $\Rightarrow D_2F \in C(0,0)$

$\Rightarrow (\exists \gamma > 0)$ takvo da za $\|x\| < \gamma$, $\|y\| < \gamma$ važi

$$\|(D_2F(0,0))^{-1}\| \cdot \|D_2F(0,0) - D_2F(x,y)\| < \frac{1}{2},$$

tj. je za $x \in B]0;\gamma[\subseteq X$, $y \in B]0;\gamma[\subseteq Y$

$\|Dg_x(y)\| < \frac{1}{2}$. Iz Teoreme o konačnom

priraštaju sledi da je

(!) $$\|g_x(y_1) - g_x(y_2)\| < \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|$$

za $x \in B]0;\gamma[\subseteq X$, $y_1, y_2 \in B]0;\gamma[\subseteq Y$

$\Rightarrow$ za $\|x\| < \gamma$ $g_x : B]0;\gamma[\to Y$ je kontrakcija.

Dokažimo:

$$(\forall \varepsilon \in]0,\gamma[)(\exists \delta \in]0,\gamma[)(\forall x \in B]0;\delta[\subseteq X)$$

$$g_x(B[0;\varepsilon]) \subseteq B[0,\varepsilon] \subseteq Y.$$

(*)

Пошто је Y комплетан и $B[0;\varepsilon]$ је комплетан скуп (јер је затворен подскуп комплетног скупа комплетан), па $g_x : B[0;\varepsilon] \to B[0;\varepsilon]$ можемо да примењујемо Банахов став о фиксној тачки.

Доказ (*): Нека је $0 < \varepsilon < \delta$. Пошто је

$$\|Dg_x(0)\| = \|(D_2F(0,0))^{-1} \cdot F(x,0)\|$$

$$\leq \|(D_2F(0,0))^{-1}\| \cdot \|F(x,0)\|$$

из (1) и (2) следи:

$$(\exists \delta \in]0,\delta[)\ \|x\| < \delta \Rightarrow \|Dg_x(0)\| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Одавде и из (!) следи да за $\|x\| < \delta < \delta$ и $\|y\| < \delta < \delta$ важи

$$\|g_x(y)\| \leq \|g_x(y) - g_x(0)\| + \|g_x(0)\| < \frac{1}{2}\|y\| + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon,$$

тј. за $\|x\| < \delta$: $g_x(B[0;\varepsilon]) \subseteq B[0;\varepsilon]$.

Тиме је доказано (*), тј. $\|x\| < \delta \Rightarrow g_x$ има јединствену фиксну тачку $\Rightarrow F(x,y)$ има јединствено решење $y = f(x)$.

Тиме је доказано (а) и (б). Својство (в) (непрекидност f у 0) је доказано помоћу доказа својства (*): тада је доказано $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \|x\| < \delta \Rightarrow g_x(B[0;\varepsilon]) \subseteq B[0,\varepsilon]$, а $y = f(x)$ је фиксна тачка пресликавања g_x тј. $\Rightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$. ▨

Важне напомене: ① Ако је пресликавање F непрекидно у некој околини тачке (x_0, y_0), а не само у тој тачки, онда је и пресликавање f непрекидно у некој околини тачке x_0

(2) Ако у околини тачке (x_0, y_0) пресликавање F има и парцијални извод D_1F који је непрекидан у тачки (x_0, y_0), онда је $f \otimes x_0$ и важи $f'(x_0) = -(D_2F(x_0, y_0))^{-1} \cdot D_1F(x_0, y_0)$.

(3) Ако у некој околини тачке (x_0, y_0) пресликавање F има непрекидне парцијалне изводе D_1F и D_2F, онда је у некој околини тачке x_0 пресликавање f непрекидно диференцијабилно и важи

$$f'(x) = -(D_2F(x, f(x)))^{-1} \cdot D_1F(x, f(x))$$

(правило диференцирања имплицитне функције)

(4) $F \in C^n(W; Z) \Rightarrow f \in C^n(U, Y)$

за неку околину U тачке x_0.

Напомена: Правило диференцирања у 3. се лако памти као правило формалног диференцирања израза $F(x, f(x)) = 0$ којим је дефинисано пресликавање f: диференцирањем по x и применом правила за извод сложене функције добијамо

$$\boxed{D_1 F(x, f(x)) + D_2 F(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0.}$$

Доказ: 1 и 2: видети скрипту, 3 следи из 2 за произвољно (x, y) у улози (x_0, y_0), 4 је за $n \in \{0, 1\}$ 2 и 3, за $n \geq 2$ доказује се индукцијом уз помоћ чињенице да је

$$\mathcal{L}(Y; Z) \ni A \longmapsto A^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$$

пресликавање класе C^∞ и диференцирања израза у 3. n пута.

Теорема о инверзној функцији:

Нека су X, Y нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, нека је $V \subseteq Y$ отворен скуп, $y_0 \in V$ и $g: V \to X$ пресликавање које има следећа својства:

(1.) $g \in \mathcal{C}(V; X)$

(2.) $Dg \subset y_0$

(3.) $\exists (Dg(y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$.

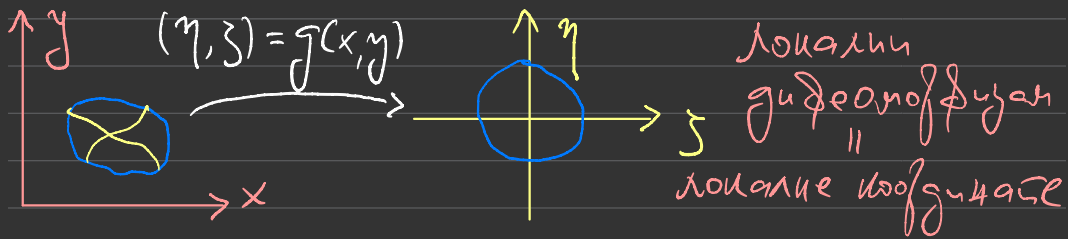
Тада постоје околина $V_0 \subseteq Y$ тачке y_0 и околина $U_0 \subseteq X$ тачке $x_0 := g(y_0)$ тако да је $g: V_0 \longrightarrow U_0$ бијекција, g^{-1} диф. у x_0 и важи $\boxed{Dg^{-1}(x_0) = (Dg(y_0))^{-1}}$.

Ако је још и $g \in C^n(V_0; X)$, онда је $g^{-1} \in C^n(U_0; Y)$.

Доказ: следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на $F(x,y) = x - g(y)$. ▨

Дефиниција: Пресликавање $f: V \to U$ је дифеоморфизам ако је оно бијекција и ако су f и f^{-1} диференцијабилна пресликавања. Пресликавање је локални дифеоморфизам ако свака тачка домена има отворену околину V_0 такву да је $f|_{V_0}: V_0 \to f(V_0)$ дифеоморфизам.

Последица Теореме о инверзној функцији: Ако је $f: V \to Y$ локални дифеоморфизам онда је за сваки отворен подскуп $U \subseteq V$ скуп $f(U)$ отворен.



локални дифеоморфизам
=
локалне координате

Примери: ① Пресликавање

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

није инјективно: $g(x,y) = g(x, y+2\pi)$; али је локално инјективно, тј. свака тачка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ има околину V_0 такву да је $g: V_0 \to \mathbb{R}^2$ инјективно. Ово следи из Теореме о инверзној функцији, јер је

$$Dg(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} e^{x_0}\cos y_0 & -e^{x_0}\sin y_0 \\ e^{x_0}\sin y_0 & e^{x_0}\cos y_0 \end{pmatrix}$$

инвертибилна матрица: Јакобијан пресликавања g је $\det Dg(x_0,y_0) = e^{x_0} > 0$.

② Јакобијан пресликавања

$g:[0,+\infty[\times[0,+\infty[\to\mathbb{R}^2$, $g(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

је $\det Dg(r,\theta)=r$, па је у околини

сваке тачке (r,θ), $r\neq 0$ оно локални

дифеоморфизам (поларне координате).



③ Исправљање криве у околини

регуларне тачке: Нека је крива γ

у равни $\mathbb{R}^2$ задата једначином

$$F(x,y)=C, \quad F \text{ класе } C^1$$

и нека је $(x_0,y_0)\in\gamma$ регуларна тачка,

тј. нека је $dF(x_0,y_0)\neq 0$.

$$dF(x_0,y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)dy$$

Нека је $\neq 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0.$$

Дефинишимо

$$\xi = x - x_0, \quad \eta = F(x,y)$$

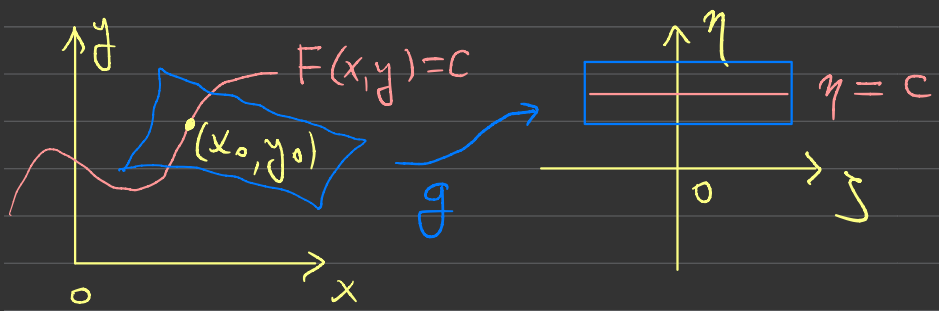
Извод пресликавања $g: (x,y) \mapsto (\xi,\eta)$ је

$$Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(Dg(x_0,y_0)) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$

$\Rightarrow$ g је локални дифеоморфизам у околини тачке (x_0,y_0)

$\Rightarrow$ (ξ,η) нове (локалне) координате.



у координатама (ξ, η) једначина криве Γ је $\eta = 0$.

Теорема о рангу: Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворен и $f: V \to \mathbb{R}^l$ пресликавање класе C^n, такво да је за све $x \in V$ $\operatorname{rang} Df(x) = r$. Тада у околини сваке тачке $x_0 \in V$ и њене слике $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^l$ постоје локалне координате класе C^n у којима f има облик

$$f : (\xi_1, \dots, \xi_k) \longmapsto (\xi_1, \dots, \xi_r, 0, \dots, 0)$$

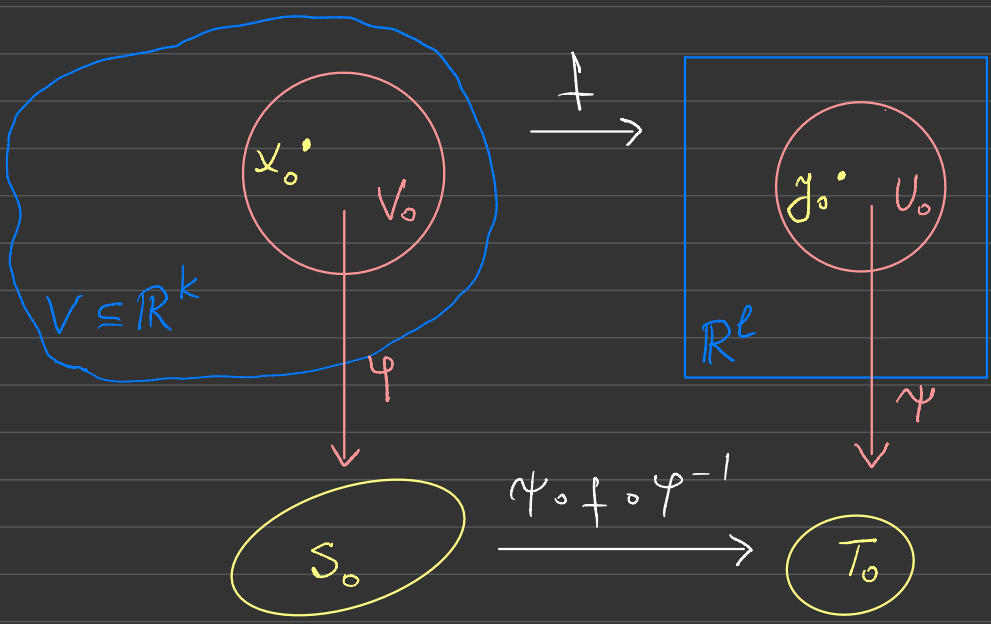
Кратко речено: Пресликавање константног ранга r локално изгледа као пројекција на $\mathbb{R}^r$.

Претпоставка: Нека f испуњава услове теореме, одн. за свако $x_0 \in V$ постоје отворене околине $V_0 \ni x_0$ и $U_0 \ni y_0 = f(x_0)$ и дифеоморфизми класе C^n

$$\varphi : V_0 \to S_0, \quad \psi : U_0 \to T_0$$

такви да је

$$\boxed{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(s_1, \dots, s_k) = (s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0)}$$



Доказ: Нека су $x=(x_1,\dots,x_k)$, $y=(y_1,\dots,y_\ell)$ координате на $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^\ell$ и $y=f(x)$, тј.

$$y_j = f_j(x_1,\dots,x_k), \quad 1\le j\le \ell$$

запис пресликавања f у тим координатама. Пермутација координата је дифеоморфизам $\Rightarrow$ можемо да претпоставимо да је главни минор матрице Df несингуларан, тј: $\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le r} \neq 0$. Тада је пресликавање φ, дефинисано са

$$s_j = \varphi_j(x_1,\dots,x_k) := \begin{cases} f_j(x_1,\dots,x_k), & 1\le j\le r \\ x_j, & r<j\le k \end{cases}$$

локални дифеоморфизам, јер је

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le r} & * \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Тада $f \circ \varphi^{-1}$ има координатни запис

$$y_j = f_j \circ \varphi^{-1}(s_1, \dots, s_\ell) = \begin{cases} s_j & , 1 \le j \le r \\ g_j(s_1, \dots, s_k), & r < j \le \ell \end{cases} \quad (*)$$

Матрица извода овог пресликавања је

$$D(f \circ \varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & * & \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{r+1 \le i,j \le \ell} \end{pmatrix}$$

φ^{-1} локални дифеоморфизам

$\Rightarrow D\varphi^{-1}$ инвертибилна матрица

$\Rightarrow \operatorname{rang} D(f \circ \varphi^{-1}) = \operatorname{rang} Df = r$

$\Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$ за $r+1 \le i, j \le \ell$

$(*) \Rightarrow y_j = f_j \circ \varphi^{-1}(s_1, \dots, s_\ell) = \begin{cases} s_j & , 1 \le j \le r \\ g_j(s_1, \dots, s_r), & r < j \le \ell \end{cases}$

запис само од $s_1, \dots, s_r$

Сада дефинишемо пресликавање Ψ:

$$t_j = \Psi_j(y) := \begin{cases} y_j, & 1 \le j \le r \\ y_j - g_j(y_1, \dots, y_r), & r < j \le \ell \end{cases} \quad (**)$$

Његов извод је

$$D\Psi = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \\ * & & & \ddots \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

па је Ψ локални дифеоморфизам.

$(*) \wedge (**) \Rightarrow t = \Psi \circ f \circ \pi^{-1}(\Delta)$ има облик

$t_1 = \Delta_1, \dots, t_r = \Delta_r, t_{r+1} = 0, \dots, t_\ell = 0$ ▨

Последица: Нека је $f: V \to \mathbb{R}^\ell$ класе C^1.

(1) Ако је $(\forall x \in V)$ $\operatorname{rang} Df(x) = \ell$, онда је, за свако $x \in V$, $f(x)$ унутрашња тачка скупа $f(V)$.

(2) Ако је $(\forall x \in V)$ $\operatorname{rang} Df(x) = r < \ell$, онда $(\exists g_j)$:

$f_j(x) = g_j(f_1(x), \dots, f_r(x))$ за $r+1 \le j \le \ell$.

Дефиниција: Функције $f_1, \dots, f_\ell : V \to \mathbb{R}$ су **функционално независне** у околини тачке $a \in V$ ако за сваку непрекидну функцију F дефинисану у околини тачке $b = (f_1(a), \dots, f_\ell(a)) \in \mathbb{R}^\ell$ тј

$F(f_1(x), \dots, f_\ell(x)) = 0$ у околини тачке a следи $F(y_1, \dots y_\ell) = 0$ у околини тачке b.

(дотичење линеарне независности)

Теорема: Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворен скуп и $f_j : V \to \mathbb{R}$, $1 \le j \le \ell$ пресликавања класе C^1, тачка a је за $f = (f_1, \dots, f_\ell) : V \to \mathbb{R}^\ell$ ранга $Df = r$ свуда на V. Тада важи:

(1) $r = \ell \Rightarrow f_1, \dots, f_\ell$ су функционално независне

(2) $r < \ell \Rightarrow f_1, \dots, f_\ell$ су функционално зависне.

Доказ: Следи из претходне теореме. ▨

Дефиниција: Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^l$ отворен подскуп. Диффеоморфизам

$$g : V \longrightarrow g(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

назива се *простим* ако мења највише једну координату, тј. ако је за неко k, $(1 \leq k \leq l)$ облика

$$y = g(x):$$

$$y_j = \begin{cases} x_j, & j \neq k \\ g_k(x_1, \ldots, x_l), & j = k. \end{cases}$$

Теорема: Сваки диффеоморфизам класе C^1

$$\mathbb{R}^l \supseteq V \xrightarrow{f} f(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција l простих диффеоморфизама.

Другим речима, за сваку тачку $a \in V$ отворена околина $V_0 \ni a$, таква да је $f|_{V_0} = g_1 \circ \dots \circ g_\ell$, где су g_j прости дифеоморфизми.

Доказ: Индукцијом по k доказаћемо: Дифеоморфизам f који мења највише k координата може локално да се представи као композиција k простих дифеоморфизама.

$k=1 \Rightarrow f$ је већ прост по дефиницији.

Претпоставимо да тврђење важи за $k-1$ и нека је $f: V \to f(V) \subseteq \mathbb{R}^\ell$ дифеоморфизам који мења k координата; нека је његов координатни запис $y = f(x)$, где је

$$y_j = \begin{cases} f_j(x), & 1 \le j \le k \\ x_j, & k < j \le \ell. \end{cases}$$

Пошто је f диффеоморфизам, матрица

$$Df = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le k} & * \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

је несингуларна, тј:

$$\det(Df) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le k} \neq 0.$$

$\Rightarrow$ бар један од $(k-1)\times(k-1)$ минора последње матрице је $\neq 0$. Претпостављамо да је то главни минор и дефинишемо пресликавање $\Lambda = g(x)$ са

$$\Lambda_j := \begin{cases} f_j(x), & 1\le j\le k \\ x_j, & k\le j\le l. \end{cases}$$

$$\Rightarrow Dg = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le k-1} & * \\ 0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det Dg = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\le i,j\le k-1} \neq 0$$

$\Rightarrow g$ је локални дифеоморфизам.

Представљање $h := f \circ g^{-1}$ има облик

у координатама $y = h(s)$, где је

$$y_j = \begin{cases} s_j, & j \neq k \\ f_k \circ g^{-1}(s), & j = k, \end{cases}$$

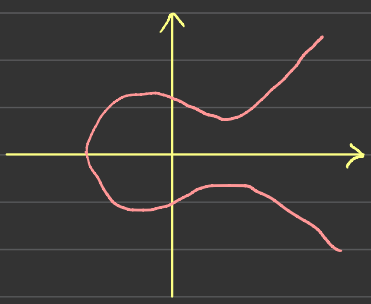
тј. h је пројекција. Пошто g не мења више од $(k-1)$ координате, то индуктивној претпоставци је $g = g_1 \circ \dots \circ g_{k-1}$, где су сви g_i пројекције

$\Rightarrow f = h \circ g = h \circ g_1 \circ \dots \circ g_{k-1}$ је композиција k простих дифеоморфизама. ▨

Подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ и условни екстремуми

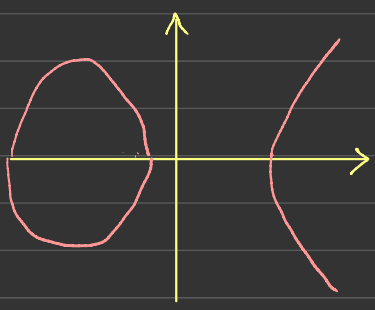
Многострукости су уопштења кривих и површи. Ове појмове је потребно прецизно дефинисати.

Примери: ① $y^2 = (x+1)(x^2+4)$



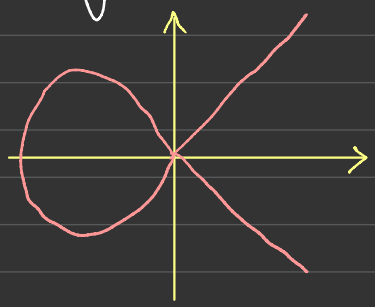
крива која је хомеоморфна праву $\mathbb{R}$

② $y^2 = (x+1)(x^2-4)$



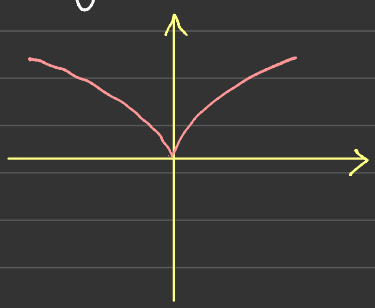
крива која је локално хомеоморфна праву $\mathbb{R}$

③ $y^2 = (x+1)x^2$



крива која није локално хомеоморфна праву $\mathbb{R}$

④ $y^2 = x^3$



крива која је хомеоморфна праву $\mathbb{R}$ али нема тангенту у $(0,0)$

⑤ $x^2 - y^2 = 0$

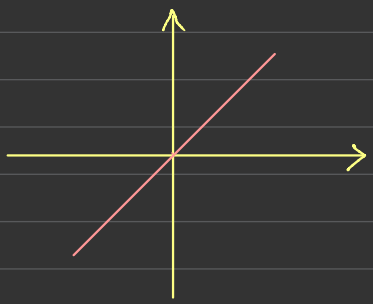


унија две праве

⑥ $x^2 + y^2 = 0$ тачка $(0,0)$

⑦ $x^2 + y^2 + 1 = 0$ $\emptyset$

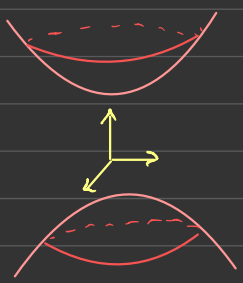
⑧ $x^3 - y^3 = 0$



права

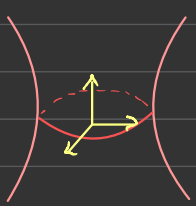
⑨ $H_c := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 - x^2 - y^2 = c\}$

$c > 0$



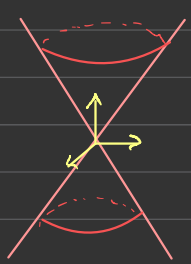
две компоненте повезаности, свака хомеоморфна $\mathbb{R}^2$

$c < 0$



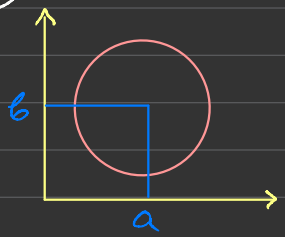
повезана површ, локално хомеоморфна $\mathbb{R}^2$

$c = 0$



површ која није локално хомеоморфна $\mathbb{R}^2$

(10) $x = a + \cos t$, $y = b + \sin t$, $t \in \mathbb{R}$



кружница са центром (a, b) и полупречником 1

(11) $x = (2 + \cos t)\cos s$, $y = (2 + \cos t)\sin s$, $z = \sin t$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$



торус добијен ротацијом кружница из (10) са $a = 2$, $b = 0$ око y-осе

Дефиниција: Подскуп $M \subseteq \mathbb{R}^{k+\ell}$ је регуларна k-димензиона површ (или k-димензиона подмногострукост) класе C^p ако свака тачка $p \in M$ има околину V у $\mathbb{R}^{k+\ell}$ такву да постоји пресликавање $f : V \to \mathbb{R}^\ell$ класе C^p са својствима:

(1) $(\forall x \in V)$ $Df(x) : \mathbb{R}^{k+\ell} \to \mathbb{R}^\ell$ је сурјекција

(2) $V \cap M = f^{-1}(0)$.

Дефиниција: (1) Пресликавање $f: V \to \mathbb{R}^n$ је *субмерзија* ако је $(\forall x \in V)$ $Df(x)$ сурјекција.
(2) Пресликавање $f: V \to \mathbb{R}^n$ је *имерзија* ако је $(\forall x \in V)$ $Df(x)$ инјекција.

$M \subseteq \mathbb{R}^{k+\ell}$ је k-димензиона подмногострукост ако може локално да се зада једначином $f(x) = 0$ за неку субмерзију f са изометом ℓ.
Другим речима: $M \subseteq \mathbb{R}^{k+\ell}$ је k-димензиона подмногострукост ако може локално да се зада као скуп нула система једначина

$$f_1(x_1, \dots, x_{k+\ell}) = 0, \ \dots, \ f_\ell(x_1, \dots, x_{k+\ell}) = 0,$$

где су $f_1, \dots, f_\ell$ глатке реалне функције такве да је пресликавање $f := (f_1, \dots, f_\ell)$ субмерзија.

Напомене: (1) Претходна дефиниција укључује и случај $k=0$, уз конвенцију $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Из ње следи да је отворен подскуп у $\mathbb{R}^k$ k-димензиона подмногострукост класе C^∞.

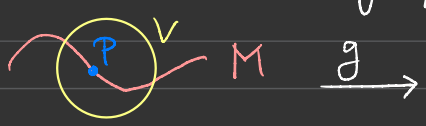
(2) Крива у Примеру ⑧ (глава) је 1-димензиона подмногострукост, иако $f(x,y) = x^3+y^3$ није субмерзија ($df = 3x^2dx + 3y^2dy \Rightarrow df(0,0)$) јер она може да се зада субмерзијом $g(x,y) = x-y$.

(3) Површи H_c у Примеру ⑨ су 2-димензионе подмногострукости иако су задате функцијом $f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$ за коју је $df(0,0,0) = 0$ (па f није субмерзија), јер $(0,0,0) \notin H_c$ за $c \neq 0$. Површ H_0 није многострукост: то може да се закључи из следеће теореме (задатак!):

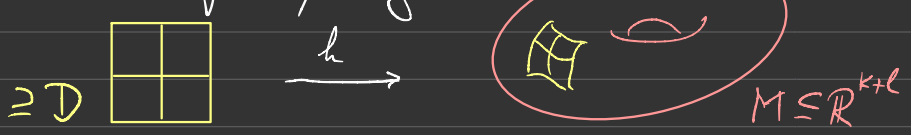
Тврђење: За $M \subseteq \mathbb{R}^{k+\ell}$ следећа тврђења су еквивалентна:

(а) M је k-димензиона подмногострукост класе C^p

(б) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $V \ni p$ и $U \ni 0$ у $\mathbb{R}^{k+\ell}$ и дифеоморфизам $g : U \to V$ класе C^p такав да је $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$



(в) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $V \ni p$ у $\mathbb{R}^{k+\ell}$ и $0 \ni D$ у $\mathbb{R}^k$ и инјекција $h : D \to V$ класе C^p таква да је $h : D \to V \cap M$ хомеоморфизам у релативној топологији на $V \cap M$ наслеђеној из $\mathbb{R}^{k+\ell}$



Доказ: k-димензиона подмногострукост у $\mathbb{R}^{k+\ell}$ је локално задата једначином $f(x)=0$, где је f субмерзија, тј. $(\forall x)\ \operatorname{rang} Df(x)=\ell$

Теорема о рангу $\Rightarrow$ можемо да изаберемо локалне координате у којима f има облик

$$f(x_1,\dots,x_{k+\ell}) = (x_1,\dots,x_\ell).$$

У тим координатама M је локално задато једначинама $x_1=0,\dots,x_\ell=0$, што је еквивалентно са (б). Имерзија у (в) у обим координатама може да се дефинише са $h(t_1,\dots,t_k) := (0,\dots,0,t_1,\dots,t_k)$. ▨

Дефиниција: Пресликавање h у (в) називамо се локалном параметризацијом подмногострукости, а инверз $h^{-1}: V\cap M \to D$ локалном картом.

Задаци: ① Који од скупова дефинисаних у примерима ① – ⑪ су подмногострукости?

② Доказати да је пресликавање

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h(s,t) = (\sin s \cos t, \sin s \sin t, \cos s)$

локална параметризација сфере

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

и да, иако Dh није инјективно (тј. тачка 2) у неким тачкама, (в) у претходном тврђењу може да се искористи за доказ да је S^2 2-димензиона подмногострукост.

③ Доказати да пресликавање

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$

није субмерзија, али да ипак помоћу њега може да се закључи да је S^2 подмногострукост.

④ Доказати да је слика пресликавања

$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad h(t) = (t^2-1, t^3-t)$$

крива из Примера ③ и да је h инјекција, али да не задовољава услове из (в) у претходном тврђењу (тј. није локална параметризација у смислу дефиниције из тог тврђења). Доказати да крива из Примера ③ није подмногострукост.

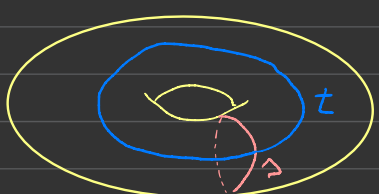
⑤ Наћи параметризације кривих из Примера ① и ②. Упутство: посматрати пресеке тих кривих са фамилијом правих $y = tx$, $t \in \mathbb{R}$.

⑥ Доказати да је торус (Пример ⑪) 2-димензиона подмногострукост у $\mathbb{R}^3$.

⑦ Доказати да је пресликавање

$h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $h(s,t) = (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$

инјекција и закључити да је њена слика 2-димензиона подмногострукост у $\mathbb{R}^4$. Доказати да је ова подмногострукост хомеоморфна торусу. Упутство:



⑧ Торус димензије n дефинише се као

$$\mathbb{T}^n := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid (\forall j)\, |z_j| = 1\}$$

тј. $\mathbb{T}^n := (S^1)^n$. Доказати да је $\mathbb{T}^n$ n-димензиона подмногострукост у $\mathbb{R}^{2n}$.

Упутство: Посматрати пресликавање

$f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $f(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (x_1^2 + y_1^2, \dots, x_n^2 + y_n^2)$.

(9) Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп и $f: V \to \mathbb{R}$ функција класе C^p. Доказати да је њен график $\Gamma(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in V \} \subseteq V \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ n-димензиона подмногострукост класе C^p.

(10) Посматрајмо $n \times n$ реалне матрице као тачке у $\mathbb{R}^{n \times n}$.

(а) Доказати да је главна линеарна група

$$GL(\mathbb{R}^n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ инвертибилна} \}$$

$n \times n$-димензиона подмногострукост класе C^∞

(б) Доказати да је ортогонална група

$$O(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^T = E \}$$

$\frac{n(n-1)}{2}$-димензиона подмногострукост класе C^∞.

Упутство: $f(A) = AA^T - E$ дефинише субмерзију са кодоменом у простору симетричних матрица.

Нека је $h:]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}^n$ параметризација 1-подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ (регуларна крива).

По дефиницији I извода је

$$h(t) = h(0) + h'(0)\,t + \alpha(t) \quad \text{кад } t \to 0.$$

Линеарни приближај криве дефинише њену тангенту у тачки $P = h(0)$; регуларна тангента у тој тачки је

$$\underline{x - p = h'(0)\,t} \qquad (T)$$

или, у координатама $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ $h = (h_1, \dots, h_n)$:

$$x_1 - p_1 = h_1'(0)\,t, \ \dots, \ x_n - p_n = h_n'(0)\,t$$



$\underline{\xi = x'(0)}$ је вектор тангенте (T). Други запис за $\xi = x'(0) = x'(0) \cdot 1$ је $\underline{\xi = Dx(0) \cdot \hat{1}}$.

Дефиниција: Нека је

$$\mathbb{R}^k \supseteq D \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \qquad (n = k+l)$$

локална параметризација k-димензионе подмногострукости M у околини тачке $p \in M$.

Тангентни простор на M у тачки p је афини простор задат параметарском једначином

$$\boxed{x - p = Dh(0) \cdot t} \qquad (*)$$

или, у координатама

$$\left.\begin{aligned} x_1 - p_1 &= \frac{\partial h_1}{\partial t_1}(0)\,t_1 + \ldots + \frac{\partial h_1}{\partial t_k}(0)\,t_k \\ &\vdots \\ x_n - p_n &= \frac{\partial h_n}{\partial t_1}(0)\,t_1 + \ldots + \frac{\partial h_n}{\partial t_k}(0)\,t_k \end{aligned}\right\}$$

Векторизација овог афиног простора која се добија тако што се за нулу изабере тачка p означава се са $T_p M$.

Ако је M k-димензиона подмногострукост, онда је $(\forall p \in M)\ \dim T_pM = k$.

Нека је $h: D \to M$ локална параметризација околине тачке $p = h(0)$ и нека је $f: V \to \mathbb{R}^l$ субмерзија таква да је $M \cap V = f^{-1}(0)$ (као у дефиницији подмногострукости). Тада је $f(h(t)) \equiv 0$, одакле диференцирањем у тачки $t = 0$ и применом правила за извод композиције пресликавања добијамо

$$Df(p) \cdot Dh(0) = 0$$

$$\Rightarrow (\forall \xi \in T_pM)\ Df(p) \cdot \xi = 0$$

$$\Rightarrow T_pM \subseteq \ker Df(p)$$

Пошто је f субмерзија, тј. $Df(p): \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ је сурјекција $\Rightarrow \dim \ker Df(p) = k = \dim T_pM$

$$\Rightarrow \boxed{T_pM = \ker Df(p)}$$

(други опис тангентног простора)

$\Rightarrow$ Једначина тангентног простора је

$$\boxed{Df(p)\cdot(x-p)=0} \quad (**)$$

или, у координатама $x=(x_1,\dots,x_n)$, $p=(p_1,\dots,p_n)$, $f=(f_1,\dots,f_\ell)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p)(x_1-p_1)+\dots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p)(x_n-p_n)=0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1}(p)(x_1-p_1)+\dots+\frac{\partial f_\ell}{\partial x_n}(p)(x_n-p_n)=0 \end{cases}$$

Задатак: Доказати да се тангентни простор T_pM састоји од вектора тангентних у тачки p на глатке криве које леже на подмногострукости M и пролазе кроз p.

(трећи опис тангентног простора). (*)(**)

Тврдење: $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$ крива, $\gamma(0) = p$, $\xi = \gamma'(0)$,

$f(x) = 0$ једначина којом је локално задато M

$\Rightarrow f \circ \gamma \equiv 0$ (јер $\gamma(t) \in M$) $\Rightarrow (f \circ \gamma)'(0) = 0$

$\Rightarrow Df(p) \cdot \xi = 0 \Longrightarrow \xi \in T_p M$ (јер је $T_p M$ векторизација афиног простора (**)).

Обрнуто: $\xi \in T_p M$, $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $h : D \to M$

локална параметризација M, $p = h(0)$

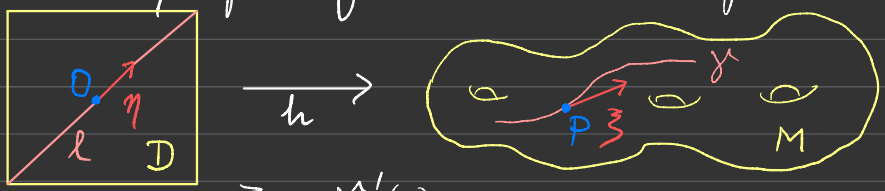
h је имерзија $\Rightarrow Dh(0)$ инјективно

$\Rightarrow Dh(0) : \mathbb{R}^k \to T_p M$ изоморфизам

(јер је $\dim \mathbb{R}^k = \dim T_p M$)

$\Rightarrow (\exists \eta \in \mathbb{R}^k)\ \xi = Dh(0)\eta$

$l(s) := s\eta$ права у $\mathbb{R}^k$, $\gamma := h \circ l$ крива на M



Доказати: $\xi = \gamma'(0)$.

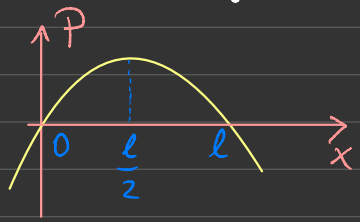
Дефиниција: Нека је M подскуп скуп у $\mathbb{R}^n$, $f: V \to \mathbb{R}$ функција дефинисана на скупу $V \subseteq \mathbb{R}^n$ који садржи M. Тачка $p \in M$ је тачка условног локалног минимума функције $f|_M$ ако постоји отворена околина $p \supseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ таква да је $(\forall x \in U \cap M) f(p) \leq f(x)$.

Дуално: тачка условног локалног максимума функције $f|_M$ је тачка условног локалног минимума функције $-f|_M$.

Пример: Међу свим правоугаоницима обима $2l$ наћи онај који има највећу површину. Ово је пример тзв. изопериметријских проблема.

Решење: Тражимо максимум функције $P(x,y) = x \cdot y$ на скупу $M = \{(x,y) \mid x+y = l\}$.

$(x,y) \in M \Rightarrow y = \ell - x \Rightarrow P(x,y) = -x^2 + \ell x$



$\Rightarrow \max P = P(\ell/2, \ell/2)$

$\Rightarrow$ Решење је квадрат $\left(x = y = \frac{\ell}{2}\right)$.

Напомена: Функција $P(x,y) = xy$ нема локалне екстремуме, јер је $\frac{\partial P}{\partial x} = y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = x$, па је једина критична тачка $(0,0)$, која није локалн екстремум (јер је $P(0,0) = 0$, а у околини $(0,0)$ $P(x,y) = xy$ узима и позитивне и негативне вредности). Тачка $\left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}\right)$ је условни екстремум функције $P|_M$, али није критична тачка функције P. Претходни пример је дводимензионалан (јер је M у $\mathbb{R}^2$), општији случај је следећи: →

Теорема: Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f: V \to \mathbb{R}$ функција класе C^1 и $M \subseteq V$ глатка подмногострукост. Да би тачка $p \in M$ била тачка условног локалног екстремума функције $f|_M$ неопходно је да буде испуњен бар један од следећих услова:

(а) $df(p) = 0$ (тј. p је критична тачка за f)

или:

(б) $T_p M \subseteq T_p S$, где је $S := \{x \in V \mid f(x) = f(p)\}$.

Напомене: (1) Теорема има једноставнију и елегантнију формулацију у специјалном случају када је M глобално задато једначином $g(x) = 0$ за неку субмерзију $g: V \to \mathbb{R}$ (видети скрипту или уводно предавање).

(2) Ако важи (a) у теореми, онда је тачка p кандидат за (стандардни, безусловни) екстремум функције f, а самим тим и за условни екстремум функције $f|_M$.

(3) Ако (a) у теореми не важи, онда је у свакој околини тачке p функција f субјективна (задатак!), па је скуп S дефинисан у (б) $(n-1)$-димензионо тесна подмногострукост, тако да има смисла T_pS.

Доказ теореме: p тачка условног локалног екстремума, $\gamma:]-\delta,\delta[\to M$, $\gamma(0)=p$

$\Rightarrow (f\circ\gamma)'(0)=0$

$\Rightarrow (\forall \xi \in T_pM)\ Df(p)\cdot\xi = 0$, због (**)

$\Rightarrow T_pM \subseteq T_pS$, због (**) ▨

Напомена: Као што смо видели у (**), простор T_pS је задат једначином (по ξ) $Df(p)\xi = 0$, или, у координатама,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\xi_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\xi_n = 0. \qquad (A)$$

Ако је $M = g^{-1}(0)$ за неку субмерзију $g := (g_1, \ldots, g_\ell) : V \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$, тј. ако је M задато системом једначина

$$\boxed{g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad g_\ell(x_1, \ldots, x_n) = 0} \qquad (M)$$

онда је, на основу (**), T_pM задато једначином $Dg(p)\cdot\xi = 0$, тј. системом

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(p)\xi_1 + \ldots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(p)\xi_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial g_\ell}{\partial x_1}(p)\xi_1 + \ldots + \frac{\partial g_\ell}{\partial x_n}(p)\xi_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (Б)$$

$$\boxed{T_pM \subseteq T_pS \iff [\xi \text{ решење } (Б) \Rightarrow \xi \text{ решење } (A)]}$$

Систем (А) дефинише хиперраван ортогоналну на вектор $\nabla f(p) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$, а систем (Б) $(n-\ell)$ димензиону раван ортогоналну на $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_\ell(p)$, па последња импликација значи

$$\{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_\ell(p)\}^\perp \subseteq \nabla f(p)^\perp$$

Пошто $\perp$ обрће инклузију, то значи:

$$\nabla f(p) \subseteq \mathcal{L}in\{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_\ell(p)\},$$

(линеарни омотач)

тј. $(\exists \lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R})$:

$$\boxed{\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \dots + \lambda_\ell \nabla g_\ell(p).} \quad (\Lambda)$$

Нека је, за $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$,

$$L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j g_j(x).$$

L се назива Лагранжевом функцијом.

Последица: Неопходан услов за условне екстремуме функције f одговара неопходном услову за обичне екстремуме функције L као функције $n+\ell$ промењивих $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$.

Доказ: $dL = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_j} dx_j + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} d\lambda_j$

$dL = 0 \iff (M) \wedge (\Lambda)$ (задатак) ▨

Теорема: Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен, $f: V \to \mathbb{R}$ класе C^2, $M \subseteq V$ подмногострукост задата са $M = g^{-1}(0)$, где је $g := (g_1, \dots, g_\ell): V \to \mathbb{R}^\ell$ субмерзија класе C^2,

$L: V \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$; $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j g_j(x)$

Лагранжева функција и $p = (p_1, \dots, p_n)$, $\lambda^\circ = (\lambda_1^\circ, \dots, \lambda_\ell^\circ)$ неке критичне тачке.

Тада важи: ↓

(1) Ако је билинеарно пресликавање

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)(p,\lambda^0) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

позитивно дефинитно, тј. ако је

$$(\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T_pM) \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(p,\lambda^0)\xi_i\xi_j > 0$$

p је условни локални минимум функције $f|_M$.

(2.) Ако је билинеарно пресликавање из (1) негативно дефинитно, p је условни локални максимум функције $f|_M$.

(3) Ако билинеарно пресликавање из (1) на тачкама $(\xi,\xi) \in T_pM \times T_pM$ узима и строго позитивне и строго негативне вредности, онда p није тачка условног локалног екстремума функције $f|_M$.

Пример: Да ли функција $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ има екстремне вредности на скупу M задатој једначином $2x - y - 3 = 0$?

$g(x,y,z) = 2x - y - 3$, $L(x,y,z,\lambda) = f - \lambda g$

$\Rightarrow L(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2) - \lambda(2x - y - 3)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 2x - y - 3 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$P = (2,1,0)$ кандидат за условни екстремум

$$\sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}\right)(2,1,0,\tfrac{1}{2})\,\xi_i \xi_j = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2$$

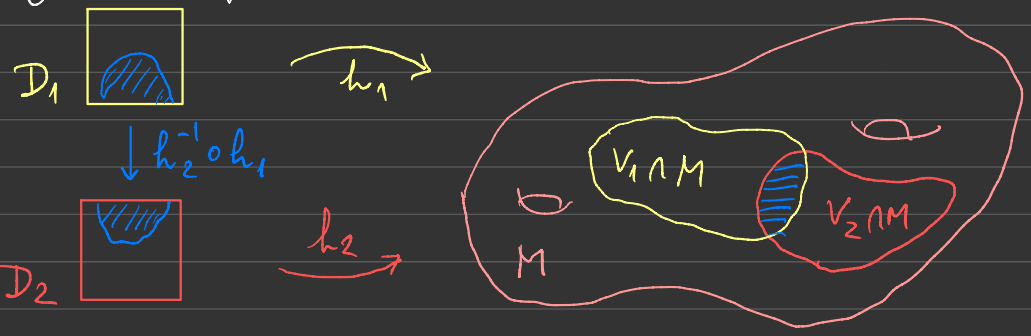
$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in T_P M \Leftrightarrow 2\xi_1 - \xi_2 = 0$

$\Rightarrow$ вредност билинеарне форме на $T_P M$ је $-3\xi_1^2 + \xi_2^2$ $\Rightarrow$ P није локални условни екстремум.

Задатак: Да ли функција $f(x,y) = x^2 - y^2$ има екстремне вредности на скупу $2x - y - 3 = 0$?

Апстрактне многострукости

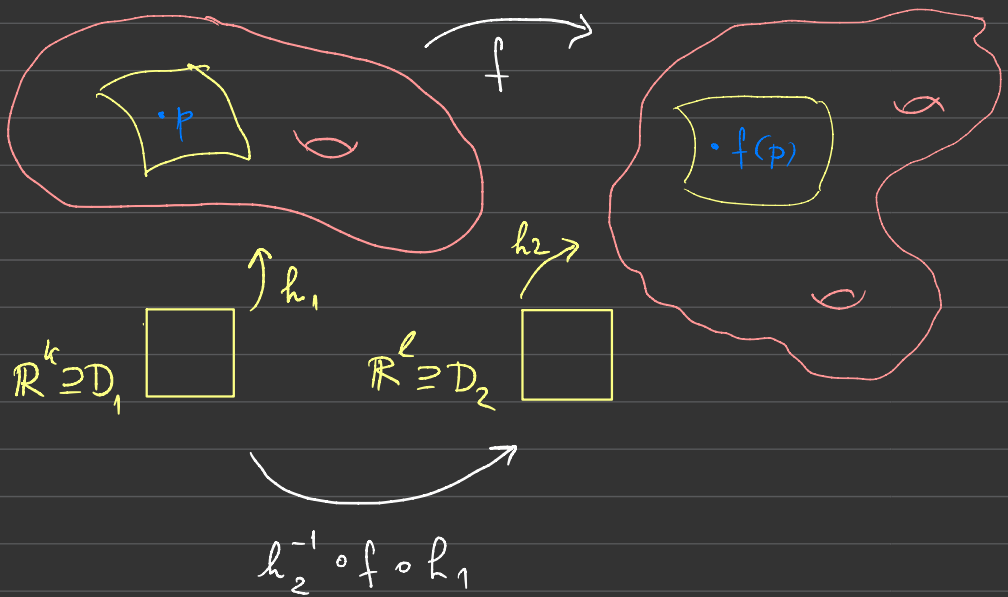
Лема: Нека је $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ k-димензиона подмногострукост класе C^p, нека су V_1, V_2 околине (у $\mathbb{R}^{k+l}$) тачке $p \in M$ и нека су $h_1 : D_1 \to V_1$, $h_2 : D_2 \to V_2$ две локалне C^p параметризације скупова $V_1 \cap M$ и $V_2 \cap M$. Тада је $h_2 \circ h_1^{-1} : D_1 \cap h_1^{-1}(V_2) \to D_2 \cap h_2^{-1}(V_1)$ дифеоморфизам класе C^p.



Доказ: Задатак!

Напомена: Претходна лема нам омогућава да дефинишемо глатке функције на подмногострукости: $f: M \to \mathbb{R}$ је глатка у околини тачке $p \in M$ ако је за неку параметризацију $h: D \to M$ околине тачке p пресликавање $f \circ h: D \to \mathbb{R}$ глатко (као пресликавање подскупа $D \subseteq \mathbb{R}^k$ у $\mathbb{R}$. Ова дефиниција не зависи од избора h, јер ако изаберемо другу параметризацију h_1, имамо $f \circ h_1 = (f \circ h) \circ (h^{-1} \circ h_1)$, па ако је $f \circ h$ класе C^p, онда је тако и $f \circ h_1$, као композиција пресликавања класе C^p ($h^{-1} \circ h_1$ је класе C^p на основу претходне леме).

Слично дефинишемо глатка пресликавања подмногострукости у подмногострукости.



Дефиниција: $f \text{ глатко у } p \iff h_2^{-1} \circ f \circ h_1 \text{ глатко у } h_1^{-1}(p)$

f класе $C^p \iff h_2^{-1} \circ f \circ h_1$ класе C^p.

Дефиниција је добра (не зависи од избора локалних параметризација) на основу претходне леме.

Дефиниција: **Тополошка многострукост** димензије n је Хаусдорфов тополошки простор M са пребројивом базом топологије, такав да свака тачка $p \in M$ има отворену околину која је хомеоморфна отвореној лопти у $\mathbb{R}^n$.

База топологије τ на M је фамилија подскупова $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(M)$ таква да $\forall V \in \tau$ може да се представи као унија скупова из $\mathcal{B}$. Нпр. отворене лопте су база топологије у нормираном простору.

Задатак: Доказати да је производ тополошких многострукости M, N тополошка многострукост и да је $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.

Дефиниција: Тополошка многострукост M је **глатка класе** C^p ако постоји бар једно отворено покривање $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и фамилија хомеоморфизама $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \varphi(U_\lambda) \subseteq \mathbb{R}^n$ таквих да је за све U_η, U_μ такве да је $U_\eta \cap U_\mu \neq \emptyset$, пресликавање

$$\varphi_\eta \circ \varphi_\mu^{-1} : \varphi_\mu(U_\eta \cap U_\mu) \to \varphi_\eta(U_\eta \cap U_\mu) \quad (*)$$

дифеоморфизам класе C^p.

Појам **глатког пресликавања** класе C^p се дефинише за пресликавања $f : M \to N$ глатких многострукости M и N класе C^p.

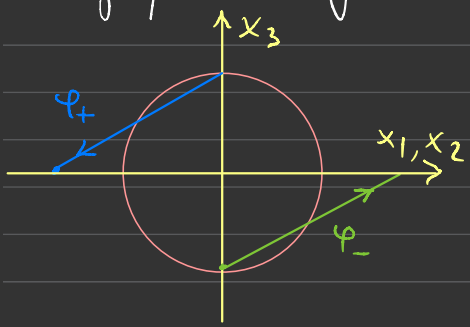
Напомена: Ако другачије не истакнемо, под појмом глатког пресликавања и глатке многострукости подразумеваћемо C^∞-глаткост.

Пар $(\varphi_\lambda, U_\lambda)$ називамо локалном картом, а $\varphi_\lambda^{-1}: \varphi(U_\lambda) \to U_\lambda$ локалном параметризацијом. Унија свих карата називамо атласом. Атласи $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{(V_\delta, \psi_\delta)\}_{\delta \in S}$ су компатибилни ако су $\varphi_\lambda \circ \psi_\delta^{-1}$ тамо дефинисана (кад год је $U_\lambda \cap V_\delta \neq \emptyset$). Унија два компатибилна атласа је атлас (=). (*) су диффеоморфизми). Максимални (у односу на инклузију) атлас називамо глатком структуром на многострукости.

Примери: ① Отворен подскуп $U \subseteq \mathbb{R}^n$ је глатка многострукост димензије n са атласом (U, id) (једна карта).

② Уопштење претходног примера: ако је M тополошки простор који је хомеоморфан отвореном подскупу, онда је он глатка многострукост са атласом који се састоји од само једне карте. Приметимо да је, ако је M покривена само једном картом, услов да је (*) дифеоморфизам привијачан.

③ Сфера $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ је глатка многострукост која може да се покрије са две карте: $U_\pm := S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1\}$



$$\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

$$\varphi_\pm(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_3}, \frac{x_2}{1 \mp x_3}\right) = \frac{1}{1 \mp x_3}(x_1 + i x_2)$$

Задатак: Доказати да је $\varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}(z) = 1/\bar{z}$ (инверзија равни $\mathbb{C}$ у односу на јед. S^1) и закључити да је испуњен услов из дефиниције многострукости да је $\textcircled{*}$ дифеоморфизам.

④ Уопштење: n-димензиона сфера

$$S^n := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

$$U_\pm := S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$$

$$\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi_\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 \mp x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n)$$

$\{(U_\pm, \varphi_\pm)\}$ је један атлас на S^n.

Можемо да дефинишемо и други атлас на S^n:

$$V_\pm^j := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_j > 0\}, \quad j \in \{1, \dots, n+1\}$$

$\psi_\pm^j : V_\pm^j \to \mathbb{R}^n$ пројектовање дефинисано изостављањем j-те координате (пројекција дуж x_j-осе).

Задатак: Доказати да су на обај начин дефинисана два компатибилна атласа.

Упутство: Оба атласа су дефинисана преко глатких функција, инверз и композиција глатких функција је глатка $\Rightarrow$ глатка.

⑤ M, N глатке многострукости димензија m, n

(U, φ) карта на M, (V, ψ) карта на N

$\varphi: U \to \mathbb{R}^m$, $\psi: V \to \mathbb{R}^n$

$\varphi \times \psi: U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$, $\varphi \times \psi(p, q) := (\varphi(p), \psi(q))$

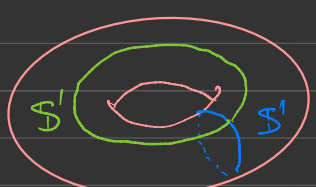
$\Rightarrow (U \times V, \varphi \times \psi)$ карта на $M \times N$

$\Rightarrow M \times N$ глатка многострукост димензије $m+n$.

⑥ Торус димензије n: $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$

(следећи случај ⑤).

$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$



Дефиниција: Нека је (X, τ) тополошки простор, а $\sim$ релација еквиваленције на скупу X, $X/\sim$ тад количнички простор а $\pi: X \to X/\sim$ канонска пројекција. **Количничка топологија** на скупу $X/\sim$ дефинише се са

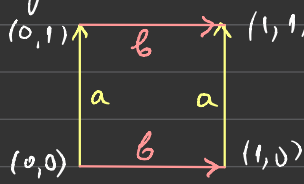
$$V \subseteq X/\sim \text{ је отворен} \iff \pi^{-1}(V) \in \tau$$

Напомена: Са овако дефинисаном топологијом на $X/\sim$ пројекција $\pi: X \to X/\sim$ је непрекидна.

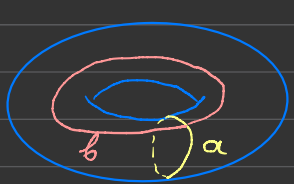
Примери: ① На $\mathbb{R}^n$ са $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$ је дефинисана релација еквиваленције

Количнички простор: $\mathbb{R}^n/\sim$

Друга ознака: $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (количничка дуж)



$\simeq$



$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq T^n$

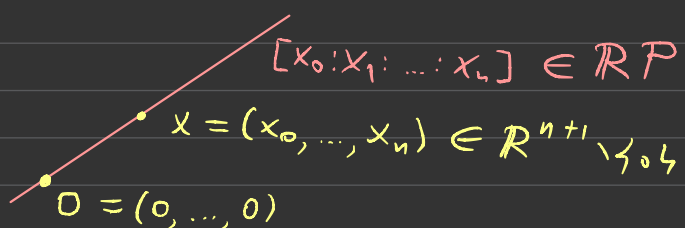
② Пројективни простор: На $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ је са

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}^*)\ x = t\cdot y$$

дефинисана релација еквиваленције.

$\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}/\sim$, $\pi: \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{RP}^n$

класе еквиваленције: праве кроз 0



$\tilde{U}_j := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_j \neq 0\}$, $U_j := \pi(\tilde{U}_j)$

$\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_j([x_0 : x_1 : \ldots : x_n]) := \left(\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$

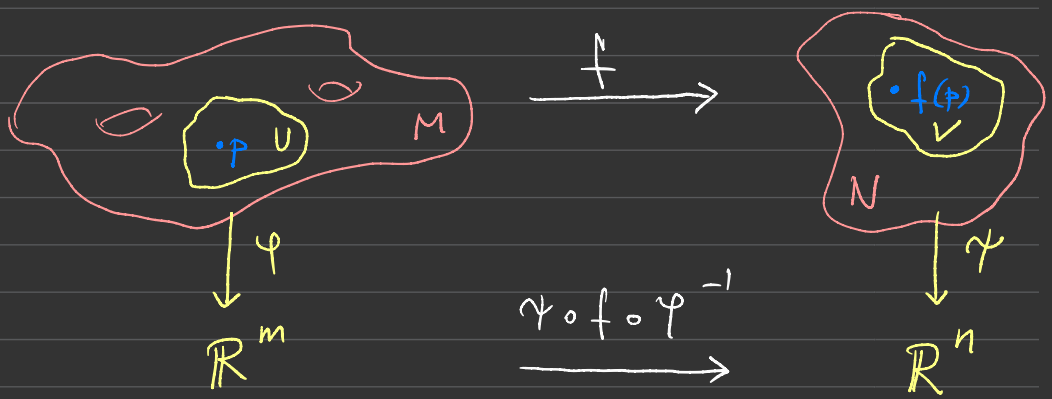
координатне функције су рационалне

$\Rightarrow$ свака координата је глатка

$\Rightarrow$ $\{(U_j, \varphi_j)\}_{0\le j\le n}$ атлас на $\mathbb{RP}^n$

$\Rightarrow$ $\mathbb{RP}^n$ је глатка многострукост димензије n.

Дефиниција: Пресликавање $f: M \to N$ је **глатко** ако за свако $p \in M$ постоје карте (U, φ) на M и (V, ψ) на N, такве да је $p \in U$, $f(p) \in V$ и $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ глатко.



Ранг пресликавања f у тачки $p \in M$ је ранг линеарног пресликавања $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$. Дефиниција не зависи од избора карата (U, φ) и (V, ψ) јер су (*) у дефиницији међусобно дифеоморфизми, па је њихов извод линеарни изоморфизам.

Пресликавање f је **имерзија** ако му је ранг у свакој тачки једнак $\dim M$, а **субимерзија** ако му је ранг у свакој тачки једнак $\dim N$.

Пресликавање $f: M \to N$ је **уланчање** ако има свако од следећа три својства

(1) f је инјективно

(2) f је имерзија

(3) $f: M \to f(M)$ је хомеоморфизам.

Пресликавање f је **дифеоморфизам** ако је оно хомеоморфизам и ако су f и f^{-1} глатка пресликавања.

Многострукости M и N су **дифеоморфне** ако постоји дифеоморфизам $f: M \to N$.

Напомена: Нека је $\dim M = m$, $\dim N = n$

Ако је $f: M \to N$ имерзија, из Теореме о рангу следи да за сваку тачку $p \in M$ постоје карте (U, φ) на M и (V, ψ) на N, такве да је $p \in U$, $f(p) \in V$ и f има у њима локални облик

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

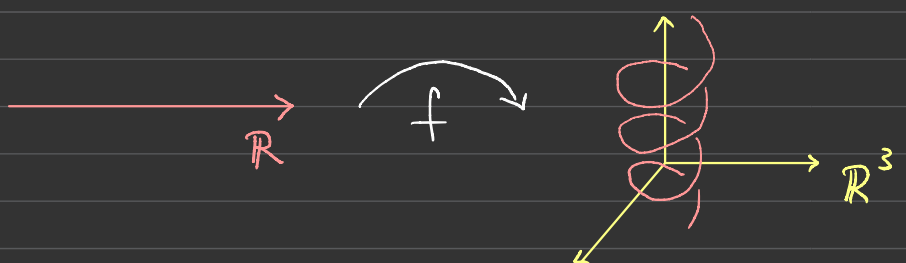
Слично, ако је f субмерзија, онда у неким локалним картама има облик

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

Наравно, имерзија постоји само ако је $m \leq n$, а субмерзија само ако је $n \leq m$. Интуитивно, дифеоморфне многострукости имају исту димензију.

Задатак: Нека је $f: M \to N$ имерзија. Доказати да свака тачка $p \in M$ има отворену околину $U \subseteq M$ такву да је $f|_U : U \to N$ уграњење.

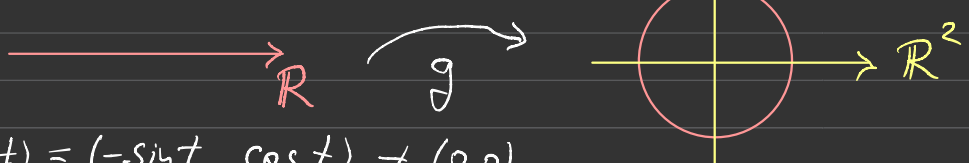
Примери: ① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$



$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1) \neq (0,0,0)$

f је уграњење.

② $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (\cos t, \sin t)$



$g'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$

g је имерзија, а није уграњење.

③ $f:]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^{-1}\cos t, t^{-1}\sin t)$

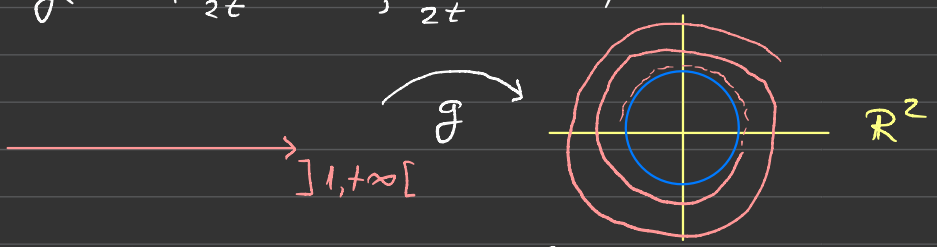


$(f'(t) = (0,0) \Leftrightarrow \operatorname{tg} t = -\operatorname{ctg} t \Leftrightarrow \perp) \Rightarrow f'(t) \neq (0,0)$

f je улагање

④ $g:]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

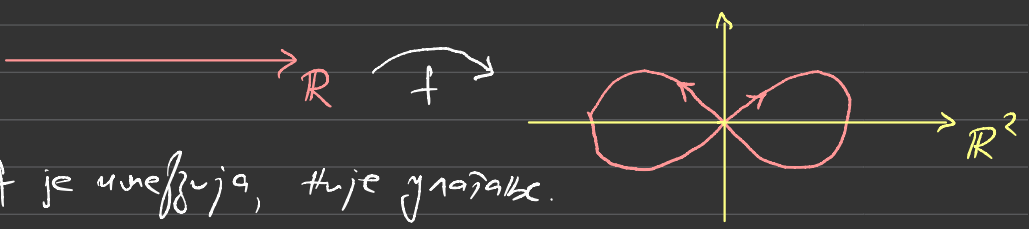
$g(t) = \left(\frac{t+1}{2t}\cos t, \frac{t+1}{2t}\sin t\right)$



(Намотавање око плавог круга)

g je улагање.

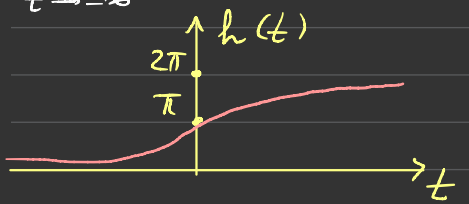
⑤ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$



f je имерзија, није улагање.

⑥ Модификација ⑤: Нека је $h: \mathbb{R} \to]0, 2\pi[$ строго растућа глатка функција таква да је

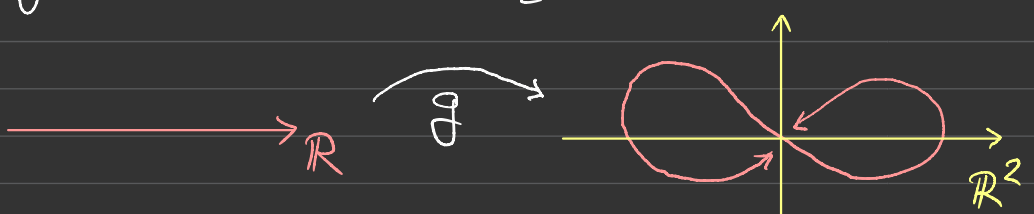
$\lim_{t \to -\infty} h(t) = 0$, $h(0) = \pi$, $\lim_{t \to +\infty} h(t) = 2\pi$



(на пример: $h(t) = \pi + 2\operatorname{arctg} t$)

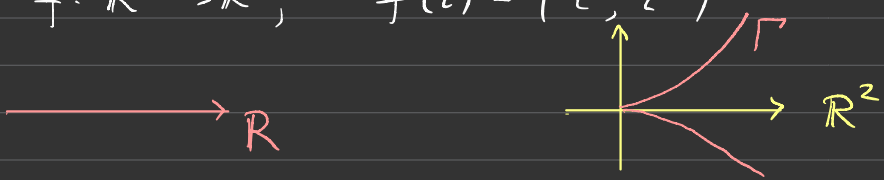
f као у ⑤, $g = f \circ h$, тј: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$g(t) = \left(2\cos\left(h(t) - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(h(t) - \frac{\pi}{2}\right)\right)$



g је инјективна имерзија која није уланчање, јер компонента мале околине тачке $(0,0)$ у $g(\mathbb{R})$ у фигури осмица има 4 компоненте повезаности, па $g: \mathbb{R} \to g(\mathbb{R})$ није хомеоморфизам.

⑦ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t^3)$



$f: \mathbb{R} \to \Gamma := f(\mathbb{R})$ је хомеоморфизам али $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ није имерзија, јер је $f'(0) = (0,0)$.

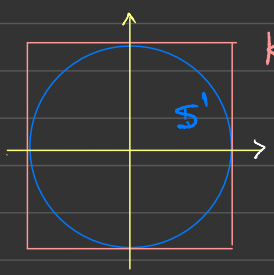
Важи и више од тога: не постоји имерзија (класе C^p за било које $p \geq 1$) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ таква да је $h(\mathbb{R}) = \Gamma$.

Доказ: h класе $C^p \Rightarrow h'$ непрекидно $\Rightarrow h'(t) \cdot \hat{\imath}$ непрекидна фамилија скупа тангентних на Γ. Како је $h(t_0) = (0,0)$ из непрекидности следи $h'(t_0) \cdot \hat{\imath} = 0$. Међутим $h'(t) \cdot \hat{\imath} \neq 0$ јер је h имерзија ▨

Последица: Крива $\Gamma := \{(x,y) \mid y^2 = x^3\}$ није глатка подмногострукост у $\mathbb{R}^2$.

Међутим: Γ јесте глатка многострукост, јер је покривена једном картом, па је услов да је (*) диффеоморфизам у дефиницији многострукости тривијалан (видети један од претходних примера)!

Задатак: $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1\}$



$S^1 := \{x^2 + y^2 = 1\}$

$= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

$h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$h(z) = z/|z|$

(а) Доказати да квадрат K није глатка подмногострукост у $\mathbb{R}^2$.

(б) Доказати да је $h|_K : K \to S^1$ хомеоморфизам.

(в) Користећи (б) доказати да је K глатка многострукост димензије 1.

Дефиниција: Нека је M глатка многострукост. Подскуп $N \subseteq M$ је **глатка подмногострукост** у M ако важи:

(1) N има структуру глатке многострукости

(2) инклузија $i: N \to M$, $i(x) = x$ је уланчање.

Задаци: ① Доказати да прва из Примера ⑦ задовољава (1), али не и (2).

② Нека су M и N глатке многострукости и $f: N \to M$ уланчање. Доказати да је $f(N)$ глатка подмногострукост у M.

③ Нека је M глатка многострукост и $N \subseteq M$ глатка подмногострукост; $\dim M = m$, $\dim N = n$. Доказати да свака тачка $p \in N$ има околину U у M такву да постоји дифеоморфизам

$\varphi: U \to B_\rho := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < \rho\}$ такав да је

(1) $\varphi(p) = 0$

(2) $\varphi(U \cap N) = \{x \in B_\rho \mid x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}$.

Упутство: следити идеју доказа сличног тврђења за подмногострукости у $\mathbb{R}^m$.

④ Нека су M и N глатке многострукости, $\dim M = m$, $\dim N = n$ и нека је $f: M \to N$ глатко пресликавање које има константан ранг r на M. Доказати да је за свако $q \in f(M)$ скуп $f^{-1}(q)$ затворена глатка подмногострукост у M димензије $m-r$.

Пример: пресликавање

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x_1, \dots, x_{n+1}) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

и познати (још један) доказ да је S^n многострукост.

Напомена: Ако је дат пресликавање f у тачки $p \in M$ максималак (дакле једнак макоој од димензија M и N), онда је он максималак (па тиме и константан) у некој отвореној околини V тр. То је због тога што максималност дата у тачки p значи да је неки максималан минор матрице $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(p)$ различит од 0, а онда је он различит од 0 и у некој околини тачке p, јер су елементи матрице $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$ непрекидне функције (f, ψ, φ су глатка пресликавања, дакле бар класе C^1). У том случају, задатак (4) може да се примени на V уместо M.

Тачка p у којој ранг пресликавања f није максималан назива се ситуационом тачком, а вредност $f(p)$ у њој ситуационом вредношћу. Тачка $q \in N$ је регуларна вредност за f ако није ситуациона (експлицитно, по овој дефиницији, и тачке $q \in N \setminus f(M)$ су регуларне вредности).

Из задатка ④ и ове напомене следи да ако је $q \in N$ регуларна вредност, онда је $f^{-1}(q)$ или $\emptyset$ (ако $q \notin f(M)$) или подмногострукост у M. При томе важи:

$\dim M \leq \dim N \Rightarrow \dim f^{-1}(q) = 0$

$\dim M \geq \dim N \Rightarrow \dim f^{-1}(q) = \dim N - \dim M.$

(Задатак: Доказати ово!)

⑤ Нека је

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2, \quad f(t) = (e^{it}, e^{i\alpha t}).$$

Доказати:

(а) $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{T}^2$

(б) f је инјекција

(в) $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow f$ није 1-1

(г) $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(\mathbb{R})$ је компактна глатка подмногострукост у $\mathbb{T}^2$

(д) $\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f$ је 1-1

(ђ) $\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(\mathbb{R})$ је густо у $\mathbb{T}^2$

(е) $\alpha \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(\mathbb{R})$ није подмногострукост

(ж) $f(\mathbb{R})$ има структуру глатке многострукости.

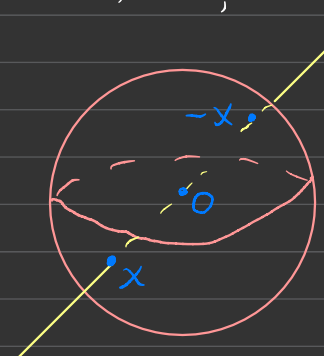
Упутство за (ђ): $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; посматрати путеве са нагибом $\alpha \notin \mathbb{Q}$ у $\mathbb{R}^2$; доказати $\overline{\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

⑥ Доказати да следећи скупови имају структуру глатке многострукости која је дифеоморфна пројективном простору $\mathbb{RP}^n$:

(а) $S^n/_{x \sim -x}$

(б) $B^n/_{\sim}$, где је $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ лопта у $\mathbb{R}^n$, а $\sim$ релација еквиваленције дата са $x \sim y$ ако и само ако је класа еквиваленције $x^\sim$ глатке $x \in B^n$

$$x^\sim = \begin{cases} \{x\}, & \text{ако је } \|x\| < 1 \\ \{x, -x\}, & \text{ако је } \|x\| = 1. \end{cases}$$



Дефиниција: **Разлагање јединице на M** је фамилија C^∞ функција $\rho_\lambda : M \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \Lambda$ која има следеће особине:

(1) $(\forall \lambda \in \Lambda)(\forall p \in M)\ \rho_\lambda(p) \geq 0$

(2) За $\forall p \in M$ постоји околина $U \ni p$ на којој је $\sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda$ коначна сума

(3) $(\forall p \in M) \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) = 1$.

Теорема 1: За свако отворено покривање $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ глатке многострукости M постоји разлагање јединице $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ такво да је $\operatorname{supp} \rho_\lambda \subseteq U_\lambda$.

Подсетник:

$$\operatorname{supp} \rho_\lambda := \overline{\{p \in M \mid \rho_\lambda(p) \neq 0\}}.$$

Теорема 2: За $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ као у Теореми 1 постоји фамилија функција $\{\rho_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ са компактним носачем, тако да

$$(\forall \sigma\in\Sigma)(\exists \lambda\in\Lambda)\ \operatorname{supp}\rho_\sigma \subseteq U_\lambda.$$

Пример: Нека је $M=\mathbb{R}$, и нека је $\{U_\lambda\}$ покривање једним скупом $U=\mathbb{R}$. Тада је $\rho\equiv 1$ функција једнака из Теореме 1.

Конструкција функција једнака из Теореме 2:

Нека је $\{a_\sigma\in\mathbb{R} \mid \sigma\in\Sigma\}$ скуп тачака такав да:

(1) $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}]a_\sigma-1, a_\sigma+1[= \mathbb{R}$

(2) $\forall x\in\mathbb{R}$ припада коначном броју интервала $]a_\sigma-3, a_\sigma+3[$.

Нека је $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ функција задата са

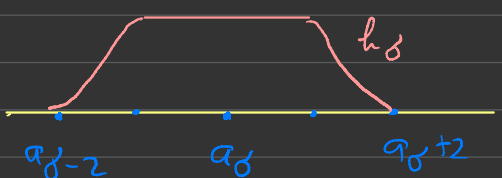
$$g(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, & t>0 \\ 0, & t\le 0 \end{cases}$$

Из анализе 1 знамо да је $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, па је

$$h(x) := \frac{g(4-x^2)}{g(4-x^2) + g(x^2-1)} \qquad (*)$$

такође класе C^∞ и задовољава

$h \equiv 1$ на $[-1,1]$ и $h \equiv 0$ на $\mathbb{R} \setminus]-2,2[$.



Ако на сличан начин на интервалу око сваке тачке a_σ конструишемо такву функцију h_σ, онда је са

$$\rho_\sigma := \frac{h_\sigma}{\sum_{\sigma \in \Sigma} h_\sigma}$$

дефинисано разлагање јединице које има својства из Теореме 2 (Задатак!)

Дефиниција: Фамилија $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ из Теореме 1 назива се разлагањем јединице које је потчињено покривању $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Напомена 1: Из претходног примера се види да је (у општем случају) немогуће наћи разлагање јединице које је у исто време потчињено датом покривању (као у Теореми 1) и има компактан носач (као у Теореми 2).

Напомена 2: Конструкција из претходног примера се директно преноси на случај $M = \mathbb{R}^n$: само уместо покривања интервалима треба изабрати покривање лоптама

$B]a_\delta;1[$, $B]a_\delta;3[$ са својством аналогним (**)

а уместо (*) C^∞ функцију

$$h(x) := \frac{g(4-\|x\|^2)}{g(4-\|x\|^2)+g(\|x\|^2-1)}.$$

Да би се ова идеја уопштила у доказ за општу многострукост M, потребно је покрити многострукост картама које су дифеоморфне лоптама $B]a_\delta;1[$, $B]a_\delta;3[$ које имају својства аналогна (**).

То је могуће захваљујући тополошком својству паракомпактности, које следи, из дефиниције многострукости (тачније из захтева да постоји пребројива база топологије). За прецизније детаље видети скрипту.

Теорема (Витнијева): Свака глатка n-димензиона многострукост M може да се глатко уложи у $\mathbb{R}^{2n+1}$, тј. постоји C^∞ улагање $f: M \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

Другим речима: свака апстрактна глатка многострукост је дифеоморфна подмногострукости у еуклидском простору.

Доказаћемо слабије тврђење:

Теорема: Свака компактна глатка многострукост M може глатко да се уложи у $\mathbb{R}^\ell$ за довољно велико ℓ.

Доказ: Користећи компактност, можемо да изаберемо коначну фамилију карата која покрива M и задовољава аналогију (**).

Претпоставимо да је $\{(U_j, \varphi_j)\}_{1 \le j \le k}$ атлас на M, такав да је $\varphi_j(U_j) = B]0;3[$ и да $V_j := \varphi_j^{-1}(B]0;1[)$ такође покривају M. За свако j конструишемо функцију $h_j : U_j \to \mathbb{R}$ попут (*). Пошто је у (*) $h \equiv 0$ ван $B]0;2[$, можемо све h_j да продужимо до глатких функција $h_j : M \to \mathbb{R}$ тако што ставимо $h(x) = 0$ за $x \in M \setminus U_j$. Нека је $n := \dim M$. Дефинишимо пресликавање

$$f : M \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{k} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{k} =: \mathbb{R}^\ell$$

$$f(p) = (h_1(p)\varphi_1(p), \dots, h_k(p)\varphi_k(p), h_1(p), \dots, h_k(p)).$$

f је глатко пресликавање и матрица његовог извода (у локалним координатама) има k блокова $n \times n$ и k блокова $1 \times n$.

Пошто $(\forall p \in M)(\exists V_j)\ p \in V_j$, а $h_j \equiv 1$ на V_j, биће $h_j \varphi_j = \varphi_j$ у околини тачке p, па је $n \times n$ блок Јакобијеве матрице који одговара координати $h_j \varphi_j = \varphi_j$ несингуларан у тачки p (јер је φ_j дифеоморфизам), дакле ранга n. Али то значи да је и пресликавање f ранга $n = \dim M$, тј. да је f имерзија.

Довољно је још да докажемо да је f 1-1, због тополошке чињенице да је непрекидна бијекција на компактном домену хомеоморфизам (задатак).

Нека је $f(p) = f(q)$. Тада је $(\forall j)\ h_j(p) = h_j(q) \wedge h_j(p)\varphi_j(p) = h_j(q)\varphi_j(q)$.

Из $\bigcup_{j=1}^{k} V_j = M$ следи $(\exists j)\ g_j(p) = g_j(q) \neq 0$ за то j $\varphi_j(p) = \varphi_j(q)$. Пошто је φ_j дифеоморфизам (дакле и 1-1) следи $p = q$. $\blacksquare$

Последица: Сваку глатку многострукост можемо да посматрамо као подмногострукост у неком амбијенту $\mathbb{R}^\ell$.

Извод пресликавања $f: M \to N$

$M \subseteq \mathbb{R}^\ell$, $N \subseteq \mathbb{R}^k$ глатке многострукости

$f: M \to N$ глатко пресликавање

Први извод у тачки $p \in M$ је линеарно пресликавање

$$f_*(p): T_pM \to T_{f(p)}N$$

Друге ознаке за f_*: Df, df, Tf, f'.

$f_*(p)$ дефинишемо на следећи начин.

Подсетимо се да је једна од дефиниција тангентног простора T_pM подмногострукости $M \subseteq \mathbb{R}^l$ (од 3 дефиниције колико смо до сада дали) да је то простор вектора тангентних на криве $\gamma :]-\delta, \delta[\to M$ у тачки $p = \gamma(0)$, тј:

$$\xi \in T_pM \iff \xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma(t) \quad \text{А}$$

за неку глатку криву

$$\gamma :]-\delta, \delta[\to M, \quad \gamma(0) = p. \quad \text{Б}$$

Дефиниција: Извод пресликавања $f : M \to N$ у тачки p у правцу вектора $\xi \in T_pM$ задатог са А и Б је

$$\boxed{f_*(p) \cdot \xi := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \gamma(t).}$$

Напомена: $f: M \to N \subseteq \mathbb{R}^k$

$\mathbb{R} \ni]-\delta, \delta[\xrightarrow{\gamma} M \xrightarrow{f} N \subseteq \mathbb{R}^k$

$\frac{d}{dt} f\circ\gamma$ је извод пресликавања

$f\circ\gamma :]-\delta,\delta[\to N \subseteq \mathbb{R}^k$ (T)

тј. $f_*(p)\xi$ је извод у правцу ξ.

(T) дефинише криву у N кроз тачку $f\circ\gamma(0) = f(\gamma(0)) = f(p)$, па је њен извод у тој, $(f\circ\gamma)'(0)$, по дефиницији вектор у тангентном простору $T_{f(p)}N$. Из правила за извод сложене функције следи да из $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ и $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$ следи $(f\circ\gamma_1)'(0) = (f\circ\gamma_2)'(0)$, па обе дефиниција не зависи од избора криве γ која дефинише вектор ξ.

Тиме смо дефинисали линеарно пресликавање

$$f_*(p) : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$$

свођењем на извод у правцу вектора у еуклидском амбијенту. Да бисмо ослободили ову дефиницију амбијента, потребна нам је „унутрашња" дефиниција тангентног простора на апстрактној глаткој многострукости M, независна од амбијента (и без претпоставке да се M налази у неком амбијенту).

Геометријски приступ: На скупу глатких кривих $\gamma :]-\delta, \delta[\longrightarrow M$ таквих да је $\gamma(0) = p$ дефинишемо релацију еквиваленције:

$\gamma_1 \sim \gamma_2$ ако у некој карти (U, φ) која садржи тачку p важи

$$(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0). \qquad \sim$$

Приметимо да овде диференцирамо композиције

$$]-\delta, \delta[\xrightarrow{\gamma_1, \gamma_2} U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n,$$

па су изводи у $\sim$ познати објекти, тј. изводи у еуклидском простору.

Пошто су смене координата у картама дифеоморфизми, из правила за извод композиције и чињенице да је извод дифеоморфизма линеарни изоморфизам следи да, ако $\sim$ важи у једној карти, онда важи у свакој (задатак!).

Дефиниција: Класа еквиваленције криве у релацији $\sim$ назива се **тангентним вектором** на M у тачки p. Скуп свих тангентних вектора у тачки p назива се **тангентним простором** у тој тачки и означава са T_pM. **Први извод** пресликавања $f: M \to N$ је пресликавање $f_*(p): T_pM \to T_{f(p)}N$ које класи еквиваленције криве γ придружује класу еквиваленције криве $f \circ \gamma$:

$$f_*(p): T_pM \to T_{f(p)}M$$

$$\boxed{f_*(p)(\gamma^\sim) := (f \circ \gamma)^\sim}$$

ознака: $x^\sim := \{y \mid x \sim y\}$ (класа еквиваленције).

Аналитички приступ: Нека је $\mathcal{A}$ алгебра (тј. векторски простор са множењем) над пољем $\mathbb{K}$. Линеарно пресликавање

$$D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

назива се диференцирањем или деривацијом ако задовољава Лајбницово правило

$$D(a \cdot b) = Da \cdot b + a \cdot Db$$

Нека је $C^\infty(p)$ алгебра C^∞ функција $a : V \to \mathbb{R}$ дефинисаних у неком отвореном скупу $p \in M$.

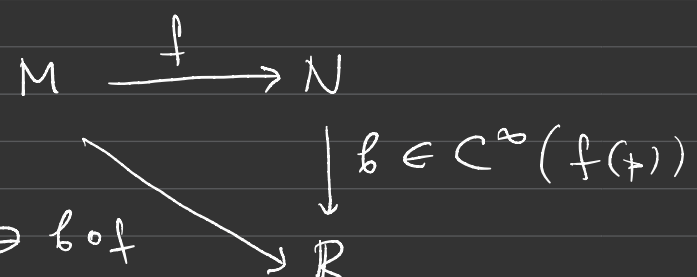
Дефиниција: Деривацију алгебре $C^\infty(p)$ над пољем $\mathbb{R}$ називамо тангентним вектором на M у тачки p. Скуп свих тангентних вектора зовемо тангентним простором T_pM.

Ако је $f: M \to N$ глатко пресликавање, његов извод у тачки p је пресликавање $f_*(p): T_pM \to T_{f(p)}M$ које дефинише $\xi \in T_pM$ на алгебри $C^\infty(p)$ индукује дериванију $\eta \in T_{f(p)}N$ на алгебри $C^\infty(f(p))$ дефинисану са

$$\eta(b) := \xi(b \circ f)$$

тј:

$$\boxed{(f_*(p)\xi)\, b = \xi(b \circ f)}$$



Претходне две дефиниције су еквивалентне захваљујући следећој теореми:

Теорема: Нека је $U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп и $p \in U$. За сваку деривацију $D: C^\infty(p) \to C^\infty(p)$ алгебре $C^\infty(p)$ постоји јединствен вектор $\xi \in T_pU$ такав да је

$$Df(p) = df(p) \cdot \xi.$$

За доказ суштински потребне две леме.

Лема 1: Нека је D деривација на $C^\infty(p)$. Тада је $Df = 0$ за сваку функцију f која је константна у неком околном тачке p.

Доказ: Из линеарности (једноставније, из хомогености) D следи да је довољно доказати лему за функцију $f \equiv 1$. Из Лајбницовог правила следи

$$D1 = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D1 + D1 \cdot 1 = 2D1 \Rightarrow D1 = 0. \quad \blacksquare$$

Лема 2: Нека је $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(U)$ и $a \in U$. Тада постоје лопта $B := B]p;\varepsilon[\subseteq U$ и функције $g_1, \dots, g_n \in C^\infty_{\mathbb{R}}(B)$ такве да важи

(1) $g_j(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$

(2) $f(x_1, \dots, x_n) = f(p) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - p_j)\, g_j(x)$

Доказ: Нека је $\varepsilon > 0$ такво да је $B := B]p;\varepsilon[\subseteq U$.

Тада је, за $x := (x_1, \dots, x_n) \in B$

$$f(x) = f(p) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(p + t(x-p))\,dt$$

$$= f(p) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - p_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(p + t(x-p))\,dt$$

Тражене функције су

$$g_j(x) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(p + t(x-p))\,dt$$

Својство (1) је очигледно, а „C^∞-својство" следи из правила за комутирање извода и интеграла. $\blacksquare$



Доказ Тејлорове: Нека је D дефинисана на $C^\infty(p)$ и нека је $c_j := D\pi_j$, где је $\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$.

На основу леме 2, $f \in C^\infty(p)$ има запис

$$f(x) = f(p) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - p_j)\, g_j(x)$$

$$\Rightarrow Df(x) = D(f(p)) + \sum_{j=1}^{n} \left(D(x_j - p_j) \cdot g_j(x) + (x_j - p_j)\, Dg_j(x) \right)$$

Из леме 1 следи $D(f(p)) = 0$ и

$$D(x_j - p_j) = D\pi_j(x) - Dp_j = c_j - 0 = c_j$$

па је

$$Df(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j\, g_j(x) + (x_j - p_j)\, Dg_j(x) \right)$$

Одавде, имајући у виду својство (1) леме 2 добијамо, за $x = p$:

$$Df(p) = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = df(p) \cdot \xi$$

за $\xi = (c_1, \dots, c_n)$.



Последица 1: T_pM је векторски простор

Доказ: Линеарна комбинација деривација је деривација. $\blacksquare$

Последица 2: $\dim M = n \Rightarrow \dim T_pM = n$

Доказ: $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ карта, $p \in U$

$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ је база за $T_{\varphi(p)}U$

$\Rightarrow (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, (\varphi^{-1})^* \frac{\partial}{\partial x_n}$ је база за T_pM. $\blacksquare$

Напомена: За $f : M \to N$, $p \in M$, $\xi \in T_pM$ уместо $f_*(p)\xi$ често пишемо $f_*\xi$, изостављајући прву променљиву p кад је очигледно о којој тачки се ради.

Задатак: $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^n$ глатка крива.

Доказати: $\frac{d\gamma}{dt}(0) = \gamma_*(0) \cdot \frac{d}{dt}$.

Дефиниција: Унија $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ свих тангентних простора на глатку многострукост M назива се њеним тангентним раслојењем.

Ако је $\dim M = n$, онда је TM глатка многострукост димензије $2n$: ако је $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ карта на M, онда је $\varphi \times \varphi_* : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ карта на TM.

Глатко векторско поље на M је глатко пресликавање $X: M \to TM$ за које важи $X(p) \in T_pM$ (свакој тачки $p \in M$ X придружује тангентни вектор у тој тачки. Често пишемо X_p уместо $X(p)$.

Дуални објекти су **котангентни простор**

$$T_p^*M := \mathcal{L}(T_pM; \mathbb{R})$$

и **котангентно раслојење**

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Ако је $f: M \to N$ тачка сурјекција, онда је $f_*: TM \to TN$.

Дуално пресликавање је

$$f^*: T^*N \to T^*M$$

дефинисано као линеарно-алгебарски дуал на сваком $T_{f(p)}^*N$:

$l \in T_{f(p)}^*N \Rightarrow l: T_{f(p)}N \to \mathbb{R}$ линеарно

$$f^*(p)\, l := l \circ f_*(p)$$

Краћи запис: $\boxed{f^* l = l f_*}$.

По аналогији са векторским пољима, пресликавање $\alpha: M \to T^*M$ за које је $\alpha(p) \in T_p^*M$ називамо ковекторско поље или диференцијалном 1-формом. Уместо $\alpha(p)$ често пишемо α_p, а некад (као и код векторских поља и извода) изостављамо p и пишемо само α.

Дефиниција: ако је $\pi: E \to M$ пројекција, пресликавање $s: M \to E$ које задовољава $\pi \circ s = id_M$ (тј. $s(p) \in \pi^{-1}(p)$) назива се сечењем на E. Специјално:

$$\pi: TM \to M, \quad \pi(T_pM) = \{p\}$$

Векторско поље је сечење на TM.

Слично: 1-форма је сечење на T^*M.

3. Мрежа функција

Дефиниција: *Решетка реалних функција* на скупу T је векторски потпростор E реалног векторског простора $\mathbb{R}^T$ који има својство:

$$f, g \in E \Rightarrow \min\{f, g\} \in E \wedge \max\{f, g\} \in E.$$

Ако је дата решетка E, њене елементе називамо *елементарним функцијама*.

Напомена: Релација $\leq$ на $\mathbb{R}$ индукује релацију поретка на $\mathbb{R}^T$; min и max о којима је реч у дефиницији су изведени из те релације поретка. Експлицитније:

$$\min\{f, g\}(t) := \min\{f(t), g(t)\}$$

$$\max\{f, g\}(t) := \max\{f(t), g(t)\}.$$

Лема: Векторски потпростор $\mathcal{E}$ простора $\mathbb{R}^T$ је решетка ако и само ако важи

$$f \in \mathcal{E} \Rightarrow |f| \in \mathcal{E}.$$

Доказ: ($\Rightarrow$) $\mathcal{E}$ решетка, $f \in \mathcal{E}$, $0 \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := -\min\{f, 0\} \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow |f| = f^+ + f^- \in \mathcal{E}$

($\Leftarrow$) $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow |f-g| \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow \max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \in \mathcal{E}$

$\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|) \in \mathcal{E}$ ▨

Дефиниција: Нека је $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{R}^T$ решетка. Елементарни интеграл на $\mathcal{E}$ је линеарно пресликавање $I : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ које има следећа својства:

(E1) $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$ (позитивност)

(E2) $f_n \searrow 0 \Rightarrow I(f_n) \to 0$ (непрекидност)

Напомена: Као и у претходној настави, појмови у (E1), (E2) изведени су из релације поретка на $\mathbb{R}^T$ која је индукована релацијом $\leq$ на $\mathbb{R}$. Дакле: $f \geq 0$ у (E1) значи $(\forall t \in T)\ f(t) \geq 0$, а $f_n \downarrow 0$ у (E2) значи $(\forall t \in T)$ низ $f_n(t)$ у $\mathbb{R}$ опадајуће тежи нули.

Услов (E2) може да се замени еквивалентним условом

(E2') $f_n \uparrow f_\infty \in \mathcal{E} \Rightarrow I(f_n) \longrightarrow I(f_\infty)$,

јер из линеарности $I: \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ следи

$I(f_\infty) - I(f_n) = I(f_\infty - f_n)$,

а $f_n \uparrow f_\infty$ ако и само ако $f_\infty - f_n \downarrow 0$,

па је (E2) $\Longleftrightarrow$ (E2').

Примери: ① $T = \{t_1, \dots, t_\ell\}$ коначан скуп, $\mathcal{E} := \mathbb{R}^T$. Тада је са $I(f) := \sum_{j=1}^{\ell} f(t_j)$ дефинисан елементарни интеграл $I: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$.

② T локално компактан метрички (или Хаусдорфов тополошки) простор, $\mathcal{E} := C_c(T)$ простор непрекидних функција $f: T \to \mathbb{R}$ које имају компактан носач.

Дефиниција: Радонов интеграл је позитивно линеарно пресликавање $I: C_c(T) \to \mathbb{R}$.

- позитивност: $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$
- линеарност: $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $f, g \in C_c(T)$.

Позитивност је својство (E1) из дефиниције елементарног интеграла.

Докажатели да Радонов интеграл задоволува и својство (E2), т.е. да је Радонов интеграл линеарен елементарниот интеграл.

Нека је $f_n \in C_c(T)$, $f_n \searrow 0$ и нека је K_n носач функције f_n, т.е.

$$K_n := \operatorname{supp} f_n = \overline{T \setminus f_n^{-1}(\{0\})}$$

$$f_n \searrow 0 \Rightarrow f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \dots \geq 0$$

$$\Rightarrow K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

Нека је $\psi \in C_c(T)$ функција за која је $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi \equiv 1$ на K_1.

Бидејќи T метрички простор, една таква функција е

$$\psi(t) = \frac{d(t, T \setminus K_1)}{d(t, K_1) + d(t, T \setminus K_1)},$$

видете Урисонова лема за тополошки. ∎

Из Динијеве теореме следи $f_n \rightrightarrows 0$ на K_1 (равномерна конвергенција!), па $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow f_n|_{K_1} < \varepsilon$

Пошто је $(\forall n)\ \operatorname{supp} f_n \subseteq K_1$, одатле следи

$$f_n := f_n \cdot \chi_{K_1} \leq f_n \cdot \psi < \varepsilon \psi$$

па је, због позитивности и линеарности

$$I(f_n) < \varepsilon I(\psi),$$

што значи да $I(f_n) \to 0$.

③ Диракова делта-функција:

T као у ②, $a \in T$ фиксирана тачка,

$\delta_a : C_c(T) \to \mathbb{R}$, $\delta_a(f) := f(a)$

је пример Радоновог (па самим тим и елементарног) интеграла. Ако је T само скуп, има смисла $\delta_a : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$.

④ Риманов интеграл из Анализе 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} : C_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

или, општије, Риман–Стилтјесов интеграл, су примери Радоновог (тј. самим тим и елементарног) интеграла.

Задатак: Доказати то!

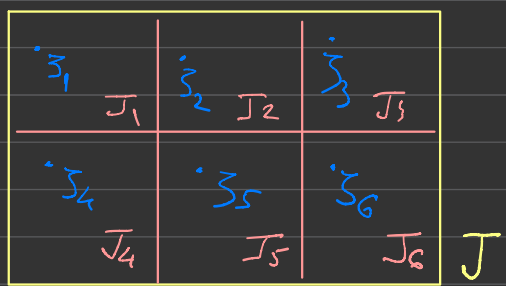
⑤ Риманов интеграл у $\mathbb{R}^k$.

Нека је $T = \mathbb{R}^k$ у Примеру ② (Радонов интеграл на локално компактном простору).

$f \in C_c(\mathbb{R}^k) \Rightarrow \operatorname{supp} f \subseteq J$ за неки k-димензиони квадар, јер је сваки компактан скуп у $\mathbb{R}^k$ ограничен, тј. садржан у неком квадру.

$J \subseteq \mathbb{R}^k$ квадар (Декартов производ k интервала у $\mathbb{R}$).

$\mathcal{P}_J$ – скуп свих подела квадра J са уоченим тачкама



$P = \{(J_1, \xi_1), (J_2, \xi_2), \dots, (J_6, \xi_6)\}$ подела са уоченим тачкама

Параметар поделе P је број

$$\boxed{\lambda(P) := \max\{\operatorname{diam}(J_i) \mid (J_i, \xi_i) \in P\}}$$

Дефинишемо филтер $\mathcal{F}_J$ на $\mathcal{P}_J$:

$$\boxed{X \in \mathcal{F}_J \overset{1<d}{\iff} (\exists d > 0)\ \lambda(P) < d \Rightarrow P \in X}$$

Пар $(\mathcal{P}_J, \mathcal{F}_J)$ назива се простором подела.

$f : J \to \mathbb{C}$ комплексна функција на квадру J

Дефинишимо функцију $\Phi_f : \mathcal{P}_J \to \mathbb{C}$

$$\Phi_f(P) := \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_i)\,\mu(J_i)$$

где је $\mu(\cdot)$ запремина квадра (производ дужина интервала гији је он Декартов производ) и сумирање се врши по свим $(J_i, \xi_i) \in P$.

Риманов интеграл функције f по квадру J је број

$$\boxed{\int_J f(x)\,dx := \lim_{\mathcal{F}_J} \Phi_f}$$

уколико лимес на десној страни постоји (и у том случају кажемо да је f интеграбилна по Риману).

6. Риманов интеграл – други приступ

$f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} f \subseteq J$, J – квадар

P – подела квадра J на квадре $J_1, \dots, J_\ell$.

$M_i := \sup \{ f(x) \mid x \in J_i \}$

$m_i := \inf \{ f(x) \mid x \in J_i \}$

Горња и доња Дарбуова сума:

$$S(f;P) := \sum_{i=1}^{\ell} M_i \, \mu(J_i)$$

$$s(f;P) := \sum_{i=1}^{\ell} m_i \, \mu(J_i)$$

P_1, P_2 произвољне поделе:

$$s(f;P_1) \le S(f;P_2) \qquad (*)$$

Горњи и доњи Дарбуов интеграл:

$$\overline{\int} f(x)\,dx := \inf_P S(f;P)$$

$$\underline{\int} f(x)\,dx := \sup_P s(f;P)$$

(*) $\Rightarrow \underline{\int} f(x)\,dx \leq \overline{\int} f(x)\,dx$

Дефиниција: f је интеграбилна по Риману ако је $\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx$.

Ознака:

$$\int_J f(x)\,dx := \underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx.$$

Напомена: Непрекидност функције f у (5) и (6) није потребна. У (6) потребна је ограниченост (због постојања sup, inf у дефиницији), док је у (5) ограниченост последица интеграбилности. Доказ обе тврдње, као и тврдње да су (5) и (6) еквивалентне дефиницје Римановог интеграла је исти као у Анализи 1.

Примери ⑤ и ⑥ за функције из $C_c(\mathbb{R}^k)$ су примери Радонових (а самим тим и елементарних) интеграла.

Лема: За Радонов интеграл

$$I : C_c(T) \to \mathbb{R}$$

важи

(1) $f \le g \Rightarrow I(f) \le I(g)$

(2) $|I(f)| \le I(|f|)$

Доказ: (1) $f \le g \Leftrightarrow 0 \le g - f$

Одатле, из својства (E1) следи

$$0 \le I(g-f) = I(g) - I(f)$$

(2) Из $-f \le |f| \le f$ и (1) следи

$$-I(f) = I(-f) \le I(|f|) \le I(f)$$

$$\Rightarrow |I(f)| \le I(|f|)$$



Теорема: Нека је T локално компактан Хаусдорфов простор, $K \subseteq T$ компактан подскуп и $C(T;K)$ скуп функција из $C_c(T)$ чији је носач у K. Тада је рестрикција

$$I : C(T;K) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ограничен интегрални функционал у односу на норму

$$\|f\|_K := \sup \{ |f(t)| \mid t \in K \}.$$

Доказ: Нека је $\Psi \in C_c(T)$ функција са својствима $0 \leq \Psi \leq 1$ и $\Psi \equiv 1$ на K.

Тада је

$$(\forall f \in C(T;K))(\forall t \in T)\ |f(t)| \leq \|f\|_K \cdot \Psi(t)$$

па је $|I(f)| \leq I(|f|) \leq I(\Psi) \cdot \|f\|_K$ ▨

Тврђење: (Фубинијева теорема)
Нека су S и T компактни Хаусдорфови простори и

$$I_S : C(S) \to \mathbb{R}, \quad I_T : C(T) \to \mathbb{R}$$

Радонови интеграли. Тада постоји јединствен Радонов интеграл

$$I : C(S \times T) \to \mathbb{R}$$

такав да је

$$I(f \otimes g) = I(f) \cdot I(g)$$

Напомена: Тензорски производ функција $f : S \to \mathbb{R}$ и $g : T \to \mathbb{R}$ је функција $f \otimes g : S \times T \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f \otimes g(s,t) := f(s) \cdot g(t)$$

$$C(S)\otimes C(T) := \left\{ \sum_j f_j \otimes g_j \mid f_j \in C(S),\ g_j \in C(T) \right\}$$

конечне суме

Доказ тврђења: S, T компактни $\Rightarrow S \times T$ компактан.

Из претходног тврђења следи да је Радонов интеграл на компактном простору непрекидан, тј. (због линеарности) и равномерно непрекидан.

Из Стоун-Вајерштрасове теореме следи $C(S) \otimes C(T) = C(S \times T)$, па доказ тврђења следи из принципа продужења равномерно непрекидног пресликавања са густог подскупа.

Последица: Фубинијева теорема за Риманов интеграл: Нека је $J = J_1 \times J_2$ n-димензиони квадар, представљен као производ k-димензионог квадра J_1 и $(n-k)$-димензионог квадра J_2 и нека је $f: J \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је

$$\int_J f = \int_{J_2} \left(\int_{J_1} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{J_1} \left(\int_{J_2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Доказ: Због линеарности интеграла и претходне теореме, довољно је доказати тврђење за функције облика $f = f_1 \otimes f_2$, где су $f_i: J_i \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$ непрекидне функције. За такве f тврђење следи из дефиниције Римановог интеграла из Примера ⑤. ▨

Интеграл: ако је $J = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ и $f: J \to \mathbb{R}$ непрекидна, онда је

$$\int_J f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n)\,dx_n \right) dx_2 \right) dx_1$$

Пример: $J = [0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f: J \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x\cos y + x^2 y$$

$$\int_J f = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} (x\cos y + x^2 y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x \sin y + \frac{1}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{\pi^2}{4} x^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi^2}{12} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{12}$$

Задатак: Проверити да

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

даје исти резултат.

Класа интеграбилних функција

Циљ: Проширити дефиницију интеграла са фамилије $\mathcal{E}$ реалних функција на скупу T на неку ширу класу функција.

$\mathcal{E}$ - фамилија реалних функција $f: T \to \mathbb{R}$

$I: \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ елементарни интеграл.

$$\mathcal{E}^{\uparrow} := \{ f: T \to \mathbb{R} \mid (\exists f_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}})\ f_n \uparrow f \}$$

$$\mathcal{E}_{\downarrow} := \{ f: T \to \mathbb{R} \mid (\exists f_n \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}})\ f_n \downarrow f \}$$

$$f \in \mathcal{E}^{\uparrow} \Rightarrow \mathcal{E} \ni f_n \uparrow f \Rightarrow f: T \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$I(f) \overset{\text{Дефиниција}}{=\!=} \lim_{n \to \infty} I(f_n) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Слично:

$$f \in \mathcal{E}_{\downarrow} \Rightarrow \mathcal{E} \ni f_n \downarrow f \Rightarrow f: T \to \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$$

$$I(f) \overset{\text{Дефиниција}}{=\!=} \lim_{n \to \infty} I(f_n) \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$$

Дефиниција: Нека је

$$f: T \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

произвољна функција. Величине

$$\underline{I}(f) := \inf\{I(h) \mid h \in \mathcal{E}^{\uparrow},\ f \le h\}$$

$$\overline{I}(f) := \sup\{I(g) \mid g \in \mathcal{E}_{\downarrow},\ g \le f\}$$

називају се редом доњим и горњим интегралом.

За сваку функцију $f: T \to \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ важе неједнакости

$$-\infty \le \underline{I}(f) \le \overline{I}(f) \le +\infty.$$

Ако важи

$$-\infty < \underline{I}(f) = \overline{I}(f) < +\infty$$

кажемо да је f интеграбилна по Дарбуу, а вредност $I(f) := \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$ зовемо редом Дарбуовим интегралом.

Скуп свих функција $f: T \to \mathbb{R}$ које су интеграбилне по Даниељу означавамо са $D(T, \mathcal{E}, I)$. Подскуп $A \subseteq T$ називамо мерљивим по Даниељу или по Стоку ако је $\chi_A \in D(T, \mathcal{E}, I)$, где је

$$\chi_A : T \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) := \begin{cases} 0, & t \notin A \\ 1, & t \in A \end{cases}$$

карактеристична функција скупа A.

Ако је $A \subseteq T$ мерљив скуп, величина $\mu(A) := I(\chi_A)$ назива се његовом мером.

Напомена: Појам мерљивости (као и сама мера) подскупова у T зависи од избора фамилије $\mathcal{E}$ и елементарног интеграла I. Ако је I Риманов интеграл, мера се назива Жордановом.

Definicija: Funkcija $f \in D(T, \Sigma, I)$ je **zanemarljiva** ako je $\overline{I}(|f|) = 0$. Skup $A \subseteq T$ je **zanemarljiv** (ili **mere nula** u Jordanovom smislu) ako je njegova karakteristična funkcija χ_A zanemarljiva. Svojstvo S važi **skoro svuda** u T ako je $\{t \in T \mid \neg S\}$ skup mere nula.

Definicija (**integrabilnost na podskupu**): Funkcija $f: T \to \mathbb{R}$ je integrabilna na podskupu $A \subseteq T$ ako je $f \cdot \chi_A$ integrabilna. Drugim rečima:

$$f \in D(A, \Sigma, I) \overset{A \in \Sigma}{\iff} f \cdot \chi_A \in D(T, \Sigma, I)$$

Tada pišemo:

$$\int_A f := I(f \cdot \chi_A)$$

Задаци: ① Нека је T локално компактан Хаусдорфов простор, $\mathcal{E} := C_c(T)$ скуп свих непрекидних функција $f: T \to \mathbb{R}$ са компактним носачем и

$$I : C_c(T) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Радонов интеграл. Доказати да је сваки компактан скуп у T мерљив по Жордану.

② Доказати да је функција $f \in \mathcal{D}(T, \mathcal{E}, I)$ интеграбилна ако и само ако важи

$$|f| \in \mathcal{D}(T, \mathcal{E}, I) \wedge I(|f|) = 0.$$

③ Доказати да је $f \in \mathcal{D}(T, \mathcal{E}, I)$ ако и само ако за свако $\delta > 0$ постоје функције $g \in \mathcal{E}_\downarrow$ и $h \in \mathcal{E}^\uparrow$ такве да важи $g \leq f \leq h$, $I(h) < +\infty$ и $I(h) - I(g) < \delta$.

④ Доказати да

$(\forall f \in D(T, \mathcal{E}, I))(\forall \delta > 0)(\exists h \in \mathcal{E})\ I(|f-h|) < \delta$.

Ако је $f \geq 0$ доказати да h може да се изабере тако да буде $h \geq 0$.

⑤ Доказати да је $f: T \to R$ елементарна функција ако и само ако је $f = 0$ скоро свуда у T.

Упутство: Ако је $A = f^{-1}(\{0\})$ и $B = T \setminus A$, онда је $|f| = |f| \cdot 1 = |f|(\chi_A + \chi_B)$.

Применити линеарност и монотоност I.

⑥ Нека је $A \subseteq T$ скуп мере нула и $B \subseteq A$. Доказати да је B мерљив скуп и да је $\mu(B) = 0$.

Упутство: искористити ⑤.

Нормиран простор интеграбилних функција

$$\mathcal{L}(T,\mathcal{E},I) := \{ f \in \mathcal{D}(T,\mathcal{E},I) \mid \overline{I}(|f|) < +\infty \}$$

је векторски простор, а функција

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(T,\mathcal{E},I) \to \mathbb{R}, \quad \|f\| := \overline{I}(|f|)$$

псеудо-норма на њему. Обе тврдње следе из дефиниције горњег интеграла.

$\|\cdot\|$ није норма, јер важи само

$$\|f\| = 0 \implies f = 0 \text{ скоро свуда на } T$$

а не важи $\|f\| = 0 \implies f = 0$.

Да бисмо добили нормиран простор, посматрајмо релацију еквиваленције $\sim$ на скупу $\mathcal{L}(T,\mathcal{E},I)$ дефинисану са

$$f \sim g \iff f = g \text{ скоро свуда на } T$$

Нека је $\widetilde{\mathcal{D}}(T,\varepsilon,I) := \mathcal{D}(T,\varepsilon,I)/_{\mathcal{N}}$ нек количнички простор.

Функција

$\|\cdot\|_1 : \widetilde{\mathcal{D}}(T,\varepsilon,I) \to \mathbb{R}$, $\|[f]\|_1 := \|f\|$

је добро дефинисана, тј. не зависи од представника f класе $[f]$ (Задатак!)

Лема: $\mathcal{N}$ је конгруенција (тј. сагласна са алгебарским операцијама на векторском простору $\mathcal{D}(T,\varepsilon,I)$)

Последица: $(\widetilde{\mathcal{D}}(T,\varepsilon,I), \|\cdot\|_1)$ је нормирани векторски простор.

Убудуте користимо исту ознаку f за $f \in \mathcal{D}(T,\varepsilon,I)$ и за њену класу еквиваленције $[f] \in \widetilde{\mathcal{D}}(T,\varepsilon,I)$.

$I: \mathcal{Z}(T, \Sigma, I) \to \mathbb{R}$ је **непрекидно** линеарно пресликавање нормираног векторског простора $(\mathcal{Z}(T, \Sigma, I), \|\cdot\|_1)$ у $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, јер је

$$|I(f)| \leq I(|f|) =: \|f\|_1.$$

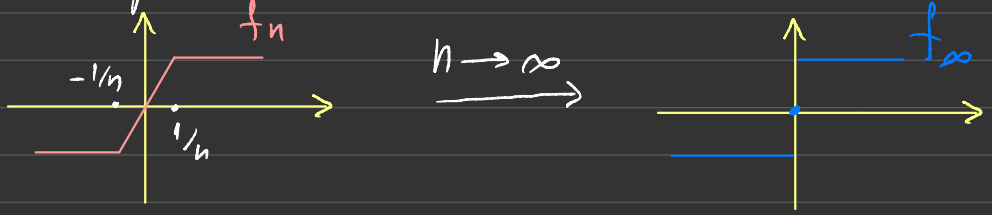
Пример: $T = J \subseteq \mathbb{R}^k$ k-димензиони квадар $\Sigma = C(J)$ скуп непрекидних функција $f: J \to \mathbb{R}$ $I = \int_J$ Риманов интеграл

Нормирани векторски простор $(C(J), \|\cdot\|_1)$ није комплетан.

Нпр. ако је $J = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$, низ функција $f_n: [-1,1] \to \mathbb{R}$ дефинисан са

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -1/n \\ \text{линеарно}, & -1/n \leq x \leq 1/n \\ 1, & x \geq 1/n \end{cases}$$

је Коширов у $(C(J), \|\cdot\|_1)$ али није конвергентан.



Заиста, овде је

$\mathcal{R}(T, \mathcal{E}, I) =: \mathcal{R}(T)$ простор функција интегрибилних по Риману

$\tilde{\mathcal{R}}(T, \mathcal{E}, I) =: \tilde{\mathcal{R}}(T)$ простор класа еквиваленције

па низ f_n конвергира у простору $\tilde{\mathcal{R}}(T)$ ка функцији $f_\infty(x) = \operatorname{sgn} x$,

јер је

$$\|f_n - f_\infty\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_\infty(x)|\, dx$$

$$\leq 2/n \longrightarrow 0, \text{ кад } n \to \infty.$$

Пошто је сваки конвергентан низ Кошијев, следи да је f_n Кошијев у $(\tilde{\mathcal{R}}(T), \|\cdot\|_1)$, па је Кошијев и у $(C(T), \|\cdot\|_1)$. Међутим, он не конвергира у $C(T)$, јер $f_\infty \notin C(T)$.

Комплетирање метричког простора

Теорема: За сваки метрички простор (M_0, d_0) постоји комплетан метрички простор (M, d) и инјективно пресликавање $i : M_0 \longrightarrow M$ са својствима

(1) $d(i(x), i(y)) = d_0(x, y)$ за све $x, y \in M_0$

(2) $i(M_0)$ је густ у M.

Напомена 1: Пошто је $i : M_0 \to M$ у претходној теореми изометријско уланчање, тј. $i : M_0 \to i(M_0)$ је изометрија, можемо да идентификујемо метричке просторе (M_0, d_0) и $(i(M_0), d)$. Другим речима, претходна теорема може краће да се формулише речима: Сваки метрички простор је густ подскуп неког комплетног простора.

Напомена 2: За дати простор (M_0, d_0) простор (M, d) из претходне теореме је јединствен до на изометрију. Зовемо га комплетирањем простора (M_0, d_0). Другим речима, ако су (M, d) и (M', d')

комплетирање простора (M_0, d_0), онда постоји изометрија $\Phi: (M,d) \xrightarrow{\cong} (M',d')$.

Она се конструише на природан начин: пошто је $\overline{M_0} = M$ и $\overline{M_0} = M'$ (у смислу напомене 1), за $x \in M_0$ дефинишемо $\Phi(x) = x$. Ако је $x \in M \setminus M_0$, из $\overline{M_0} = M$ следи да постоји низ x_n у M_0 који конвергира ка x. Тај низ је Кошијев у M_0, па је Кошијев и у M'. Пошто је M' комплетан, x_n конвергира и у M', ка некој $y \in M'$. Дефинишемо $\Phi(x) = y$.

Задатак: Доказати да је овако добро дефинисано $\Phi: M \to M'$ које је изометрија.

Доказ теореме: Нека је $X \subseteq M_0^{\mathbb{N}}$ скуп свих Кошијевих низова у M_0. Дефинишимо на X релацију еквиваленције

$$(a_n) \sim (b_n) \overset{\text{деф.}}{\iff} \lim_{n\to\infty} d_0(a_n, b_n) = 0$$

Нека је $M := X/_\sim$ количнички скуп ове релације. На њему дефинишемо растојање

$$d([a_n], [b_n]) := \lim_{n\to\infty} d_0(a_n, b_n)$$

Задатак: (а) Доказати да је d добро дефинисано, тј. да не зависи од избора представника a_n, b_n класа $[a_n], [b_n]$.

(б) Доказати да је d метрика.

Пресликавање $i: M_0 \to M$ дефинишемо са

$$i(x) := [x] \quad \text{(класа константног низа)}.$$

Остаје да се докаже да је $\overline{i(M_0)} = M$ и да је M комплетан.

Нека је $x \in M$. Тада је $x = [x_n]$ за неки низ x_n у M_0. Из дефиниције i и d тада следи да $i(x_n) \to x$, што је доказало да је $i(M_0)$ густ у M.

Нека је x_n Кошијев низ у M. Пошто је $\overline{i(M_0)} = M$, за свако n постоји $a_n \in M_0$ за које је $d(i(a_n), x_n) < \frac{1}{n}$. Из дефиниције i и d закључујемо:

x_n Кошијев $\Rightarrow$ $i(a_n)$ Кошијев

$\Rightarrow$ a_n Кошијев у M_0

$\Rightarrow$ a_n дефинише тачку $a \in M$

Из дефиниције d следи: $x_n \to a$ (задатак!)



Напомена: За сваки нормирани векторски простор $(X_0, \|\cdot\|_0)$ постоји (јединствен до на линеарну изометрију) Банахов простор $(X, \|\cdot\|)$ и линеарно пресликавање $i: X_0 \to X$ које чува норму, такво да је $\overline{i(X_0)} = X$.

Задаци: (1) Доказати ово, модификовањем доказа претходне теореме.

(2) Дати следећи (елементарнији) доказ (специфичан за нормиране векторске просторе):

(а) Доказати да је дуал X_0^* увек Банахов.

(б) Доказати да постоји природно линеарно пресликавање $i: X_0 \to (X_0^*)^*$ које чува норму.

(в) Доказати да је $X := \overline{i(X_0)} \subseteq (X_0^*)^*$ затворено потпростор.

Дефиниција: Комплетирање нормираног векторског простора $(C(J), \|\cdot\|_1)$ назива се простором функција интеграбилних по Лебегу и означава са $L^1(J)$.

Пошто је:

- $I := \int_J : C(J) \to \mathbb{R}$ равномерно непрекидно
- $\overline{C(J)} = L^1(J)$
- $\mathbb{R}$ комплетан простор,

следи да I има јединствено непрекидно продужење

$$\int_J : L^1(J) \to \mathbb{R} \qquad (*)$$

Оно се назива Лебеговим интегралом.

$(*)$ је непрекидно линеарно пресликавање Банахових простора.

Дефиниција: Функција $f : T \to \mathbb{C}$ је интеграбилна (по Лебегу, Радону, Лебегу, Риману...) ако су интеграбилне функције $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f : T \to \mathbb{R}$ и њен интеграл је

$$I(f) := I(\mathrm{Re} f) + i I(\mathrm{Im} f).$$

Класа функција интеграбилних по Риману

Подсетимо: $f : J \to \mathbb{R}$ (може и $\mathbb{C}$) функција дефинисана на k-димензионом квадру $J \subseteq \mathbb{R}^k$, $\mathcal{P}_J$ просто подела са филтером $\mathcal{F}_J$,

$$\Phi_f : \mathcal{P}_J \to \mathbb{R}, \quad \Phi_f(P) := \sum_{i=1}^{\ell} f(\xi_i)\, \mu(J_i)$$

f је интеграбилна по Риману ($f \in \mathcal{R}(J)$) ако $\exists \lim_{\mathcal{F}_J} \Phi_f =: \int_J f(x)\,dx$.

Лема: $f \in \mathcal{R}(J) \Rightarrow f$ је ограничена на J.

Доказ: Претпоставимо да је f неограничена. Тада у свакој поделу $P \in \mathcal{P}_J$ постоји неки интервал J_i такав да је f неограничена на J_i. То значи да је могуће изабрати тачке $\xi_i, \eta_i \in J_i$ такве да је $|f(\xi_i) - f(\eta_i)|$ произвољно велико. Ако су (P, ξ) и (P, η) поделе са истим интервалима и истим уоченим тачкама тако изабраних $\xi_i, \eta_i \in J_i$, видимо да разлика

$$|\phi_f(P, \xi) - \phi_f(P, \eta)| = |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \mu(J_i)$$

може да буде произвољно велика, што је у супротности са Коши-евим критеријумом постојања лимеса $\lim_{\mathcal{P}_J}$. ▨

Дефиниција: $E \subseteq \mathbb{R}^k$ је скуп мере нула у смислу Лебега ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји највише пребројива фамилија $\{J_n\}$ k-димензионих квадара, таква да је $\bigcup_n J_n \supseteq E$ и $\sum_n \mu(J_n) < \varepsilon$.

Напомена: Раније смо дефинисали појам мерљивог скупа у смислу мерења дефинисаног неким интегралом I, као скупа чија је карактеристична функција интеграбилна. Ако је E мерљив скуп, онда је $\mu(E) := I(\chi_E)$ његова мера дефинисана интегралом I. Ако је I Лебегов интеграл, овако дефинисана мера назива се Лебеговом.

Може да се докаже да је претходна дефиниција еквивалентна са: E је мерљив (у смислу Лебеговог интеграла) и $\mu(E)=0$ (има Лебегову меру нула).

Задатак: Доказати да се, ако у претходној дефиницији узмемо отворене квадре, добије дефиниција еквивалентна оној у којој узмемо затворене (зато и нисмо нагласили да ли су отворени или затворени).

Примери: ① Сваки највише пребројив скуп је скуп мере нула. Доказ: пребројив скуп поређамо у низ $\{a_n\}$ и покријемо та квадрима $J_n \ni a_n$ таквим да је $\mu(J_n) < \varepsilon/2^{n+1}$.

Тада је $\sum \mu(J_n) < \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$.

② Пребројива унија скупова мере нула је скуп мере нула. Доказ: слично као у ①. Ако су $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ мере нула, сваки скуп E_n можемо да покријемо квадрима укупне запремине $< \varepsilon/2^{n+1}$.

③ Канторов скуп је непребројив скуп мере нула.

④ Квадар $J := \{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k \mid (\forall j)\ |x_j|\le a\}$ није скуп мере нула. Доказ: свако покривање квадра J малим квадрима има коначно потпокривање (Борел – Лебегова теорема). Индукцијом по броју квадара у том коначном потпокривању закључујемо да је збир њихових запремина бар $\mu(J)=a^k$.

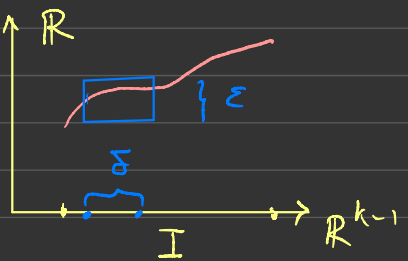
⑤ $I \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ $(k-1)$-димензиони квадар, $f: I \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Тада је дефинисан

$$\Gamma(f) := \{ (x, f(x)) \mid x \in I \} \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}$$

скуп мере нула у $\mathbb{R}^k$.

Доказ: I је компактан, па из Канторове теореме следи да је f равномерно непрекидна.

$\varepsilon > 0$, $(\exists \delta > 0)$ $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$



Дато I поделимо на мање квадре тако да параметар поделе буде мањи од δ, $\Gamma(f)$ је почивено квадрима укупне запремине $< 2\varepsilon \mu(I)$.

Задаци: ① Доказати да је график непрекидне функције $f: E \to \mathbb{R}$ на произвољном скупу $E \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ (не обавезно квадру као у Примеру ⑤) скуп мере нула.

② Доказати да скуп мере нула нема унутрашњих тачака.

③ Дати пример скупа који нема унутрашњих тачака, али је скуп мере нула.

④ Дати пример скупа $E \subseteq \mathbb{R}^k$ мере нула, такво да је $\bar{E} = \mathbb{R}^k$.

⑤ Нека је $0 < l < k$ и $\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ пројекција $\mathbb{R}^k$ на неки l-димензиони потпростор. Ако је $E \subseteq \mathbb{R}^k$ скуп такав да је $\pi(E)$ мере нула у $\mathbb{R}^l$, доказати да је E мере нула у $\mathbb{R}^k$.

⑥ Нека је $J = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_k, b_k] \subseteq \mathbb{R}^k$. Доказати да је $J \setminus]a_1, b_1[\times \ldots \times]a_k, b_k[$ скуп мере нула. Упутство: Применити специјалан случај Примера ⑤, за $f \equiv \text{const}$.

$f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} f \subseteq J$, J – квадр

P – подела квадра J на квадре $J_1, \dots, J_\ell$.

$$S(f;P) := \sum_{i=1}^{\ell} M_i \mu(J_i), \quad s(f;P) := \sum_{i=1}^{\ell} m_i \mu(J_i)$$

где је $M_i := \sup_{J_i} f$, $m_i := \inf_{J_i} f$

Као у лемми 1 се доказује да, ако су P_1, P_2 произвољне поделе, онда важи

$$s(f;P_1) \le S(f;P_2)$$

Доњи и горњи Дарбуов интеграл

$$\underline{\int} f(x)\,dx := \inf_P S(f;P)$$

$$\overline{\int} f(x)\,dx := \sup_P s(f;P)$$

задовољавају неједнакости

$$s(f,P) \le \underline{\int}_J f(x)\,dx \le \overline{\int}_J f(x)\,dx \le S(f,P) \quad (*)$$

за произвољну поделу P квадра J.

Теорема (Дарбуова): За сваку ограничену функцију $f: J \to \mathbb{R}$ важи:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\int}_J f(x)\,dx &= \lim_{\mathcal{F}_J} S(f,P) \\ \underline{\int}_J f(x)\,dx &= \lim_{\mathcal{F}_J} s(f,P). \end{aligned}}$$

Доказ: Довољно је доказати тврђење за доњи интеграл; његовом применом на $-f$ уместо f добија се тврђење за горњи.

Означимо $\underline{\int}_J f(x)\,dx$ са $\underline{I}$.

Нека је, за дато $\varepsilon > 0$, P_ε подела таква да је $s(f, P_\varepsilon) > \underline{I} - \varepsilon$. Нека је Γ_ε скуп свих тачака које леже на граници неког од квадрата поделе P_ε.

Из Примера 5 (или Задатка 6) следи да је Γ_ε скуп мере нула у смислу Лебега.

Одатле следи да постоји $\lambda_\varepsilon > 0$ такво да је за сваку поделу P за коју је $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$ ($\lambda(P)$ је параметар поделе) збир запремина квадара те поделе који секу Γ_ε мањи од ε.

Нека је сада P подела за коју је $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$ и нека је P' подела која садржи све подеоне тачке подела P и P_ε. Тада је

$$\underline{I} - \varepsilon < s(f, P_\varepsilon) < s(f, P') \leq \underline{I}$$

овако је изабрана подела P_ε

финија подела има bety доњу Дар буову суму

(*)

Подела P' је настала тако што су подели P додате подеоне тачке поделе P_ε, што значи да се сви квадри у подели P који не секу скуп Γ_ε налазе и у подели P'.

Одатле следи да у разлици $S(f,P') - S(f,P)$ учествују само сабирци који одговарају интервалима који секу Γ_ε. Пошто је $\lambda(P') < \lambda_\varepsilon$, збир дужина тих интервала је мањи од ε. По претпоставци је f ограничена ($f \le M$), па је $|S(f,P') - S(f,P)| \le 2M\varepsilon$

Одатле и из претходних неједнакости следи

$$\underline{I} - S(f,P) = |\underline{I} - S(f,P') + S(f,P') - S(f,P)|$$

$$\le \underline{I} - S(f,P') + |S(f,P') - S(f,P)|$$

$$< \varepsilon + 2M\varepsilon = (1+2M)\varepsilon.$$

Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно и P произвољна подела за коју је $\lambda(P) < \lambda_\varepsilon$, одатле следи (на основу дефиниције филтера $\mathcal{F}_J$) да је $\underline{I} = \lim_{\mathcal{F}_J} S(f,P)$. ▨

Теорема (Дарбуов критеријум интеграбилности по Риману):

$$f \in \mathcal{R}(J) \Leftrightarrow f \text{ ограничена и } \underline{\int} f(x)dx = \overline{\int} f(x)dx$$

Доказ: ($\Leftarrow$) Из дефиниције $\Phi_f(P, \xi)$ и тачних и доњих Дарбуових сума следи

$$s(f,P) \leq \Phi_f(P,\xi) \leq S(f,P),$$

а одатле и из претходне теореме и Теореме о три низа следи

$$\exists \lim_{\mathcal{F}_J} \Phi_f(P) = \underline{\int}_J f(x)dx = \overline{\int}_J f(x)dx.$$

($\Rightarrow$) $f \in \mathcal{R}(J) \Rightarrow f$ ограничена је доказано у леми раније.

По дефиницији Дарбуових сума је

$$s(f,P) = \inf_{\xi} \Phi_f(P,\xi), \quad S(f,P) = \sup_{\xi} \Phi_f(P,\xi).$$

Нека је $I := \lim_{\mathcal{F}_J} \Phi_f$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји δ, такво да за $\lambda(P) < \delta$ важи

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \Phi_f(P, \xi) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Преласком на $\inf_{\xi}$ у првој неједнакости и на $\sup_{\xi}$ у другој добијамо

$$I - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Пошто је ε произвољно, одатле следи

$$\underline{\int} f(x)\,dx = \overline{\int} f(x)\,dx = I \qquad \blacksquare$$

Напомена: Претходна теорема показује да су две дефиниције Римановог интеграла, као лимеса у простору подела и преко Дарбуових сума (формулисане пре неколико часова у Примерима 5 и 6) еквивалентне.

Лебегов критеријум интеграбилности по Риману

$f: T \to \mathbb{R}$ (T подскуп метричког простора)

осцилација функције f **на скупу** $A \subseteq T$ је

$$\omega(f; A) := \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x).$$

осцилација функције f **у тачки** $a \in A$ је

$$\omega(f; a) := \lim_{\delta \to 0_+} \omega(f; T \cap B]a; \delta[)$$

$$= \inf_{\delta > 0} \omega(f; T \cap B]a; \delta[)$$

Лако се види да је $f \subset a \Leftrightarrow \omega(f; a) = 0$.

Пример: Ако је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

онда је $\omega(f; x) = 0$ за $x \neq 0$ и $\omega(f; 0) = 2$;

$f \subset x \Leftrightarrow x \neq 0$.

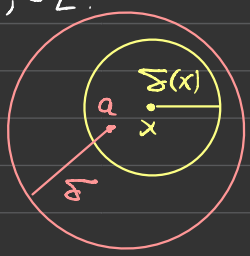
Лема: Нека је $T \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: T \to \mathbb{R}$ ограничена функција и $\varepsilon > 0$. Тада је скуп $F := \{ t \in T \mid \omega(f; t) \geq \varepsilon \}$ затворен у T.

Доказ: $b \in T \setminus F \Rightarrow \omega(f; b) < \varepsilon$

$\Rightarrow (\exists \delta > 0)\ \omega(f; T \cap B]a; \delta[) < \varepsilon$

Нека је $x \in T \cap B]a; \delta[$. Тада постоји $\delta(x) > 0$ такво да је $B]x; \delta(x)[\subseteq B]a; \delta[$.

Тада је $\omega(f; T \cap B]x; \delta(x)[) < \varepsilon$, па је $\omega(f; x) < \varepsilon$.



То значи да је $x \in T \setminus F$. Пошто је $x \in T \cap B]a; \delta[$ произвољно, следи да је $T \cap B]a; \delta[\subseteq T \setminus F$, што доказује да је $T \setminus F$ отворен (па тиме и F затворен) у T. ▨

Теорема (Лебетова): Функција $f: J \to \mathbb{R}$ је интеграбилна по Риману ако и само ако је ограничена и непрекидна скоро свуда у смислу Лебега.

Другим речима, пошто је скуп тачака у којима f има прекид

$$E = \{x \in J \mid \omega(f; x) > 0\}$$

Лебетова теорема може да се формулише на следећи начин:

$$\boxed{f \in \mathcal{R}(J) \iff \begin{cases} (1) & f \text{ је ограничена} \\ (2) & E \text{ је скуп мере нула у смислу Лебега.} \end{cases}}$$

Доказ: ($\Rightarrow$) Претпоставимо $f \in \mathcal{R}(I)$.

Скуп E је пребројива унија скупова

$$E_n := \{ x \in I \mid \omega(f; x) \geq \frac{1}{n} \}.$$

Пошто је пребројива унија скупова мере нула скуп мере нула (Пример ②), довољно је да докажемо да је E_n скуп мере нула за произвољно фиксирано n.

Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто је $f \in \mathcal{R}(I)$, из дефиниције интеграбилности следи да постоји подела P интервала I таква да је

$$S(f; P) - s(f, P) < \varepsilon / n. \qquad (*)$$

Нека је

$$P_n := \{ J \in P \mid J \cap E_n \neq \emptyset \}.$$

ознаке: $m_I = \inf_I f$, $M_I = \sup_I f$

Пошто је $\omega(f;x) \geq 1/n$ за $x \in E_n$, следи

$$\frac{\varepsilon}{n} \geq S(f;P) - s(f;P) = \sum_{I \in P} (M_I - m_I)\,\mu(I)$$

$$\geq \sum_{I \in P_n} (M_I - m_I)\,\mu(I) \geq \frac{1}{n} \sum_{I \in P_n} \mu(I)$$

($\omega(f, I)$)

тј. $\sum_{I \in P_n} \mu(I) < \varepsilon$.

Фамилија квадара из P_n покрива скуп E_n (јер фамилија квадара из P покрива J) и збир њихових запремина је мањи од ε. Тиме је доказано да је E_n скуп мере нула.

($\Leftarrow$) Претпоставимо да је $\sup_J |f| < M$ и да је E скуп мере нула. Нека је $\varepsilon > 0$. Доказаћемо да постоји подела P таква да је

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon. \quad (**)$$

Из дефиниције интеграбилности из (**) и ограничености f следи $f \in \mathcal{R}(J)$.

Идеја доказа (**) састоји се у томе да се разлика

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{I \in P} \omega(f;I)\,\mu(I)$$

разбије на две суме: једну по квадрима на којима је осцилација мала, и другу на којима је мала запремина. Ово је могуће захваљујући томе што су скупови $E_\alpha := \{x \in J \mid \omega(f;x) \geq \alpha\}$ на којима је осцилација „велика" (већа од α) скупови мере нула, па могу да се покрију квадрима мале укупне запремине. Детаље погледати у литератури. ▨

Последица: Нека је $E \subseteq \mathbb{R}^k$ ограничен скуп садржан у квадру J и χ_E његова карактеристична функција. Тада важи $\chi_E \in \mathcal{R}(J) \Leftrightarrow \partial E$ је скуп мере нула.

Доказ: ∂E је скуп прекида функције χ_E. ▨

Дефиниција: Ограничен подскуп $E \subseteq \mathbb{R}^k$ је **мерљив у Жордановом смислу** (или мерљив по Жордану) ако је његова карактеристична функција интеграбилна по Риману.

Нека је $E \subseteq J$. Величина

$$\mu(E) := \int_J \chi_E(x)\,dx$$

назива се **Жордановом мером** скупа E.

Дефиниција Жорданове мере не зависи од избора квадра J који садржи скуп E (Задатак!)

За $k=1$ Жорданову меру називамо дужином, за $k=2$ површином, за $k=3$ (и често за $k \geq 3$) запремином.

Ако је J k-димензиони квадар, $E \subseteq J$ скуп мерљив по Жордану и $f \in \mathcal{R}(J)$, онда је и $f \cdot \chi_E \in \mathcal{R}(J)$, јер је скуп тачака функције $f \cdot \chi_E$ подскуп уније скупова тачака функција f и χ_E, а унија два скупа мере нула је скуп мере нула.

Дефиниција: Ако је скуп $E \subseteq J$ мерљив по Жордану и $f \in \mathcal{R}(J)$, величину

$$\boxed{\int_E f(x)\,dx := \int_J f(x)\cdot \chi_E(x)\,dx}$$

називамо (Римановим) интегралом функције f по скупу E.

Општије, ако је E мерљив по Жордану, $f: E \to \mathbb{C}$ и ако је функција

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \in J \setminus E \end{cases}$$

интеграбилна по Риману, интеграл функције f по скупу E се дефинише са

$$\boxed{\int_E f(x)\,dx := \int_J \tilde{f}(x)\,dx.}$$

Скуп функција f које су интеграбилне на скупу E (тј. за које је функција $\tilde{f}$ интеграбилна по Риману) означавамо са $\mathcal{R}(E)$.

У овим ознакама, Жорданова мера скупа E може да се запише са

$$\mu(E) = \int_E 1 \cdot dx$$

Тврђење: Нека је $J \subseteq \mathbb{R}^k$ k-димензиони квадар. Простор $(C(J), \|\cdot\|_1)$ је гушћи у $(\mathcal{R}(J), \|\cdot\|_1)$.

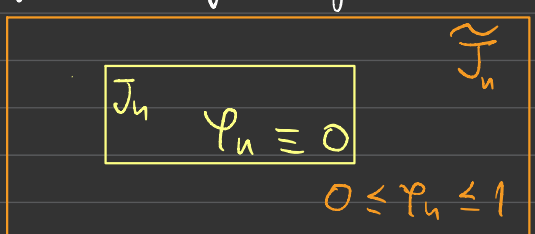
Доказ: $f \in \mathcal{R}(J) \Rightarrow |f| \leq M$ и скуп тачака у којима f није непрекидна је скуп мере нула.
$\Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)$ $\exists$ фамилија квадара $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

таква да је

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(J_n) < \varepsilon/4M$
- $f \in C(J \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n)$.

Нека су $\varphi_n : J \to [0,1]$ непрекидне функције такве да је

- $\varphi_n|_{J_n} \equiv 0$
- $\varphi_n \equiv 1$ ван $\widetilde{J}_n$ где је $\widetilde{J}_n$ два пута (у смислу дужине) већи интервал, $J_n \subseteq \widetilde{J}_n$



$\mu(\widetilde{J}_n) = 2\mu(J_n)$

$\varphi_n \equiv 1$ ван $\widetilde{J}_n$

$$g(x) := \begin{cases} \varphi_n f, & x \in \widetilde{J}_n \\ f, & x \in \widetilde{J}_n \end{cases}$$

$\Rightarrow g \in C(J)$ и $g = f$ ван $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$

$$\Rightarrow \|f-g\|_1 := \int_J |f-g| = \int_{\bigcup \tilde{J}_n} |f-g|$$

$$\leq 2M \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\tilde{J}_n) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Тврђење: Фубинијева теорема важи за класу функција интеграбилних по Риману.

Прецизније, ако су $I \subseteq \mathbb{R}^k$, $J \subseteq \mathbb{R}^l$ квадри и $f \in \mathcal{R}(I \times J)$, онда постоје интеграли

$$\int_{I\times J} f, \quad \int_I \left(\int_J f(x,y)\,dy\right) dx, \quad \int_J \left(\int_I f(x,y)\,dx\right) dy$$

и једнаки су међу собом.

Доказ: Следи из раније доказане теореме за непрекидне функције и Принципа продужења непрекидног пресликавања

$$\int_{I\times J} : C(I\times J) \longrightarrow \mathbb{R}$$

на скупу $\mathcal{R}(I\times J)$ у коме је $C(I\times J)$ густ (на основу претходног тврђења. ▨

Напомена: До сада смо говорили о два простора у којима је $(C(J), \|\cdot\|_1)$ густ: $\mathcal{R}(J)$ функција интеграбилних по Риману, и простору $L^1(J)$ функција интеграбилних по Лебегу, који је добијен комплетирањем простора $(C(J), \|\cdot\|_1)$. Може да се докаже да важи $C(J) \subseteq \mathcal{R}(J) \subseteq L^1(J)$ и да су обе инклузије строге. Одатле следи да $(\mathcal{R}(J), \|\cdot\|_1)$ није комплетан.

Задачи: ① Доказати да је Жорданова мера k-димензионог квадра једнака производу дужина ивица (што оправдава употребу исте ознаке μ коју смо користили за запремину квадра дефинисану као производ дужина ивица.

② (а) Нека је (ограничен) скуп $E \subseteq \mathbb{R}^k$ мерљив по Жордану. Доказати да је његова Жорданова мера нула ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ E може да се покрије коначном фамилијом k-димензионих квадара $\{J_1, \ldots, J_n\}$ таквих да је $\sum_{i=1}^{n} \mu(J_i) < \varepsilon$.

Упутство: Како $\sum_{i=1}^{n} \mu(J_i)$ може да се узме $S(X_E; P)$ за довољно добру поделу P.

(б) Закључити да је скуп чија је Жорданова мера 0 скуп мере 0 у смислу Лебега

(в) Показати да у (б) не важи обрнуто.

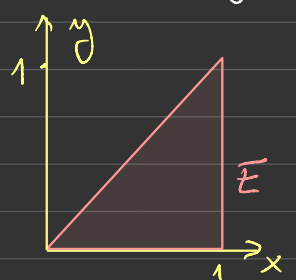
(г) Доказати да за компактне скупове у (б) важи и обрнуто.

③ $f \in C[a,b] \Rightarrow \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$

Упутство: $\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b f(y)dy$.

④ Доказати да је скуп

$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$



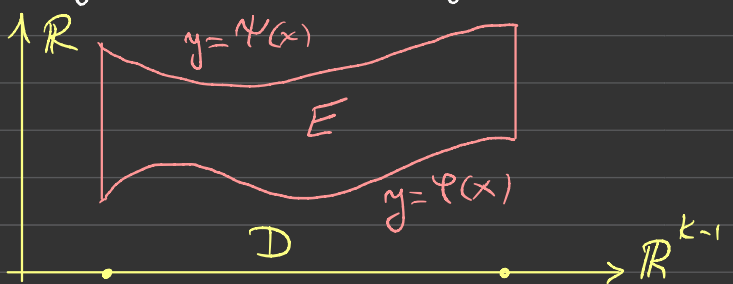
мерљив по Жордану и да је за сваку функцију $f \in \mathcal{R}(E)$

$$\int_E f = \int_0^1 \left(\int_0^x f(x,y)dy\right)dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 f(x,y)dx\right)dy.$$

Упутство: Применити Фубинијеву теорему на функцију $f \cdot \chi_E : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

⑤ (уопштење ④) Нека је $D \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ ограничен скуп, $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$ и

$$E := \{ (x,y) \in D \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \le y \le \psi(x) \} \subseteq \mathbb{R}^k.$$



Доказати да је за сваку функцију $f \in \mathcal{R}(E)$

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_D \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

⑥ Нека су D и E као у ⑤, при чему су φ и ψ непрекидне функције. Доказати да је скуп E мерљив по Жордану и да је

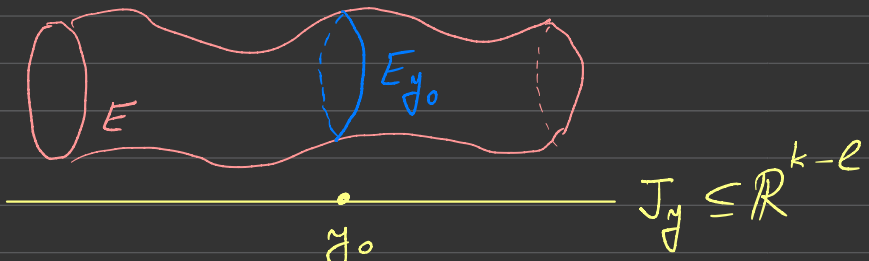
$$\mu(E) = \int_D (\psi(x) - \varphi(x))\,dx.$$

Упутство: Применити Пример ⑤ са претходног часа и претходни задатак.

Теорема (**Кавальеријев принцип**): Нека је $J \subseteq \mathbb{R}^k$ k-димензиони квадар и $E \subseteq J$ скуп мерљив по Жордану. Представимо J као производ $J = J_x \times J_y$ квадара $J_x \subseteq \mathbb{R}^\ell$ и $J_y \subseteq \mathbb{R}^{k-\ell}$. Тада је за скоро сваку $y_0 \in J_y$ пресек $E_{y_0} := \{(x,y) \in E \mid y = y_0\}$ скупа E и ℓ-димензионе равни $y = y_0$ мерљив по Жордану и важи

$$\mu_k(E) = \int_{J_y} \mu_\ell(E_y)\, dy.$$

Где је μ_k Жорданова мера у $\mathbb{R}^k$, а μ_ℓ Жорданова мера у $\mathbb{R}^\ell \cong \mathbb{R}^\ell \times \{y\} \subseteq \mathbb{R}^k$.



Доказ: Следи из Фубинијеве теореме примењене на функцију $\chi_E(x,y) = \chi_{E_y}(x)$. ▨

Пример: Запремина лопте

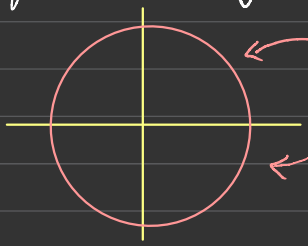
$$B_r^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \le r^2 \}.$$

$$V_n(r) := \mu(B_r^n)$$

Доказаћемо индукцијом да је за свако n $V_n(r) = c_n r^n$ за неки број c_n, а затим ћемо да нађемо c_n.

$n = 1$: $V_1(r) = 2r$ (дужина интервала $[-r, r]$)

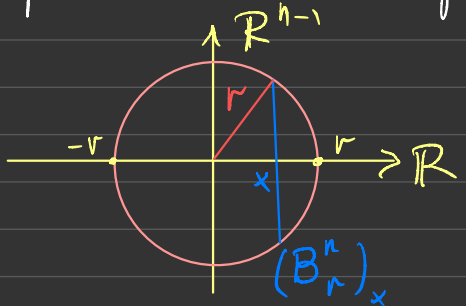
$n = 2$: $V_2(r) = \pi r^2$ је површина између графика функција $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$



може да се израчуна као последица Задатка ⑥ методама Анализе 1.

$(n-1) \mapsto n$: Претпоставимо $V_{n-1} = c_{n-1} r^{n-1}$.

Применимо Кавальеријев принцип:



Из Питагорине теореме следи да је полупречник лопте $(B_r^n)_x$ $\sqrt{r^2 - x^2}$.

По индуктивној претпоставци је

$$\mu_{n-1}((B_r^n)_x) = c_{n-1}(r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

Кавальеријев принцип $\Rightarrow$

$$V_n(r) = \int_{-r}^{r} c_{n-1}(r^2 - x^2)^{\frac{n-1}{2}} dx$$

[СМЕНА: $x = r\sin t$]

$$= \left(c_{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t \, dt\right) r^n$$

Тиме је доказано да је $V_n = c_n r^n$, где низ c_n задовољава рекурентну формулу

$$c_n = c_{n-1} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n t \, dt}_{I_n}.$$

Из Анализе 1 знамо како се израчунава овај интеграл (за $n \geq 2$): нађемо се $\cos^n t = \cos^{n-2} t \,(1 - \sin^2 t)$ и добије рекурентна формула $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

Имајући у виду да је $I_1 = 2$, $c_1 = 2$ и $I_2 = \pi/2$, $c_2 = \pi$ добијамо:

$$V_{2k+1}(r) = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} r^{2k+1}, \quad V_{2k}(r) = \frac{(2\pi)^k}{(2k)!!} r^{2k}$$

Коментар: Из ових формула добијамо добро познате формуле у димензијама 1, 2 и 3. Специјално, за јединичну лопту ($r=1$) добијамо $V_1 = 2$, $V_2 = \pi$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi$. Видимо да је $V_1 < V_2 < V_3$. Следећи члан низа је $V_4 = \frac{\pi^2}{2} > V_3$. Што ми следећи задатак занимљивим:

Задатак: Нека је $V_n := V_n(1)$ запремина јединичне лопте димензије n.

(а) Доказати да је $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$.

(б) У којој димензији n је запремина V_n највећа?

Смена променљиве у интегралу

У једној димензији: $\int_a^b f(x)\,dx$ је ознака за

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + j\,\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} \qquad (*)$$

Када вршимо смену $x = \varphi(t)$ ставимо $dx = \varphi'(t)\,dt$ и добијемо

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

тј. dx (што је само део ознаке за $(*)$) се понаша као прави диференцијал (добро изабрана ознака, мотивисана Бут–Лајбницовом формулом).

У вишедимензионом случају став је знатно сложенија.

Теорема: Нека су D_t и D_x ограничени отворени скупови у $\mathbb{R}^k$, $\varphi: D_t \to D_x$ дифеоморфизам (класе C^1), $\varphi': D_t \to \mathbb{R}^{k\times k}$ његова матрица првог извода и $f \in \mathcal{R}(D_x)$ функција чији је носач

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in D_x \mid f(x) \neq 0\}}$$

компактан у D_x. Тада важи:

(1) $(f \circ \varphi) \cdot |\det \varphi'| \in \mathcal{R}(D_t)$

(2) $$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{D_t} f\circ\varphi(t)\,|\det \varphi'(t)|\,dt.$$

За доказ ове теореме потребно нам је неколико помоћних тврђења.

Лема 1: Нека су D_t, D_x, φ као у Теореми, $E_t \subseteq D_t$ и $E_x := \varphi(E_t) \subseteq D_x$. Тада важи:

(1) Ако је E_t скуп мере нула у смислу Лебега, онда је такав и E_x.

(2) Ако је Жорданова мера скупова E_t и $\overline{E}_t$ нула, онда је и Жорданова мера скупова E_x и $\overline{E}_x$ нула.

(3) Ако је скуп E_t мерљив по Жордану и $\overline{E}_t \subseteq D_t$, онда је и скуп E_x мерљив по Жордану и $\overline{E}_x \subseteq D_x$.

Доказ у суштини следи из Теореме о средњој вредности (Теореме о коначним приращајима):

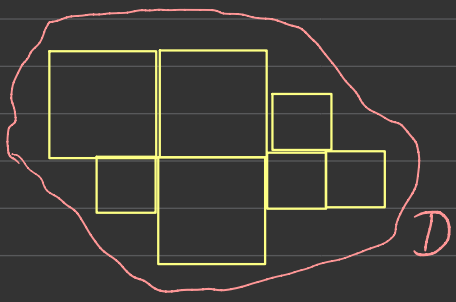
$$\|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)\| \leq \sup \|\varphi'\| \cdot \|t_2 - t_1\|.$$

Пошто је φ класе C^1, први извод φ' је ограничен на компактним подскуповима у D_t, па из претходне неједнакости следи да је растојање између слика $x_1 = \varphi(t_1)$ и $x_2 = \varphi(t_2)$ контролисано растојањем између тачака t_1 и t_2.

Одатле следи доказ Леме, јер су сви појмови у њој дефинисани на језику растојања (тј. дужине ивице квадра).

Детаљније: сваки отворен скуп $D \subseteq \mathbb{R}^k$ може да се представи као пребројива унија квадара чије се унутрашњости међусобно не секу (поделимо D колико можемо на квадре са ивицама

дужине 1, остатак колико можемо квадрима са ивицама дужине 1/2, па 1/3 ...)

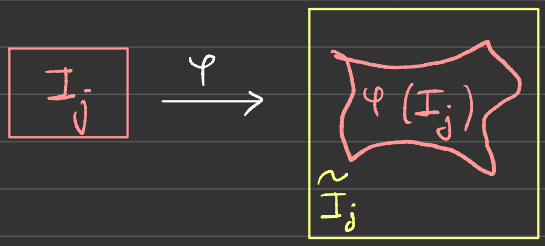


Пошто је пребројива унија скупова мере нула скуп мере нула, довољно је доказати (1) под претпоставком да $E_t \subseteq J$ за неки квадар J. Нека је $M := \sup_{t \in J} \|\varphi'(t)\|$. Тада за сваке две тачке $t_1, t_2 \in J$ и њихове слике $x_1 = \varphi(t_1)$, $x_2 = \varphi(t_2)$ важи (због Теореме о средњој вредности) $\|x_2 - x_1\| \leq M \|t_2 - t_1\|$. (*)

Нека је $\{I_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ покривање скупа E_t квадрима таквим да је $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(I_j) < \varepsilon$.

Из (*) следи да се сваки скуп $\varphi(I_j)$

налази у квадру $\tilde{I}_j$ таквом да



је $\mu(\tilde{I}_j) = M^k \mu(I_j)$

Тада је $\{\tilde{I}_j\}$ покривање скупа E_x такво да је $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(\tilde{I}_j) < M^k \varepsilon$, што доказује (1).

(2) следи из (1) јер је $\overline{E}_t$ (а самим тим и његова непрекидна слика $\overline{E}_x = \varphi(\overline{E}_t)$) компактан скуп, а сваки компактан скуп мере нула у смислу Лебега има Жорданову меру нула.

(3) следи из (2) јер дифеоморфизам слика унутрашње тачке у унутрашње (последица Теореме о инверзној функцији) па је $\partial E_x = \varphi(\partial E_t)$, а скуп је

мерљив по Жордану ако и само ако му је руб скуп мере нула у смислу Лебега. ▨

Последица: Под условима Теореме о смени променљиве, интеграл у тачки (2) увек постоји.

Доказ: Следи из Лебегове теореме о интеграбилности и претходне леме: ако је E_t скуп прекида подинтегралне функције на десној страни, онда је $E_x := \varphi^{-1}(E_t)$ скуп прекида функције f. Он је, због $f \in \mathcal{R}(D_x)$ скуп мере нула. Руб скупа D_t не утиче на интеграбилност, јер је због претпоставке о компактности $\operatorname{supp} f$ подинтегрална функција 0 близу ∂D_t. ▨

Лема 2 (једнодимензиони случај):
Нека је $\varphi : I_t \to I_x$ диференцијабилно пресликавање интервала $I_t \subseteq \mathbb{R}$ на интервал $I_x \subseteq \mathbb{R}$ и нека је $f \in \mathcal{R}(I_x)$. Тада је $f \circ \varphi \cdot |\varphi'| \in \mathcal{R}(I_t)$ и важи

$$\int_{I_x} f(x)\,dx = \int_{I_t} f \circ \varphi(t)\,|\varphi'(t)|\,dt$$

Доказ: Напомена, ова лема је теорема о смени променљиве за функције једне променљиве и доказана је у Анализи 1 применом Њутн-Лајбницове формуле. Овде дајемо други доказ, који се не ослања на Њутн-Лајбницову формулу и показује везу између интеграла и диференцијалног рачуна са друге стране (од интеграла ка извоу).

Осим тога, њиме ћемо да покажемо да важи општије тврђење:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{\int}_{I_x} f(x)\,dx &= \overline{\int}_{I_t} f\circ\varphi(t)\,|\varphi'(t)|\,dt \\ \underline{\int}_{I_x} f(x)\,dx &= \underline{\int}_{I_t} f\circ\varphi(t)\,|\varphi'(t)|\,dt \end{aligned}} \quad (*)$$

где су $\overline{\int}$ и $\underline{\int}$ горњи и доњи Дарбуов интеграл. По претпоставци је φ дифеоморфизам (класе C^1) интервала у $\mathbb{R}$. Специјално, то значи да је φ монотона функција. Претпоставимо (заменом φ са $-\varphi$ ако није тако) да је φ растућа. Тада свакој подели P_x интервала I_x са подеоним тачкама $\{x_j\}$ одговара тачно једна подела P_t интервала I_t са

подеоним тачкама $t_j := \varphi^{-1}(x_j)$. Тада је

$\Delta x_j = \varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1}) = \varphi'(\xi_j)\Delta t_j$ (Лагранжева т.)

Пошто је φ' равномерно непрекидна (то следи из Канторове теореме), тада може да се изабере тако да осцилација φ' на интервалима I_{t_j} тада буде мања од задатог $\varepsilon > 0$.

Из $f \in \mathcal{R}(I_x)$ следи $|f| \le M$.

Можемо да претпоставимо и да је $f \ge 0$, јер свака функција може да се напише као разлика ненегативних, $f = f^+ - f^-$, где је $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := \max\{-f, 0\}$, а тврђење лема је линеарно, па оно важи за f^+ и f^- важиће и за f.

Уз све ове претпоставке, за Дарбуове суме важиће

$$\sum_j \sup_{I_{x_j}} f(x)\,\Delta x_j \le \sum_j \sup_{t\in I_{t_j}} f\circ\varphi(t) \sup_{t\in I_{t_j}} |\varphi'(t)|\,\Delta t_j$$

$$\le \sum_j \sup_{t\in I_{t_j}} \left(f\circ\varphi(t) \cdot \sup_{t\in I_{t_j}} |\varphi'(t)| \right) \Delta t_j$$

$$\le \sum_j \sup_{t\in I_{t_j}} \left(f\circ\varphi(t) \cdot (|\varphi'(t)| + \varepsilon) \right) \Delta t_j$$

$$\le \sum_j \sup_{t\in I_{t_j}} \left(f\circ\varphi(t)\,|\varphi'(t)| \right) \Delta t_j + M\varepsilon\,\mu(I_t).$$

Пошто је $\varepsilon > 0$ произвољно, одатле следи (после преласка на $\lim_{\mathcal{T}_J}$) да је

$$\overline{\int_{I_x}} f(x)\,dx \le \overline{\int_{I_t}} f\circ\varphi(t)\,|\varphi'(t)|\,dt.$$

Ако обу доказану неједнакост применимо на дифеоморфизам φ^{-1} уместо φ и

функцију $f\circ\varphi\,|\varphi'|$ уместо f, добијамо обичну једнакост, чиме је доказана прва једнакост у (*). Друга следи из ње применом на $-f$ уместо f. ▨

Напомена: Смена променљиве за функције једне променљиве у уобичајеном облику

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\circ\varphi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

тј. са $\varphi'(t)$ уместо $|\varphi'(t)|$, није у противречности са доказаном Лемом 2.

φ је диференцијабилна $\Rightarrow \varphi\uparrow \vee \varphi\downarrow$

$\Rightarrow \varphi'\geq 0 \vee \varphi'\leq 0 \Rightarrow \varphi' = |\varphi'| \vee \varphi' = -|\varphi'|$.

Ако је $\varphi' = -|\varphi'|$, тј. $\varphi\downarrow$, тада је $\varphi(\alpha) > \varphi(\beta)$

па је $$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = -\int_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\alpha)} = \int_{\varphi([\alpha,\beta])}.$$

Подсећање: Дифеоморфизам

$$\varphi : D_t \longrightarrow D_x \subseteq \mathbb{R}^k$$

назива се простим ако мења највише једну координату, тј. ако је за неко l, $(1 \le l \le k)$ његов запис у координатама $x = \varphi(t)$:

$$x_j = \begin{cases} t_j, & j \neq l \\ \varphi_l(t_1, \dots, t_k), & j = l. \end{cases}$$

Као једну од последица Теореме о имплицитној функцији, доказали смо следеће

Тврђење: Сваки дифеоморфизам класе C^1

$$\mathbb{R}^k \supseteq V \xrightarrow{\varphi} \varphi(V) \subseteq \mathbb{R}^k$$

може локално да се представи као композиција k простих дифеоморфизама.

Лема 3: Теорема о смени променљивих у интегралу важи за просте дифеоморфизме.

Доказ: Ово је у суштини последице леме 2 и Фубинијеве теореме.

Претпоставимо (не умањујући општост, јер се ради само о нумерисању координата) ради једноставности записа да φ мења само последњу (k-ту) координату. Тада је

$$\det \varphi' = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_k}.$$

Нека су $J_x \supseteq D_x$ и $J_t \supseteq D_t$ ивични у $\mathbb{R}^k$. Дио напишемо $J_x = \tilde{J}_x \times I_x$, $J_t = \tilde{J}_t \times I_t$, где су $\tilde{J}_x$, $\tilde{J}_t$ ивични у $\mathbb{R}^{k-1}$, а I_x, I_t интервали у $\mathbb{R}$ и применимо Фубинијеву теорему на интеграл функције $f \cdot \chi_{D_x}$

по квадру $J_x = \tilde{J}_x \times I_x$ добијамо

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{J_x} f(x)\chi_{D_x}(x)\,dx =$$

$$= \int_{\tilde{J}_x} \left(\int_{I_x} f(x)\,\chi_{D_x}(x)\,dx_n \right) dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$$= \int_{\tilde{J}_t} \left(\int_{I_t} f\circ\varphi(t)\,\chi_{D_t}(t) \left|\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_k}\right| dt_k \right) dt_1 \dots dt_{k-1}$$

$$= \int_{J_t} f\circ\varphi(t)\,|\det \varphi'(t)|\,\chi_{D_t}(t)\,dt$$

$$= \int_{D_t} f\circ\varphi(t)\,|\det \varphi'(t)|\,dt. \quad \blacksquare$$

Лема 4: Ако Теорема о смени променљиве важи за дифеоморфизме

$$\psi : D_s \longrightarrow D_t \quad \text{и} \quad \varphi : D_t \longrightarrow D_x,$$

онда она важи и за композицију

$$\varphi\circ\psi : D_s \longrightarrow D_x.$$

Доказ: Следи из

$$\det(\varphi\circ\psi)' = \det(\varphi'\cdot\psi') = \det\varphi'\cdot\det\psi'$$

и двоструке примене Теореме о смени променљиве: прво за функцију f и дифеоморфизам φ, а затим за функцију $f\circ\varphi\,|\det\varphi'|$ и дифеоморфизам ψ:

$$\int_{D_x} f(x)\,dx = \int_{D_t} f\circ\varphi(t)\,|\det\varphi'(t)|\,dt$$

$$= \int_{D_s} (f\circ\varphi)\circ\psi(s)\,|\det\varphi'\circ\psi(s)|\,|\det\psi'(s)|\,ds$$

$$= \int_{D_s} f\circ(\varphi\circ\psi)(s)\,|\det(\varphi\circ\psi)'(s)|\,ds. \quad \blacksquare$$

Да бисмо завршили доказ применом Лема 3 и 4 и Тврђења о представљању дифеоморфизма као композиције простих, треба да обратимо пажњу на рег локално у њему.

То значи да свака тачка $t \in D_t$ има околину V_t на којој Φ може да се представи као комбинација простих (даље на којој важи Теорема о смени променљиве за Φ). Идеја доказа да теорема важи на целом скупу D_t је да се D_t покрије са мање скупова на којима теорема важи.

Још једно подсећање:

Лебегова лема: Нека је K компактан метрички простор и $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ његово отворено покривање. Тада $(\exists \delta > 0)$ са својством да је свака отворена лопта полупречника δ садржана у неком V_λ.

Применимо Лебегову лему на компактан

скуп $K := \operatorname{supp}(f \circ \varphi \cdot |\varphi'|)$ и на покривање $(V_t)_{t \in D_t}$ скуповима на којима се φ разлаже на композицију простих (па на њима важи Теорема о смени променљиве). Изаберимо квадар $J \supseteq D_t$ и његову поделу P са параметром $\lambda(P) < \delta$, где је δ број из Лебегове леме придружен покривању $\{V_t\}_{t \in D_t}$ скупа K (значајни су само квадри који секу K, јер је вањ њих $\int = 0$ и Теорема важи). Сваки од тих квадара је подскуп неког V_t (по Лебеговој леми) па на њему важи Теорема о смени променљиве. Због

$$\int_{D_t} (\cdot) = \int_J (\cdot) \chi_{D_t} = \sum_{I_j \in P} \int_{I_j} (\cdot) \chi_{D_t}$$ она важи и на D_t. $\blacksquare$

Векторска поља и диференцијалне форме

M глатка многострукост

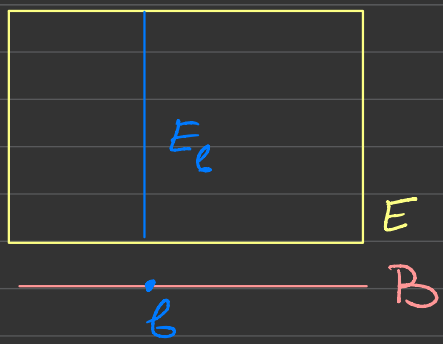
$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ тангентно раслојење

$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M$ котангентно раслојење

Дефиниција: (Глатко) **векторско поље** на M је (глатко) пресликавање $X : M \to TM$ такво да је $X(p) \in T_pM$ за свако $p \in M$.

(Глатко) **ковекторско поље** (**диференцијална 1-форма**) је глатко пресликавање $\alpha : M \to T^*M$ такво да је $\alpha(p) \in T_p^*M$ за свако $p \in M$.

Општије: $E := \bigcup_{b \in B} E_b$, пресликавање $s : B \to E$ такво да је $(\forall b \in B)\, s(b) \in E_b$ назива се **сечењем**.



$\pi : E \to B$

$\pi(E_b) = \{b\}$

π – пројекција

s – сечење ако је $\pi \circ s = id_B$

B – база, E – тотални простор

E_b – слој (влакно, фибра) над b.

У овим терминима: векторско поље је сечење тангентног расслојења, а ковекторско поље (диференцијална 1-форма) је сечење котангентног расслојења.

У општење диференцијалних 1-форми су (диференцијалне) l-форме.

Специјалан случај: M - отворен подскуп еуклидског простора.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп

$\Omega^1(U) := \{$ диференцијална форма на $U\}$

$\alpha \in \Omega^1(U)$, $p \in U \Rightarrow \alpha : U \to T^*U$

$\alpha(p) : T_pU \to \mathbb{R}$ линеарно

$T_pU = \mathbb{R}^n \ni \{e_1, \dots, e_n\}$

$X \in T_pU$ дефинисано као

$$X = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

$$\alpha(p) X = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \alpha(p)(e_j)$$

база у T_pU: $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$

у њој дефинису

$$X = c_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + c_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

$dx_1, \dots, dx_n$ – база у $T_p^* U$ дуална

бази $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ у $T_p U$, тј.

$$dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & k = j \end{cases}$$

$$(\forall \alpha \in \Omega^1(U))(\forall p \in U)\ \alpha(p) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, dx_j$$

c_j се мења од тачке до тачке у U

(зависи од p, другим речима то је реална функција на U)

$\Omega^1(U) :=$ модул над прстеном $C^\infty(U)$

генерисан генераторима $\{dx_1, \dots, dx_n\}$.

$$\Omega^1(U) = C^\infty(U) \otimes \mathcal{L}in\{dx_1, \dots, dx_n\}$$

На простору $\Omega^1(U)$ дефинишемо множење

$\Lambda : \Omega^1(U) \times \Omega^1(U) \longrightarrow$ betn модул

спољашње множење

Шта је „већи модул" на десној страни?

$$\Omega^2(U) = C^\infty(U) \otimes \mathrm{Lin}\{dx_i \wedge dx_j\}_{1 \le i < j \le n}$$

Постулирамо следећа својства множења

$$\Lambda : \Omega^1(U) \times \Omega^1(U) \longrightarrow \Omega^2(U):$$

(1) Λ је дистрибутивно према $+$

(2) Λ је антикомутативно:

$$dx_j \wedge dx_k = - dx_k \wedge dx_j$$

Другим речима: Посматрамо објекте које означавамо са $dx_i \wedge dx_j$ (за сада их схватимо као апстрактне објекте, тј. само као ознаке за елементе неког скупа), са $\Omega^2(U)$ означимо модул над прстеном $C^\infty(U)$ генерисан њима и проширимо множење

$\Lambda : \{dx_1, \dots, dx_n\} \times \{dx_1, \dots, dx_n\} \longrightarrow \Omega^2(U)$

$dx_j, dx_k \longmapsto dx_j \wedge dx_k$

т.е. $\Lambda : \Omega^1(U) \times \Omega^1(U) \longrightarrow \Omega^2(U)$ то

билинейность ($\forall g \in C^\infty(U)$), т.

дистрибутивность.

$(2) \Rightarrow dx_j \wedge dx_j = 0$, $dx_k \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_k$ (**)

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}in\{dx_i \wedge dx_j\} = \binom{n}{2}$

Самое фундаментальное

$\Omega^3(U) = C^\infty(U) \otimes \mathcal{L}in\{dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k\}$

$dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k = -dx_j \wedge dx_i \wedge dx_k$

$\dim \Omega^3(U) = \binom{n}{3}$

$\Omega^l(U) = C^\infty(U) \otimes \mathcal{L}in\{dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l}\}$

$\dim \mathcal{L}in\, \Omega^l(U) = \binom{n}{l}$ где $0 \le l \le n$

$l > n \Rightarrow \Omega^l(U) = \{0\}$, зато (**)

$$\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^\ell(U) \longrightarrow \Omega^{k+\ell}(U) \quad (*)$$

Элементы модуля $\Omega^\ell(U)$ называют дифференциальными ℓ-формами, а $(*)$ называют операцией умножения дифференциальных форм.

Пример: $U \subseteq \mathbb{R}^3$ $\alpha = y\,dx + x^2\,dz \in \Omega^1(U)$

$\beta = x\,dy \wedge dz + dx \wedge dy \in \Omega^2(U)$

$\alpha \wedge \beta \in \Omega^{1+2}(U) = \Omega^3(U)$

$(y\,dx + x^2\,dz) \wedge (x\,dy \wedge dz + dx \wedge dy)$

$xy\,dx \wedge dy \wedge dz + y\,dx \wedge dx \wedge dy + x^3\,dz \wedge dy \wedge dz +$ ($dx \wedge dx = 0$, $dz \wedge dy \wedge dz \neq 0$)

$+ x^2\,dz \wedge dx \wedge dy =$

$= xy\,dx \wedge dy \wedge dz + x^2\,dz \wedge dx \wedge dy$

$= (xy + x^2)\,dx \wedge dy \wedge dz$

Дефиниција: Диференцијал диференцијалних форми је пресликавање

$$d : \Omega^l(U) \to \Omega^{l+1}(U)$$

дефинисано са:

(1) за $l = 0$ $\quad (\Omega^0(U) = C^\infty(U))$

$d : C^\infty(U) \to \Omega^1(U)$ је диференцијал функције:

$$d : f \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j =: df$$

(2) $\alpha = f \cdot dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l} \in \Omega^l(U)$

$$d\alpha := df \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$$

(Лајбницово правило)

(3) d је линеарно над $\mathbb{R}$.

Пример: $d(xy\,dx + z^2\,dy) =$

$= d(xy) \wedge dx + 2z\,dz \wedge dy = (y\,dx + x\,dy) \wedge dx + 2z\,dz \wedge dy$

$= x\,dy \wedge dx + 2z\,dz \wedge dy$

Други поглед на $\alpha \wedge \beta$ (без координата):

$\alpha, \beta \in \Omega^1(U) \Rightarrow (\forall p \in U)\ \alpha(p), \beta(p) : T_pU \to \mathbb{R}$

$\alpha(p) =: \alpha_p$, $\beta(p) =: \beta_p$

$X, Y \in T_pU$

$$\alpha_p \wedge \beta_p (X, Y) := \begin{vmatrix} \alpha_p(X) & \alpha_p(Y) \\ \beta_p(X) & \beta_p(Y) \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_p \wedge \beta_p$ је антисиметрично билинеарно пресликавање $T_pU \times T_pU \to \mathbb{R}$

Слично: $\alpha^1, \dots, \alpha^l \in \Omega^1(U)$

$\Rightarrow \alpha^1_p \wedge \dots \wedge \alpha^l_p$ може да се дефинише као антисиметрично l-линеарно пресликавање на T_pU.

Овај опис не захтева координате, па може да послужи дефиниција на произвољној многострукости (уместо $U \subseteq \mathbb{R}^n$):

Дефиниција: Нека је M глатка многострукост. **Диференцијална l-форма** на M (краће: l-форма) је фамилија антисиметричних l-линеарних пресликавања

$$\alpha_p : (T_pM)^l \longrightarrow \mathbb{R}$$

која глатко зависи од $p \in M$. Скуп свих диференцијалних l-форми на M означавамо са $\Omega^l(M)$.

$F : M \longrightarrow N$ глатко пресликавање (C^∞)

$F_* : TM \longrightarrow TN$

$p \in M \quad F_*(p) : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$

$F_*(p) := DF(p)$

Дуално пресликавање:

$F^* : T^*N \longrightarrow T^*M$

F_* push-forward

F^* pull-back (обратное отображение)

Напомним:

$\alpha_{F(p)} \in T^*_{F(p)} N \qquad X \in T_p M$

$$F^*\alpha_{F(p)}(X) := \alpha_{F(p)}(F_{*(p)} X)$$



$F_* : TM \to TN \qquad F^* : T^*N \to T^*M$

Случай:

$$F^* : \Omega^\ell(N) \longrightarrow \Omega^\ell(M)$$

$$(F^*\beta)(X_1, \dots, X_\ell) := \beta(F_* X_1, \dots, F_* X_\ell)$$

Напомена: Често изостављамо p из ознаке и пишемо $F_* X$ уместо $F_{*(p)} X$.

Тврђење: За $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ и пресликавање $F: M \to N$ важи:

(1) $F^*(\alpha + \beta) = F^*\alpha + F^*\beta$

(2) $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$

Другим речима, ако дефинишемо

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{j=0}^{\dim M} \Omega^j(M)$$ и

сличан $\Omega^*(N)$, онда је

$F^*: (\Omega^*(N), +, \wedge) \to (\Omega^*(M), +, \wedge)$

хомоморфизам алгебри.

Доказ: Задатак из линеарне алгебре. ▨

Случај $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен подскуп еуклидског простора

$$F : U \to V \subseteq \mathbb{R}^k$$

$$\beta \in \Omega^l(V)$$

Да бисмо видели дејство F^* на β у координатама, довољно је (због линеарности F^*) да претпоставимо да је $\beta = g(y_1, \dots, y_k)\, dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_l}$

$F = (F_1, \dots, F_k)$

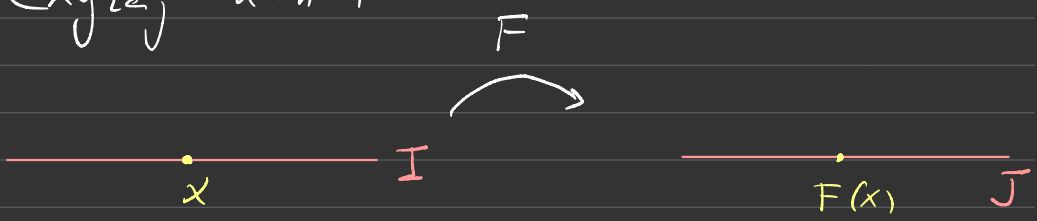
$F^*\beta \in \Omega^l(U)$

$$F^*\beta = g(F_1(x), \dots, F_k(x)) \cdot dF_{j_1} \wedge \dots \wedge dF_{j_l} \quad (*)$$

где је $dF_{j_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{j_1}}{\partial x_i} dx_i$ и слично $dF_{j_2}, \dots, dF_{j_l}$

$\Rightarrow F^*\beta = \sum (\quad) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$

Случај $k=n=1$



$\beta \in \Omega^1(J) \Rightarrow \beta = g(y)\,dy$

$\xi \in T_p I$, $\xi = a\hat{\imath}$

извод у правцу X

$F^*\beta(\xi) := \beta(F_*\xi)$

$= \beta(DF(x)\cdot a\hat{\imath})$ $\quad \in T_{F(x)} J$

$= \beta(F'(x)\cdot a\hat{\imath})$

$= F'(x)\, g(F(x))\cdot \underline{\underline{a}}$ $\quad dx(a\hat{\imath})$, $a\hat{\imath} = \xi$

$= \underline{g(F(x))\cdot F'(x)\, dx(\xi)}$

Важи за свако $\xi \in T_p I$

$\Rightarrow F^*\beta = g\circ F \cdot \underbrace{F'dx}_{dF}$

$\Rightarrow F^*\beta = (g\circ F)\,dF \Rightarrow$ (*) за $k=n=1$.

Теорема: Ако су $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворени скупови и $F: U \to V$ C^∞ глад. онда је $\boxed{d \circ F^* = F^* \circ d}$ другим речима, дијаграм

$$\begin{array}{ccc} \Omega^l(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^{l+1}(M) \\ \uparrow F^* & & \uparrow F^* \\ \Omega^l(N) & \xrightarrow{d} & \Omega^{l+1}(N) \end{array}$$

комутира.

Напомена: Кажемо да дијаграм

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Б \\ g \downarrow & \nearrow h & \\ B & & \end{array}$$

комутира, ако је $h \circ g = f$.

Другим речима дијаграм комутира ако путовање од једног објекта до другог у смеру стрелица не зависи од избора стрелица.

Локална егзактност следи из (*) и правила за извод сложене функције. ▨

Захваљујући претходној теореми, можемо да дефинишемо

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

за произвољну многострукост M у координатама (локалност диференцирања) на следећи начин: $\beta \in \Omega^k(M)$, $p \in M$, $\varphi : U \to M$ карта у околини тачке p, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен,

Тада је $\varphi^*\beta \in \Omega^l(U)$, па је $d\varphi^*\beta$ дефинисано

$$\Rightarrow d\beta = (\varphi^{-1})^* d\varphi^*\beta \in \Omega^l(\varphi(U))$$

Задатак: $\alpha \in \Omega^l(M)$, $\beta \in \Omega^k(M)$

Доказати:

$$\boxed{d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta} \quad (**)$$

(Лајбницово правило).

Упутство: Због линеарности d довољно је доказати формулу за

$\alpha = f(x)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_l}$, $\beta = g(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$.

Применити дефиницију d.

Напомена: У дефиницији d сво Лајбницовим правилом називали правило

$$d(f\cdot dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_l}) = df\wedge dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_l}$$

што јесте специјални случај (**).

Наиме, важи следеће тврђење:

Теорема: $\alpha\in\Omega^l(M) \Rightarrow d(d\alpha)=0$.

Другим речима, за композицију

$$\Omega^l(M)\xrightarrow{d}\Omega^{l+1}(M)\xrightarrow{d}\Omega^{l+2}(M)$$

важи $\boxed{d\circ d=0.}$

Доказ: Довољно је два пута применити дефиницију d на $f\cdot dx_{j_1}\wedge\ldots\wedge dx_{j_l}$ и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\wedge dx_j+\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}dx_j\wedge dx_i=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}dx_j\wedge dx_j=0.$$



$\blacksquare$

Следи:

$$d(f \cdot dx) \overset{(**)}{=} df \wedge dx + (-1)^0 \cdot f \cdot d(dx)$$

$$= df \wedge dx$$

$\Rightarrow$ Лајбницово правило из дефиниције диференцијала $d \iff (**)$

Последица: $\operatorname{Im} d \subseteq \operatorname{Ker} d$

$$\Omega^{l-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^l(M) \xrightarrow{d} \Omega^{l+1}(M)$$

Дефиниција: (1) форма $\alpha \in \Omega^l(M)$ је затворена, ако је $d\alpha = 0$

(2) форма $\alpha \in \Omega^l(M)$ је тачна ако $(\exists \beta \in \Omega^{l-1}(M))\ d\beta = \alpha$

(3) Количнички простор

$$H^l_{dR}(M) := \operatorname{Ker} d|_{\Omega^l(M)} / \operatorname{Im} d|_{\Omega^{l-1}(M)}$$

се назива де Рамоова кохомологија од M.

Другим речима, $H^l_{dR}(M)$ је количник простор у односу на релацију еквиваленције на $\ker d \subseteq \Omega^l(M)$ дефинисану са

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 \iff (\exists \beta \in \Omega^{l-1}(M))\ \alpha_1 = \alpha_2 + d\beta$$

Напомене: (1) множење

$$\wedge : \Omega^l(M) \times \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{l+k}(M)$$

индукује множење

$$\wedge : H^l_{dR}(M) \times H^k_{dR}(M) \longrightarrow H^{l+k}_{dR}(M)$$

(Задатак!)

(2) $$H^*_{dR}(M) := \bigoplus_{k=0}^{\dim M} H^k_{dR}(M)$$

$$:= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k_{dR}(M),$$

где је $H^k_{dR}(M) = 0$ за $k \notin \{0, 1, \ldots, \dim M\}$

$(H^*_{dR}(M), +, \wedge)$ је алгебра.

(3) $F: M \to N$ C^∞ пресликавање $\Rightarrow$

$F^*: H^l_{dR}(N) \to H^l_{dR}(M)$ (*)

је хомоморфизам група (за све l), а

$F^*: H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$

је хомоморфизам претекова

Задатак: Доказати да

$F^*: \Omega^l(N) \to \Omega^l(M)$

индукује добро дефинисано пресликавање (*)

(4) $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} S$ C^∞ пресликавање

$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ извод композиције

$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ (**)

Последица: Ако је $F: M \to N$

дифеоморфизам, онда је

$F_*: H^l_{dR}(N) \to H^l_{dR}(M)$ изоморфизам.

Доказ: (**) $\Rightarrow (F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$ ▨

Дефиниција: Пресликавања $F_0, F_1 : X \to Y$ тополошких простора су изотопна ако постоји непрекидно пресликавање

$\tilde{F} : X \times [0,1] \to Y$

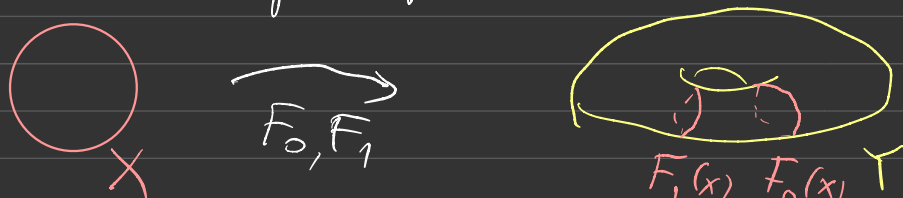
такво да важи:

(1) $(\forall t \in [0,1])$ $\tilde{F}(\cdot, t) : X \times \{t\} \to \tilde{F}(X \times \{t\})$ хомеоморфизам.

(2) $\tilde{F}(x,0) = F_0(x)$, $\tilde{F}(x,1) = F_1(x)$

(сукцесивно, F_0 и F_1 су хомеоморфизми)

Кажемо да су тада $F_0(X)$ и $F_1(X)$ изотопни простори.



Дефиниција: Пресликавања $F_0, F_1 : X \to Y$ тополошких простора су **хомотопна** (**хомотопски еквивалентна**) ако постоји непрекидно пресликавање

$$\tilde{F} : X \times [0,1] \to Y$$

такво да је $\tilde{F}(x,0) = F_0(x)$, $\tilde{F}(x,1) = F_1(x)$

Ознака: $F_0 \simeq F_1$

Простори X и Y су **хомотопни** (**хомотопски еквивалентни**) ако постоје непрекидна пресликавања

$$F : X \to Y \quad \text{и} \quad G : Y \to X$$

таква да је

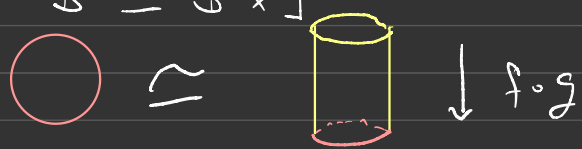
$$F \circ G \simeq id_Y \quad \text{и} \quad G \circ F \simeq id_X.$$

Ознака: $X \simeq Y$.

Примери: ① Y конвексан скуп у $\mathbb{R}^n$ (или у тополошком векторском простору) $(\forall f, g : X \to Y)$ $f \simeq g$, јер $\exists$ хомотопија

$$\tilde{F}(x,t) := t f(x) + (1-t) g(x) \Rightarrow F_0 = g, \quad F_1 = f$$

② $S^1 \simeq S^1 \times I$

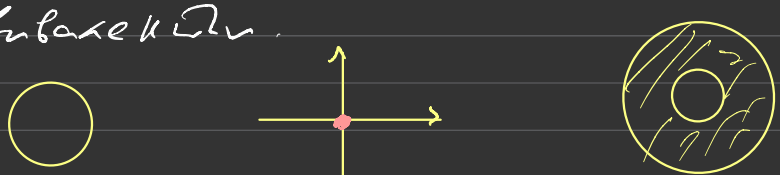


$f : S^1 \to S^1 \times I$ $\qquad$ $g : S^1 \times I \to S^1$

$f(x) := (x, 0)$ $\qquad$ $g(x,t) = x$

$g \circ f = id_{S^1}$ $\qquad$ $f \circ g \simeq id_{S^1 \times I}$ (као у ①)

Задатак: Доказати да су круг S^1, пробушена раван $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и кружни прстен $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ хомотопски еквивалентни.



Тврђење: За свако непрекидно пресликавање $f: M \to N$ глатких многострукости постоји глатко пресликавање $F: M \to N$ такво да је $f \simeq F$.

Доказ може да се изведе из Вајерштрасове теореме о апроксимацији и једнакост једнице. ▨

$X : M \to TM$ векторско поље

Дефиниција: Унутрашњи извод (или контракција векторског поља X) је пресликавање

$$i_X : \Omega^l(M) \longrightarrow \Omega^{l-1}(M)$$

дефинисано, за $\alpha \in \Omega^l(M)$ са

$$i_X(\alpha) := \alpha(X, \underbrace{\ldots}_{\leftarrow (l-1) \text{ места}})$$

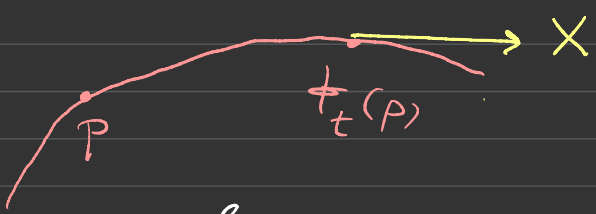
Друга ознака: $i_X \alpha =: X \lrcorner \alpha$.

Картанова формула: $\phi_t : M \to M$ глатка (по t) фамилија глатких пресликавања.

Другим речима $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал,

$M \times I \longrightarrow M$, $(p, t) \longmapsto \phi_t(p)$ глатко

$$X(\phi_t(p)) := \frac{d\phi_t}{dt}(p) \quad \text{(пишемо краће: } X\text{)}$$



За $\alpha \in \Omega^{\ell}(M)$ важи:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*\left(X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha)\right)}$$

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*\left(i_X d\alpha + d(i_X\alpha)\right).$$

Доказ се може извести индукцијом по l:

$l=0$: $\alpha \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, тј. $\alpha = f$ (глатка функција)

$i_X : \Omega^0(M) \to \{0\}$

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^* f = df(X) \quad (*)$$

за функцију f: $\Phi_t^* f = f \circ \Phi_t$

$\Rightarrow$ $(*)$ је довољно да изведу конструкције

$l \rightsquigarrow l+1$: $\alpha \in \Omega^{l+1}(M)$

локалност диференцијала $\Rightarrow$ можемо да изведемо доказ у локалним координатама.

линеарност диференцијала $\Rightarrow$ можемо да претпоставимо $\alpha = dx_j \wedge \beta$ за $\beta \in \Omega^l(M)$. Применити Лајбницово правило на $\frac{d}{dt} \Phi_t^* (dx \wedge \beta)$ ...

Последица 1: Нека су $f_0, f_1 : M \to N$, $f_0^*, f_1^* : H^*_{dR}(N) \to H^*_{dR}(M)$. Тада важи: $f_0 \simeq f_1 \Rightarrow f_0^* = f_1^*$

Доказ: f_t, $0 \le t \le 1$ хомотопија између f_0 и f_1 и $\alpha \in \Omega^\ell(N)$ форма која је представник класе у $H^\ell_{dR}(M)$, тј. $d\alpha = 0$. Тада је

$$f_1^*\alpha - f_0^*\alpha = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_t^*\alpha \, dt =$$

$$= \int_0^1 f_t^* (X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha)) \, dt =$$

$$= \int_0^1 f_t^* (d(X \lrcorner \alpha)) \, dt =$$

$$= \int_0^1 d\left(f_t^*(X \lrcorner \alpha)\right) dt$$

$$= d \int_0^1 f_t^*(X \lrcorner \alpha) \, dt$$

$$\Rightarrow f_1^*\alpha - f_2^*\alpha \in \operatorname{Im} d$$



Последица 2: Ако је $M \simeq N$ онда је $H^*_{dR}(M) \cong H^*_{dR}(N)$.

Доказ: $M \simeq N \Rightarrow \exists\, f: M \to N,\ g: N \to M$

$f \circ g \simeq id_N$, $g \circ f \simeq id_M$

Из Последице 1 следи

$$g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = (id_N)^* = id_{H^*_{dR}(N)}$$

слично $f^* \circ g^* = id_{H^*_{dR}(M)}$

$\Rightarrow f^*$ и g^* изоморфизми. $\blacksquare$

Пример: Круг S^1, пробушена раван $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и кружни прстен су хомотопски еквивалентни, па имају исте де Рамове кохомологије.

Због димензије: $H^l_{dR}(S^1) = \{0\}$ за $l \notin \{0,1\}$. Остаје да размотримо $l \in \{0,1\}$.

$\underline{\ell = 0}$: $\Omega^0(S^1) = C^\infty(S^1)$ функције

$f : S^1 \to \mathbb{R}$

$H^0_{dR}(S^1) = \ker d / \operatorname{Im} d$ — повезаност S^1

$f \in \ker d \Leftrightarrow df = 0 \Leftrightarrow f = \text{const}$

$\Rightarrow \ker d = \mathbb{R}$

$\Omega^{-1}(S^1) := \{0\} \Rightarrow \operatorname{Im} d|_{\Omega^{-1}(r)} = \{0\}$

$\Rightarrow \underline{H^0_{dR}(S^1) = \mathbb{R}}$.

Задатак: Доказати да је многострукост M повезана акко и само акко је $H^0_{dR}(M) = \mathbb{R}$.

Одговор: $\dim H^0_{dR}(M) =$ број компоненти повезаности M.

$\underline{\ell = 1}$: θ (поларна координата) није добро дефинисана на S^1 (дефинисана је до на $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Међутим $d\theta$ јесте добро дефинисано, јер је $d(2k\pi) = 0$.

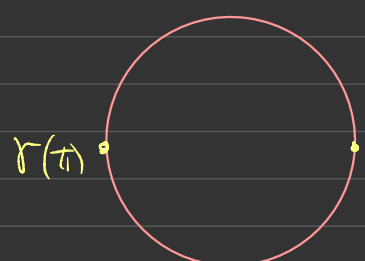
$d \circ d = 0 \Rightarrow d(d\theta) = 0$

$\Rightarrow d\theta \in \ker d$

Тврдимо: $d\theta \notin \operatorname{Im} d$

Претпоставимо супротно: $d\theta = df$ за неко $f \in \Omega^0(S^1) = C^\infty(S^1)$

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow S^1$, $\gamma(t) = e^{it}$



$$f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(\pi)) = \int_\pi^{2\pi} \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\, dt$$

$$= \int_\pi^{2\pi} df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \int_\pi^{2\pi} d\theta(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\pi^{\pi} \frac{d}{dt} \theta(\gamma(t))\, dt$$

$$= \theta(2\pi) - \theta(\pi) = \pi \qquad (*)$$

Слично: $f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = \pi$ (**)

Због $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ из (*) (**) следи

$0 = 2\pi$ што је конфликтија.

$\Rightarrow d\theta$ дефинише нетривијалну класу

у $H^1_{dR}(S^1) = \ker d / \operatorname{Im} d$

$\alpha \in \Omega^1(S^1)$, $d\alpha = 0$

$\gamma^*\alpha \in \Omega^1([0, 2\pi]) \to \gamma^*\alpha = h(t)\,dt$

$$c := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)\,dt$$

$g : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = \int_0^t \left(d\theta(\gamma(s))\cdot\gamma'(s) - \frac{1}{c}h(s)\right)ds$$

$g(0) = g(2\pi) \Rightarrow g$ дефинише

функцију $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$

Нути-Лајбницова формула $\Rightarrow$

$$dg = d\theta - \frac{1}{c}\alpha \Rightarrow \alpha = c\,d\theta + d(cg)$$

$\Rightarrow$ класа форме α у $H^1_{dR}(S^1)$ једнака класи форме $c\,d\theta$ у $H^1_{dR}(S^1)$

$\Rightarrow H^1_{dR}(S^1)$ генерисано класом форме $d\theta$

$\Rightarrow H^1_{dR}(S^1) = \mathbb{R}$.

Напомена: може да се докаже да важи и општије:

$$H^l_{dR}(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & l \in \{0, n\} \\ 0 & l \notin \{0, n\} \end{cases}$$

Доказ може да се изведе индукцијом по n; за $n=1$ то је претходни пример, али прелаз са n на $n+1$ захтева познавање тзв. Мајер–Вијеторисовог аргумента који повезује кохомологије уније, пресека и подскупа и који неће бити овде разматран.

Пример: Топката $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ е хомотопично еквивалентна точка, т.е., ако покажем

$f : \{0\} \to B^n$, $f(0) = 0$

$g : B^n \to \{0\}$, $g(x) = 0$

$g \circ f : \{0\} \to \{0\}$ $\quad g \circ f = id_{\{0\}}$

$f \circ g : B^n \to B^n$ $\quad f \circ g(x) \equiv 0$

B^n изпъкнало $\Rightarrow f \circ g \simeq id_{B^n}$ чрез

Пример ① са използвали тук.

$\Rightarrow B^n \simeq \{0\}$

Дефиниция: Топологично пространство X се нарича контрактивимо ако е хомотопично еквивалентно едноточково множество.

Означаваме: $X \simeq *$

Из $B^n \simeq *$ следи

$$H^\ell_{dR}(B^n) = H^\ell_{dR}(*) = \begin{cases} \mathbb{R} & \ell = 0 \\ 0 & \ell \neq 0 \end{cases}$$

због повезаности

због $\dim * = 0$

Теорема: Не постоји глатко пресликавање $f: B^n \to S^{n-1} := \partial B^n$ такво да је $f(x) = x$ за све $x \in S^n$.

Дефиниција: X тополошки простор $A \subseteq X$

Пресликавање $f: X \to A$ такво да важи

(1) f је непрекидно

(2) $(\forall a \in A)\ f(a) = a$

назива се ретракцијом простора X на потпростор A. Ако постоји таква ретракција A се назива ретрактом простора X.

Претходно тврђење каже да не постоји глатка ретракција $\mathbb{B}^n$ на $\partial\mathbb{B}^n$.

Доказ: $j : S^{n-1} \to \mathbb{B}^n$, $j(x) = x$

Претпоставимо да постоји ретракција

$f : \mathbb{B}^n \to S^{n-1}$, $(\forall a \in S^{n-1})\ f(a) = a$

$f \circ j : S^{n-1} \to S^{n-1}$, $f \circ j(x) = x$; $f \circ j = id_{S^{n-1}}$

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "f \circ j = id"'] & \mathbb{B}^n \arrow[r, "f"] & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H^{n-1}_{dR}(S^{n-1}) \arrow[r, "f^*"] \arrow[rr, bend right] & H^{n-1}_{dR}(\mathbb{B}^n) \arrow[r, "j^*"] & H^{n-1}_{dR}(S^{n-1}) \end{tikzcd}$$

$$H^{n-1}_{dR}(S^{n-1}) = \mathbb{R}, \quad H^{n-1}_{dR}(\mathbb{B}^n) = 0, \quad H^{n-1}_{dR}(S^{n-1}) = \mathbb{R}$$

$$j^* \circ f^* = (f \circ j)^* = id^* = id$$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R} \xrightarrow{f^*} \{0\} \xrightarrow{j^*} \mathbb{R}$, $j^* \circ f^* = id$

$\Rightarrow$ контрадикција $\blacksquare$



Напомена: Може да се докаже (применом Стоун-Вајерштрасове или неке друге теореме о апроксимацији непрекидних пресликавања полиномима) да је свако непрекидно пресликавање $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ хомотопно идентичком пресликавању лопте на сфери.

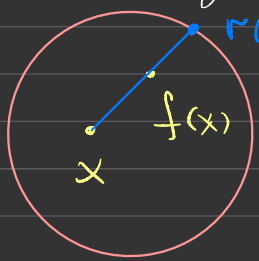
Последица (Брауерова теорема о фиксној тачки): Свако непрекидно пресликавање $f: \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ има бар једну фиксну тачку. Другим речима:

$$f \in C(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n) \Rightarrow (\exists x_0 \in \mathbb{B}^n)\ f(x_0) = x_0$$

Доказ: Претпоставимо супротно:

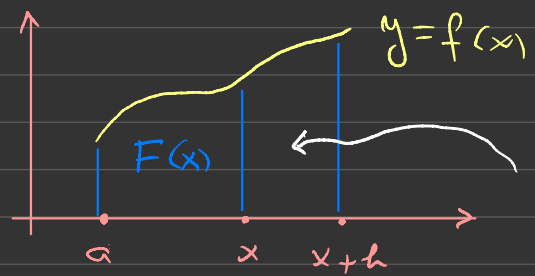
$$(\forall x \in \mathbb{B}^n)\quad f(x) \neq x$$

$$r(x) = \frac{f(x) - x}{\|f(x) - x\|}$$



$r: \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ ретракција $\Rightarrow$ контрадикција! ▨

Подсетање на Анализу 1: $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал, $f \in C^\infty(I)$ (довољно је $f \in C(I)$, па и слабије) $\Rightarrow (\exists F : I \to \mathbb{R})$ $F' = f$. (*)



$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F(x+h) - F(x) \approx f(x) \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \to f(x) \quad \text{кад} \quad h \to 0$$

У више димензија (*) нема смисла, јер су f и F' објекти различитог типа.

Правилно постављено питање:

$\alpha \in \Omega^1(M) \rightsquigarrow$ да ли постоји $F : M \to \mathbb{R}$ $(F \in C^\infty(M) = \Omega^0(M))$ такво да је $\alpha = dF$

У Анализи 1: $M = I$, $\alpha = f(x)dx$

$$dF = f(x)dx, \quad dF = F'(x)dx \Leftrightarrow F' = f$$

Отприје питање: када за дату форму $\alpha \in \Omega^l(M)$ постоји $\beta \in \Omega^{l-1}(M)$ тако да је $\alpha = d\beta$?

$d \circ d = 0 \Rightarrow (\alpha = d\beta \Rightarrow d\alpha = d(d\beta) = 0)$

Неопходан услов за постојање такве форме β је $d\alpha = 0$.

Другим речима, α мора да буде затворена форма (тј. $\alpha \in \ker d$).

Довољан услов $\Leftrightarrow \alpha \in \operatorname{Im} d$

$\Leftrightarrow [\alpha] = 0 \in H^l_{dR}(M)$, где је $[\alpha]$ класа форме $\alpha \in \Omega^l(M)$ у $H^l_{dR}(M) = \ker d / \operatorname{Im} d$

Стога, ако је $H^l_{dR}(M) = 0$, онда је довољан услов испуњен за сваку затворену форму $\alpha \in \Omega^l(M)$.

Приметимо да $H^p_{dR}(M)$ зависи само од хомотопског типа многострукости M.

Пример: Лема 1: $M = I$ интервал у $\mathbb{R}$

$\Omega^2(I) = \{0\}$ јер је $\dim I = 1 < 2$

$\Rightarrow d: \Omega^1(I) \to \Omega^2(I)$ је 0-пресликавање

$\Rightarrow \forall \alpha \in \Omega^1(I)$ постоји неопходан услов.

Сем тога: $I \simeq *$ (I је контрактибилан)

$\Rightarrow H^1_{dR}(I) = H^1_{dR}(*) = 0$

$\Rightarrow$ свака форма $\alpha \in \Omega^1(I)$ испуњава и довољан услов.

Напомена: Видели смо тополошки (прецизније: хомотопски) разлог због којег важи основна теорема интегралног рачуна у Леми 1.

Дуални поглед на диференцијалне форме

„Вектор" набла ($\vec{\nabla}$) у координатама у $\mathbb{R}^n$:

$$\vec{\nabla} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Овај „вектор" дејствује на векторска поља и скаларне функције по формалним правилима операција у векторском простору $\mathbb{R}^n$:

(1) множење скаларом

$\vec{A} = (a_1, \dots, a_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \cdot \vec{A} = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$

$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$ $\vec{\nabla} \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

Овај објекат се назива градијентом.

$$\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \cdot f$$ ← „множење скаларом"

(2) скаларни производ

$\vec{A} = (a_1, \dots a_n)$, $\vec{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \quad \vec{B} = (b_1(x), \dots, b_n(x)) \in \mathbb{R}^n \mathbb{R}^n$$

Дивергенција векторског поља B је

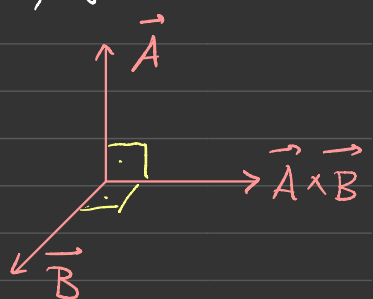
$$\operatorname{div} \vec{B} := \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial b_n}{\partial x_n}$$

(матрица $D\vec{B}$)

(3) $n = 3$, векторски производ $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} := \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \vec{B} = (b_1(x,y,z), b_2(x,y,z), b_3(x,y,z))$$

Ротор векторског поља $\vec{B}$ је

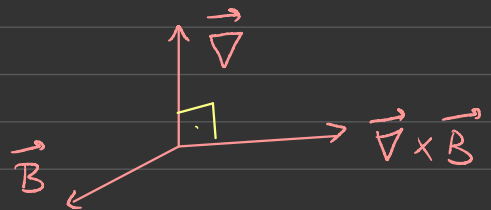
$$\operatorname{rot} \vec{B} := \vec{\nabla} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Напомена: $\operatorname{grad} f$ и $\operatorname{rot} \vec{B}$ су **вектори**, а $\operatorname{div} \vec{B}$ је **скаларна функција**.

Тврђење: $\boxed{\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0}$, $\boxed{\operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0}$.

Доказ:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$



$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \perp \vec{\nabla}$$
$$\Updownarrow$$
$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot f)$$



векторски производ колинеарних вектора $= 0$ ∎

Напомена: Вектор $\vec{\nabla}$ може да се схвати као аналогија диференцијала d, а претходно тврђење као $d \circ d = 0$. Следује →

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$$

$$\Omega^1(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$$

$$f\,dx + g\,dy + h\,dz \longleftrightarrow (f,g,h) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\Omega^2(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$$

$$f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy \leftrightarrow (f,g,h)$$

$$\Omega^3(\mathbb{R}^3) \cong C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$$

$$f\,dx\wedge dy\wedge dz \longleftrightarrow f$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Omega^0(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r, "\vec{\nabla}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \arrow[r, "\vec{\nabla}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\vec{\nabla}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\vec{\nabla}"] & C^\infty(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}) \arrow[r, "\vec{\nabla}"] & 0
\end{tikzcd}$$

grad rot div

Задатак: (*) Показати да овај дијаграм комутира. Закључити да је претходно тврђење (div∘rot = 0, rot∘grad = 0) заиста последица тврђења $d\circ d = 0$.

Други приступ дефиницији div, grad, rot:

За $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ставимо $\omega_f^0 := f$

За $\vec{B} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ставимо $\omega_{\vec{B}}^1 := \langle \vec{B}, \cdot \rangle$

скаларни производ у $\mathbb{R}^n$

$n=3$: $\omega_{\vec{B}}^2 = (\vec{B}, \cdot, \cdot) := B \cdot (\cdot \times \cdot)$

мешовити производ у $\mathbb{R}^3$

За $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ $\omega_f^3 := f \cdot dx \wedge dy \wedge dz$

$\omega_f^0 \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$, $\omega_{\vec{B}}^1 \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, $\omega_{\vec{B}}^2 \in \Omega^2(\mathbb{R}^n)$, $\omega_f^3 \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$

Тврђење: Свака 1-форма у $\mathbb{R}^n$ је облика $\omega_{\vec{B}}^1$ за јединствено $\vec{B}$ и свака 2-форма у $\mathbb{R}^3$ је облика $\omega_{\vec{B}}^2$ за јединствено $\vec{B}$.

Доказ: Скуп свих форми $\omega_{\vec{B}}^1$ (или $\omega_{\vec{B}}^2$) је потпростор простора $\Omega^1(\mathbb{R}^n)$ (или $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$) димензије n (или 3), јер је изоморфан скупу свих $\vec{B}$, али $\dim \Omega^1(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim \Omega^2(\mathbb{R}^3) = \binom{3}{2} = 3$. ▨

Претходно тврђење оправдава следећу дефиницију у $\mathbb{R}^3$:

$d\omega^0_f = \omega^1_{\operatorname{grad} f}$ дефиниција градијента

$d\omega^1_{\vec{B}} = \omega^2_{\operatorname{rot}\vec{B}}$ дефиниција ротора $\circledast$

$d\omega^2_{\vec{B}} = \omega^3_{\operatorname{div}\vec{B}}$ дефиниција дивергенције

Задатак: (а) Доказати (користећи претходно тврђење) да су ове дефиниције добре.

(б) Доказати да су ове дефиниције еквивалентне раније датим дефиницијама у координатама.

(в) Доказати: $\omega^1_{\vec{A}} \wedge \omega^1_{\vec{B}} = \omega^1_{\vec{A}\times\vec{B}}$

(г) Доказати: $\omega^1_{\vec{A}} \wedge \omega^2_{\vec{B}} = \omega^3_{\vec{A}\cdot\vec{B}}$

(д) Размотрити Задатак $\circledast$ у светлу дефиниција $\circledast$ и помоћу њих доказати да $\operatorname{div}\circ\operatorname{rot}=0$ и $\operatorname{rot}\circ\operatorname{grad}=0$ следи из $d\circ d=0$.

Тврђење: $\dim M = n$, $\omega \in \Omega^n(M)$

$\varphi: M \to M$. Тада је

$$\boxed{\varphi^*\omega = (\det \varphi_*) \cdot \omega}$$



Доказ: Следи из чињенице да су обе стране једнакости антисиметрична n-линеарна пресликавања по колонама матрице $\varphi_* = \varphi'$ која се подударају на бази $e_1, \dots, e_n$. ▨

Подсећање: Теорема о смени променљиве у интегралу гласи:

$$\int_{\varphi(D)} f(x)\,dx = \int_D f \circ \varphi(t) \cdot |\det \varphi'(t)|\,dt$$

за дифеоморфизам $\varphi: D \to \varphi(D)$ и $f \in \mathcal{R}(\varphi(D))$.

Овде је $f(x)\,dx := f(x)\,dx_1 \dots dx_n$

Дефинишимо n-форму

$$\omega := f(x)\,dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

φ је дифеоморфизам $\Rightarrow \det \varphi_* \neq 0$

M повезана $\Rightarrow \det \varphi_*$ сачувају знак

Ако је $\det \varphi_* > 0$, онда формула смене променљиве може да се напише у облику

$$\int_{\varphi(D)} \omega = \int_D \varphi^* \omega.$$

Претпостављамо да многострукост M може да се покрије једном картом

$\varphi_0 : D_0 \to M$ дифеоморфизам

D_0 у $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$.

$\omega \in \Omega^n(M)$ форма са компактним носачем

$\varphi_0^* \omega \in \Omega^n(D_0)$, $D_0 \subseteq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \varphi_0^* \omega = f(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

$$\int_M \omega \overset{\text{def}}{=\!=} \int_{D_0} f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

$$= \int_{D_0} \varphi_0^* \omega$$

Да ли је дефиниција добра?

$\varphi_1 : D_1 \longrightarrow M$ друга параметризација

Да ли је $\int_M \omega = \int_{D_1} \varphi_1^* \omega$, тј.

$\int_{D_0} \varphi_0^* \omega = \int_{D_1} \varphi_1^* \omega$? Сменa промењљивe:

$\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0 : D_0 \longrightarrow D_1$ дифеоморфизам

$\varphi_1^* \omega =: \alpha \in \Omega^n(D_1) \Rightarrow \int_{D_1} \alpha \overset{?}{=} \int_{D_0} (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0)^* \alpha$

Последња једнакост важи ако је $\det (\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0)_* > 0$.

Подсетимо се линеарне алгебре:

V векторски простор, $\dim V = n$

$\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$ две базе

$Ae_j = f_j$ за све $j \in \{1, \dots, n\}$

A матрица пресликавања $A: V \to V$

$\det A \neq 0$

Дефиниција: Две базе су еквивалентне ако је $\det A > 0$ за матрицу пресликавања A.

Избор једне (од постојеће две) класе еквиваленције назива се оријентацијом векторског простора V.

$L: V \to V$ линеарни изоморфизам

L чува оријентацију ако је $\det L > 0$.

Направоученије: Дефиниција интеграла по многострукости која може да се покрије једном картом не зависи од избора карте у класи карата у којој прелаз из карте у карту чува оријентацију ($\Leftrightarrow$ линеарно преслиновање $(\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0)_*$ чува оријентацију).

$$\boxed{\int_M : \Omega^n(M) \times Or(M) \longrightarrow \mathbb{R}}$$

избор оријентације

Напомена: Дуалан начин да се дефинише оријентација на векторском простору V ($\dim V = n$) је следећи:

Нека је $L: V^n \to \mathbb{R}$ n-линеарно антисиметрично пресликавање $\neq 0$. Тада $e_1, \dots, e_n$ задаје оријентацију V ако је $L(e_1, \dots, e_n) > 0$.

Задатак (из линеарне алгебре):

(а) A $n \times n$ матрица. Доказати:

(*) $L(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A \cdot L(e_1, \dots, e_n)$

(б) Ако $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{f_1, \dots, f_n\}$ задају исту оријентацију (матрица преласка има позитивну детерминанту), доказати:

$$L(e_1, \dots, e_n) > 0 \Leftrightarrow L(f_1, \dots, f_n) > 0.$$

Упутство: Лева страна у (*) је антисиметрична n-форма по колонама A.

Пошто је скуп антисиметричних n-линеарних пресликавања векторски простор димензије $\binom{n}{n} = 1$, L је пропорционално det. Коефицијент пропорционалности се може наћи тако што се израчуна за $A = E$.

Напомена: Претходни задатак је уједно и доказ за $\circledast$.

Другим речима: дуална дефиниција оријентације (помоћу избора L) је добра и еквивалентна дефиницији помоћу избора класе еквиваленције база.

$\circledast\circledast\circledast$

Definicija: Mnogostrukost M je **orijentabilna** ako postoji atlas $(U_j, \varphi_j)_{j\in J}$ takav da je

$$(\forall k,l \in J)\ \det\left(\varphi_k \circ \varphi_l^{-1}\right)_* > 0$$

Izbor ovakvog atlasa naziva se **orijentacija**. Orijentabilna mnogostrukost na kojoj je zadata orijentacija naziva se **orijentisana**.

Neka je M orijentisana mnogostrukost, $\dim M = n$, $\omega \in \Omega^n(M)$ n-forma sa kompaktnim nosačem.

$(U_j, \varphi_j)_{j\in\tilde{J}}$ atlas koji zadaje orijentaciju; $\varphi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$

$$\int_{U_j} \omega \overset{\text{def}}{=} \int_{\varphi_j(U_j)} \left(\varphi_j^{-1}\right)^* \omega$$

integral po skupu u $\mathbb{R}^n$

$\{U_j\}_{j\in J}$ конечно подпокривање компактног скупа $\operatorname{supp}\omega$ отвореним скуповима из покривача $\{U_j\}_{j\in\widetilde{J}}$.

Нека је $\{\rho_j\}_{j\in J}$ разложење јединице подређено покривачу $\{U_j\}_{j\in J}$, тј:

(1) $\rho_j \in C^\infty(M)$

(2) $0 \le \rho_j \le 1$

(3) $\operatorname{supp}\rho_j \subseteq U_j$

(4) $\sum_j \rho_j \equiv 1$

Дефиниција: Интеграл n-форме ω по многострукости M је

$$\int_M \omega := \sum_{j\in J} \int_{U_j} \rho_j \cdot \omega$$

Тврђење: Претходна дефиниција не зависи од избора атласа који задаје исту оријентацију ни од избора разлагања јединице.

Напомена: Атласи $\{U_j, \varphi_j\}_{j\in J}$, $\{V_i, \psi_i\}_{i\in I}$ задају исту оријентацију ако

$$U_j \cap V_i \neq \emptyset \Rightarrow \det(\varphi_j \circ \psi_i^{-1})_* > 0.$$

Доказ тврђења: Посматрајмо два атласа и два разлагања јединице $\{U_j, \varphi_j\}$, ρ_j, $j\in J$ и (V_i, ψ_i), χ_i, $i\in I$

$$\sum_{j\in J} \int_{U_j} \rho_j \omega = \sum_{j\in J} \int_{U_j} \overbrace{\left(\sum_{i\in I} \chi_i\right)}^{=1} \rho_j \omega =$$

$$= \sum_{j\in J} \sum_{i\in I} \int_{U_j} \chi_i \rho_j \omega = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \int_{U_j \cap V_i} \chi_i \rho_j \omega$$

$$= \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \int_{V_i} \chi_i \rho_j \omega = \sum_{i\in I} \int_{V_i} \underbrace{\left(\sum \rho_i\right)}_{=1} \chi_i \omega \qquad \blacksquare$$

Задатак: Доказати да је многострукост M ($\dim M = n$) оријентабилна ако и само ако $(\exists\, \omega \in \Omega^n(M))\,(\forall p \in M)\ \omega_p \neq 0$.

Напомена: $(\forall p \in M)\ \omega_p \neq 0$ значи

$(\forall p \in M)\ (\forall e_1, \dots, e_n \in T_pM)\ \omega(e_1, \dots, e_n) \neq 0$.

Ако је M повезана, то је еквивалентно са

$(\forall p \in M)\ \omega_p > 0 \ \vee\ (\forall p \in M)\ \omega_p < 0$

(јер је $p \mapsto \omega_p(e_1, \dots, e_n)$ непрекидно).

Упутство:

($\Rightarrow$) користити форму $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ у $\mathbb{R}^n$, атлас $(U_j, \varphi_j)_{j \in J}$ који задаје оријентацију и разлагањем јединице глобализовати форме $\varphi_j^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$ са U_j на M:

$$\omega := \sum \rho_j\, \varphi_j^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

Из чињенице да $\{U_j, \varphi_j\}_{j\in J}$ задаје оријентацију (видети дефиницију) доказати да за свако $p \in M$ и $e_1, \dots, e_n \in T_pM$ $\varphi_j^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(e_1, \dots, e_n)$ има исти знак за све $j \in J$, па (због $\rho_j \geq 0$) то важи и за ω.

($\Leftarrow$) $(U_j, \varphi_j)_{j\in J}$ атлас $\Rightarrow$ $(\varphi_j^{-1})^*\omega = f_j\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

направити атлас $\{U_j, \psi_j\}_{j\in J}$, где је

$$\psi_j := \begin{cases} \varphi_j & \text{ако је } f_j > 0 \\ \varphi_j \circ \sigma & \text{ако је } f_j < 0, \end{cases}$$

мења оријентацију

за $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$

Доказати да $\{U_j, \psi_j\}_{j\in J}$ дефинише оријентацију.

Напомена: Овај задатак је глобална (нелинеарна) верзија дуалне дефиниције оријентације (***) у векторском простору

Напомена: Ако је многострукост покривена једном картом $\varphi: M \to V \subseteq \mathbb{R}^n$, тј: $u := \varphi^{-1}: V \to M$ онда је

$$\int_M \omega := \int_V u^* \omega, \text{ тј:}$$

$$\int_M \omega = \int_V \omega\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_n}\right) dt_1 \dots dt_n \quad (*)$$

Специјално:

(1) $n = 1$, тј. M је крива ($\#$ у $\mathbb{R}^n$):

$\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ интервал

Фиксна тачка + диференцијал $\Rightarrow$

$\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, $\exists$ векторско поље $\vec{F}$:

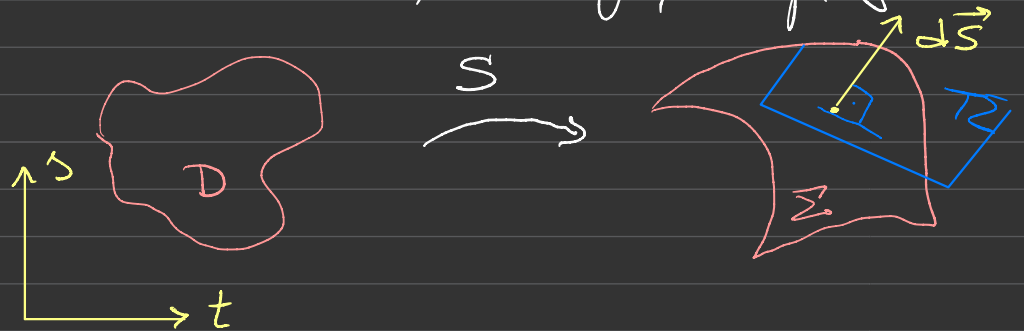
$\omega = \omega^1_{\vec{F}} := \langle \vec{F}, \cdot \rangle$

$$\int_\gamma \omega^1_{\vec{F}} \overset{(*)}{=} \int_I \omega^1_{\vec{F}}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) dt = \int_I \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

Кратка ознака: $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$ (криволинијски интеграл векторског поља $\vec{F}$ дуж криве γ.

(2) $n=2$: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ површ, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ област

$S: D \to \Sigma = S(D) \subseteq \mathbb{R}^3$ диференцијабилно



$\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3) \Rightarrow (\exists \vec{F})\ \omega = \omega^2_{\vec{F}} := \vec{F} \cdot (\bullet \times \bullet)$

тамо смо дошли — мешовити производ

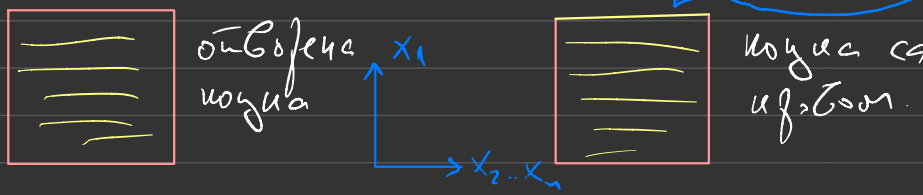
$$\int_\Sigma \omega^2_{\vec{F}} = \iint_D \omega^2_{\vec{F}} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{S}}{\partial s} \right) dt\,ds$$

$$= \iint_D \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{S}}{\partial s} \right) dt\,ds$$

Кратка ознака: $\int_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{S}$ (површински интеграл векторског поља $\vec{F}$ по површи Σ)

Дефиниција: Многострукост са димензијом је Хаусдорфов тополошки простор са пребројивом базом топологије такав да свака тачка $p \in M$ има околину $U \subseteq M$ која је хомеоморфна или отвореној кугли $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_j < 1,\ 1 \le j \le n\}$ или кугли са ивицом

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 \le 1,\ 0 < x_j < 1,\ 2 \le j \le n\}.$$



Дефиниција: Пресликавање $f : A \to \mathbb{R}^l$ дефинисано на скупу $A \subseteq \mathbb{R}^n$ је **глатко на A** ако постоји отворен скуп $V \supseteq A$ и глатко пресликавање $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}^l$ такво да је $\tilde{f}|_A = f$.

Напомена: Ова дефиниција је добра (тј. ако је A отворен сагласна са обичном дефиницијом диференцијабилности) због принципа локализације (задатак!)

Дефиниција: Многострукост са границом је глатка ако је за свака два хомеоморфизма φ и ψ из дефиниције многострукости са границом композиција $\varphi \circ \psi^{-1}$ дифеоморфизам коцке на коцку.

Напомена: Из Теореме о инверзној функцији следи да дифеоморфизам коцке на коцку слика унутрашње тачке у унутрашње тачке, па слика и кров на кров.

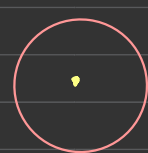
Последица напомене: Ако нека карта φ слика тачку $p \in M$ на кров коцке, онда и свака друга карта ψ слика p на кров. То оправдава следећу дефиницију.

Дефиниција: Граница многострукости M (означавамо је са ∂M) је скуп свих тачака које се сликају на кров.

Напомена: ∂M је глатка многострукост и важи $\dim \partial M = \dim M - 1$

Пример: Пробушени диск

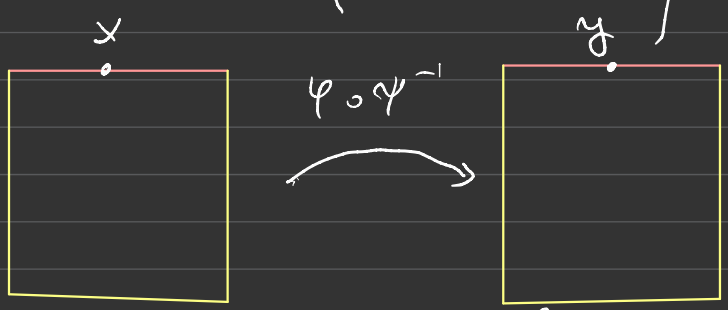
$M := \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1 \}$



Граница M као многострукости са границом је круг $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$, сам њен тополошки руб (тополошка граница) је $\{0\} \cup S^1$.

Напомена: Из чињенице да дифеоморфизам слика границу на границу следи да је матрица првог извода смене координата на крову коцке облика

$$(\varphi\circ\psi^{-1})_*(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ * & & * & \end{pmatrix}$$



јер је $y_1 \equiv 1$ на крову коцке.

Последица 1: Ако је M оријентабилна онда је и ∂M оријентабилна.

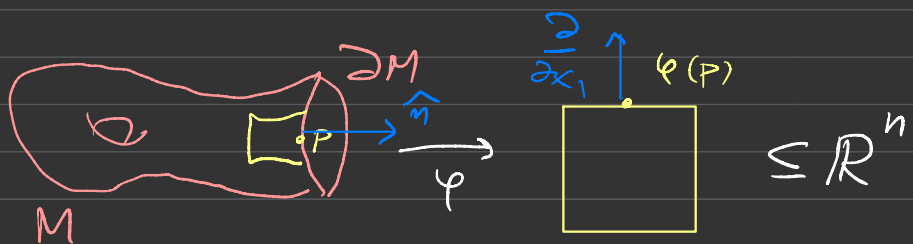
Последица 2: Ако можемо да интегралимо по M, онда можемо и по ∂M.

Дуални простор: Нека је оријентисана M дата диференцијалном формом $\omega \in \Omega^n(M)$ где је $n = \dim M$.

$\dim \partial M = n-1$

Претпоставимо $M \subseteq \mathbb{R}^n$ (одговара бар Витнијеве теореме о уграђењу)

Дефиниција: Тангентни простор у тачки $p \in \partial M$ је $(\varphi^{-1})_*(\varphi(p))\, T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$:



Напомена: $\dim T_p M = \dim M = n$, јер и само је $p \in \partial M$. Сама база $\frac{\partial}{\partial x_1}$ је вектор спољашње нормале $\hat{n}$.

$\hat{n} \lrcorner \omega \in \Omega^{n-1}(\partial M)$

Подсетање: унутрашњи извод (или унутрашње множење, или контракција):

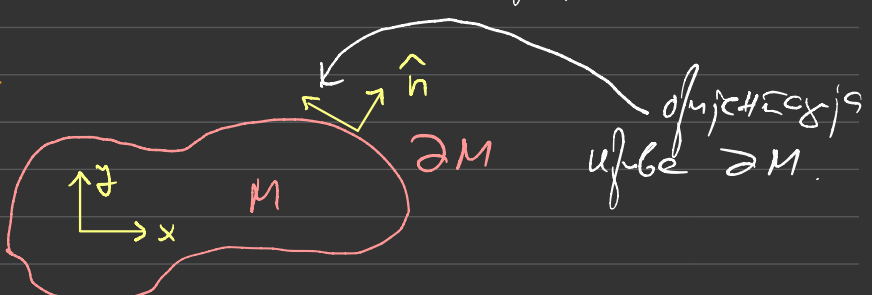
$$\hat{n} \lrcorner \omega (Y_1, \dots, Y_{n-1}) := \omega(\hat{n}, Y_1, \dots, Y_n)$$

Друге ознаке за $\hat{n} \lrcorner \omega$: $i_x \omega$, $i(x) \cdot \omega$

$\omega \neq 0 \Rightarrow \hat{n} \lrcorner \omega \neq 0$, што је други начин да се види импликација

M оријентабилна $\Longrightarrow$ ∂M оријентабилна

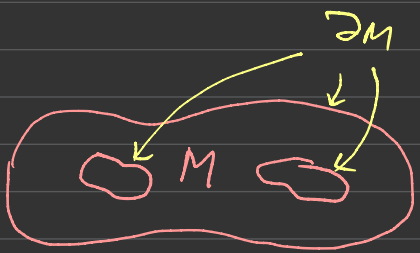
Пример:



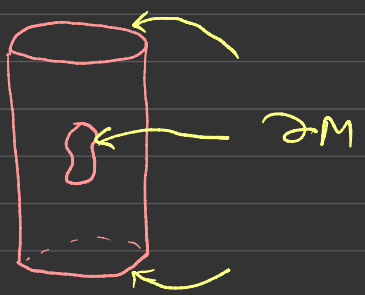
$\omega = dx \wedge dy$, $\omega(\hat{i}, \hat{j}) > 0$

Задатак: Оријентисати ∂M:

(а)



(б)



Стоксова теорема: Нека је M оријентисана и нека је оријентација на ∂M изведена из оријентације на M на претходно описани начин. Тада за сваку форму $\omega \in \Omega^{\dim M - 1}(M)$ важи

$$\boxed{\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.}$$

Доказ: Из дефиниције интеграла

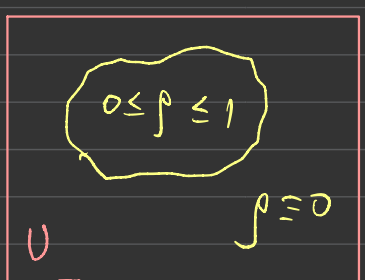
$$\int_M \omega := \sum_{j\in J} \int_{U_j} \rho_j \cdot \omega$$

и линеарности d следи да је довољно доказати теорему за сваки сабирак.

ρ_j имају компактан носач у U_j

2 случаја:

(1) U отворена коцка



$\rho\omega \in \Omega^{n-1}(U)$

$$\rho\omega = \sum_i a_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$$

$\hat{\ }$ („узималица") означава да је симбол испод ње испуштен.

$d(\rho\omega)$ има сабирке облика $\pm \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$

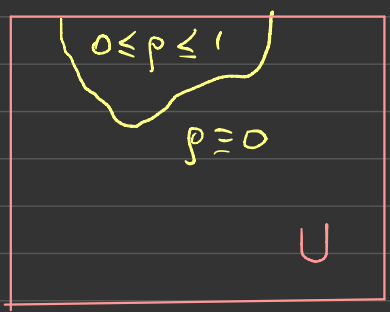
Из Фубинијеве теореме следи:

$$\int_U d(\rho\omega) = \sum_{i=1}^{n} \pm \int_0^1 \dots \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^1 \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dx_i}_{a_i(1) - a_i(0)} \Big) dx_1 \dots dx_n$$

(Бути–Лајбницова формула)

$= 0$ јер је $a = 0$ на ∂U

(2) U коцка са кровом



$$\int_U d(\rho\omega) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \dots \int_0^1 a_i(1)\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots dx_n$$

$$= \int_{\partial U} \rho\omega$$

$\blacksquare$

Последица 1: $\boxed{\partial M = \emptyset \Rightarrow \int_M d\omega = 0.}$

Доказ је изведен у делу (1) доказа Стоксове теореме. $\blacksquare$

Последица 2: Ако је M компактна оријентисана многострукост без ивице и $\dim M = n$, пресликавање

$$\int_M : \Omega^n(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

индукује пресликавање

$$\int_M : H^n_{dR}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Доказ: Нека $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^n(M)$ дефинишу исту ДеРамову кохомолошку класу. Тада је $\omega_2 - \omega_1 = d\alpha$, за неку форму $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$, па из Последице 1 следи:

$$\int_M \omega_2 - \int_M \omega_1 = \int_M (\omega_2 - \omega_1)$$
$$= \int_M d\alpha = 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема (де Рамова): Ако је M повезана компактна оријентисана многострукост без рупе одг је пресликавање

$$\int_M : H^{\ell}_{dR}(M) \times H^{n-\ell}_{dR}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (**)$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

(где је $n = \dim M$) недегенерисана билинеарна форма.

Доказ изостављамо

Напомена 1: $\alpha \in \Omega^{\ell}(M)$, $\beta \in \Omega^{n-\ell}(M)$

$\Rightarrow \alpha \wedge \beta \in \Omega^{n}(M) \Rightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$ дефинисан.

Напомена 2: Пресликавање

$$\Omega^{\ell}(M) \times \Omega^{n-\ell}(M) \longrightarrow \Omega^{n}(M), \quad (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \wedge \beta$$

индукује билинеарно пресликавање

$$H^{\ell}_{dR}(M) \times H^{n-\ell}_{dR}(M) \longrightarrow H^{n}_{dR}(M) \quad (*)$$

Доказ: α_1, α_2 тенеришу исту класу у $H^{\ell}_{dR}(M) \Rightarrow d\alpha_1 = 0 = d\alpha_2 \wedge \alpha_2 - \alpha_1 = d\eta$

β тенерише класу у $H^{n-\ell}_{dR}(M) \Rightarrow d\beta = 0$

$i \in \{1,2\}$ $\quad d(\alpha_i \wedge \beta) = \underbrace{d\alpha_i}_{0} \wedge \beta \pm \alpha_i \wedge \underbrace{d\beta}_{0} = 0$

$\Rightarrow \alpha_i \wedge \beta \in \ker d$

$\Rightarrow \alpha_i \wedge \beta$ дефинише кохомолошку класу у $H^n_{dR}(M) \Rightarrow$ подомен у (*) је добар.

$$\alpha_2 \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta = (\alpha_2 - \alpha_1) \wedge \beta$$

$$= d\eta \wedge \beta = d\eta \wedge \beta \pm \eta \wedge \overbrace{d\beta}^{0} = d(\eta \wedge \beta)$$

$\Rightarrow \alpha_2 \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta \in \operatorname{Im} d$

$\Rightarrow \alpha_2 \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta$ дефинишу исту кохомолошку класу у $H^n_{dR}(M)$.

Слично за два представника β_1, β_2 исте класе ... $\Rightarrow$ (*) је добро дефинисано.

Последица: Ако је M компактна, повезана и оријентисана многострукост без ивице и $\dim M = n$, онда је

$$\int_M : H^n_{dR}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

изоморфизам. Специјално:

$$H^n_{dR}(M) \cong \mathbb{R}.$$

Доказ следи из Пуанкареове теореме за $\ell = 0$, јер је $H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$, па у (**) можемо да узмемо репрезентанта $1 \in H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}$ у облику $\alpha \Rightarrow \beta \longmapsto \int_M \beta$ је изоморфизам. ▨

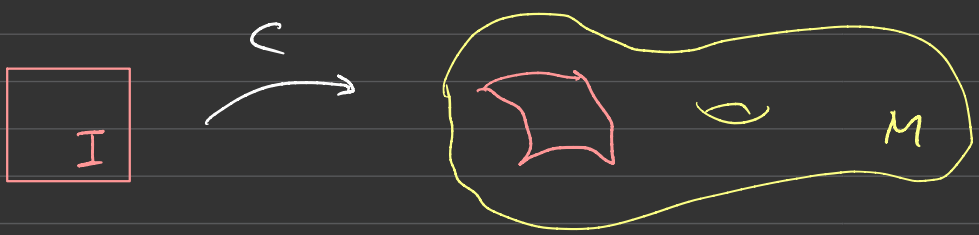
Напомена: Специјални случај претходне последице је тврдња да је $H^n_{dR}(S^n) = \mathbb{R}$, коју смо користили у доказу Брауерове теореме о фиксној тачки.

Дуалан објекат хомологији је **хомологија**.

Дефиниција: Глатко пресликавање

$$c : I^l \to M$$

које $I^l := [0,1]^l$ у многострукост M назива се **сингуларном** l**-ћелијом** у M.



Сингуларан l**-ланац** у M је формална линеарна комбинација $\sum \lambda_k c_k$, где су $\lambda_k \in \mathbb{R}$, c_k сингуларне l-ћелије.

Ако је $\phi : I \to I$ диференцијабилно пресликавање које мења оријентацију онда $c \circ \phi$ идентификујемо са $-c$, а задржава са c.

Векторски простор добијен овом идентификацијом означавамо са $C_\ell(M)$.

Дефинишемо оператор ивице

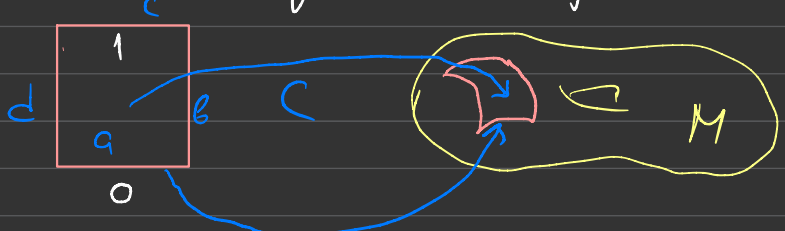
$$\partial : C_\ell(M) \longrightarrow C_{\ell-1}(M)$$

са

$$\partial c = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{i+j} c_{ij}$$



где је c сингуларна ℓ-коцка $c : I^\ell \to M$ (елемент $C_\ell(M)$) а c_{ij} рестрикција c на $(\ell-1)$ коцку $(x_1, \dots, x_{j-1}, i, x_{i+1}, \dots, x_\ell)$.



$$\partial c = a - c + b - d$$



дефинишу ∂ на бази $C_\ell(M)$, а на цело $C_\ell(M)$ је проширујемо линеарно.

Лема: $\partial \circ \partial = 0$

Последица: $\mathrm{Im}(\partial : C_l \to C_{l-1}) \subseteq \ker(\partial : C_{l+1} \to C_l)$

Дефиниција: Комплексен простор

$$H_l(M) := \ker(\partial|_{C_l(M)}) / \mathrm{Im}(\partial|_{C_{l+1}(M)})$$

се нарекува сингуларна хомологија на тополошкиот простор M.

Дефиниција: За сингуларна коќа $c : I^l \to M$ и форма $\omega \in \Omega^l(M)$ дефинираме

$$\int_c \omega := \int_{I^l} c^* \omega$$

и продолжуваме по линеарност до

$$\int : C_l(M) \times \Omega^l(M) \to \mathbb{R}, \quad (c, \omega) \mapsto \int_c \omega$$

$$c = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k c_k \Rightarrow \int_c \omega = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \int_{c_k} \omega$$

Из Стоксове теореме следи да ово пресликавање индукује пресликавање

$$\boxed{\int : H_\ell(M) \times H^\ell_{dR}(M) \longrightarrow \mathbb{R}} \quad (*)$$

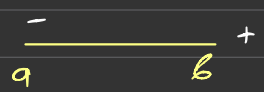
Доказ је као доказ Напомене 2 са прошлог часа (Задатак!). $\blacksquare$

Теорема (де Рамова): Пресликавање $(*)$ је недегенерисана билинеарна форма.

Примери Стоксове теореме: (1) $M = [a,b]$

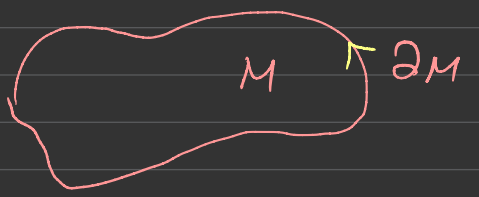
$\partial M = \{a,b\}$, $\dim M = 1$ $\quad f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$

$$\int_a^b df = f\big|_{\{a,b\}} = f(b) - f(a)$$



Њутн–Лајбницова формула

② M отворен скуп у $\mathbb{R}^2$, ∂M платна крива



$\dim M = 2$

$\omega \in \Omega^1(M)$

$\omega = P\,dx + Q\,dy$

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} \underbrace{dy \wedge dx}_{= -dx \wedge dy} + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \quad \left(\text{зато } dx \wedge dx = 0,\ dy \wedge dy = 0\right)$$

$$\Rightarrow d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$\boxed{\int_{\partial M} P\,dx + Q\,dy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy}$$

Гринова формула

Напомена: У Анализи 1 $f \in C([a,b])$

$$\Rightarrow \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x), \text{ тј:}$$

$\int_a^x f(t)\,dt$ је примитивна за f.

У димензији 2 се питамо, односно:

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ отворен скуп

$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j}$, $P, Q \in C^\infty(D)$

да ли постоји $f: D \to \mathbb{R}$ такво да је

$\vec{\nabla} f = \vec{F}$? $\qquad \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$

Одговор: не увек!

Разлог: Ако је $\vec{\nabla} f = \vec{F}$, онда је

$P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Неопходан услов да постоји f за које је $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ је

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (*)$$

Задатак: Доказати да векторско поље

$$F := -\frac{y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\jmath}$$ задовољава (*)

али да ипак не постоји f такво да је $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Овде је $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Наравоученије: Услов (*) је неопходан, али не и довољан за постојање примитивне.

Упутство: Сетити се идентификације $\vec{\nabla}$ са d: $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ је еквивалентно са

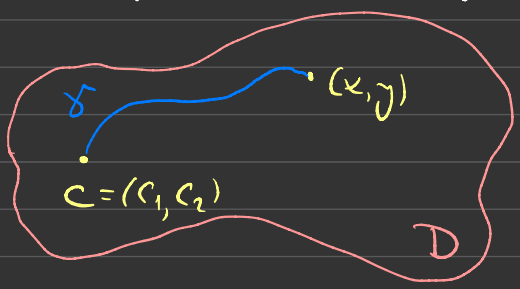
$$df = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = d\theta$$

доказати

$\left(\theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$. Раније смо видели да такво f не постоји (тј. $d\theta$ није тачна форма).

Напомена: Услов (*) значи да је десна страна у Гриковој формули једнака нули. То нам даје експлицитни израз за примитивну.

$f(x,y) = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, где је γ крива која полази из фиксиране тачке $c \in D$ и завршава се у (x,y)

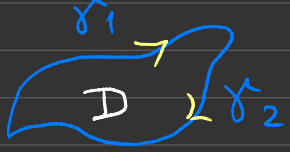


Ако параметризујемо криву γ и применимо Њутн–Лајбницову формулу добијамо $df = P\,dx + Q\,dy$, тј.:

$\overrightarrow{\nabla f} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ (Задатак!)

Дефиниција потенцијалних поља: Да ли је f добро дефинисано (тј. независно од избора криве γ)?

Одговор: Ако је D просто повезана:

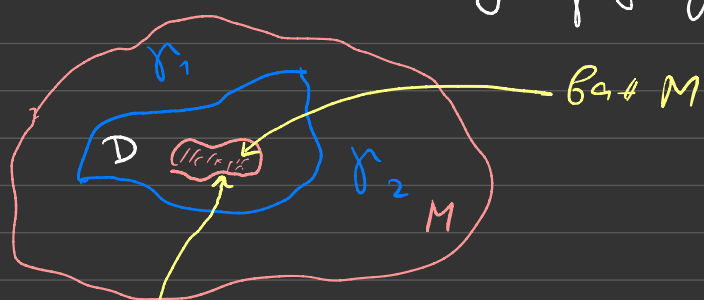


$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1-\gamma_2} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \quad \text{(Гринова т.)}$$

$$= 0 \quad (\text{због } (*)).$$

Закључак: Ако је M просто повезана услов (*) је и довољан. Ако није, онда не можемо овако да резолујемо због



∂D није само $\gamma_1 - \gamma_2$ него укључује и овај део, па претходни резон не пролази.

Напомена: Неопходан услов (*) је алгебарски (аналитички) и он је и довољан под додатком геометријском (тополошком) претпоставком о простој повезаности. Услов (*) је заправо услов $d\omega = 0$, где је $\omega = P\,dx + Q\,dy$, а услов просте повезаности области M обезбеђује $H^1_{dR}(M) = 0$. Ово смо у вето; општости дискуповали раније, а овде видимо један специјални случај уз помоћ Грикове формуле.

У претходном задатку: $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$M \simeq S^1$ (хомотопски еквивалентно)

$\Rightarrow H^1_{dR}(M) \cong H^1_{dR}(S^1) = \mathbb{R} \neq 0$

Дефиниција: Векторско поле $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^n$ дефинисано на отвореном скупу $D \subseteq \mathbb{R}^n$ назива се потенцијалним ако постоји скаларна функција $f: D \to \mathbb{R}$ таква да је $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. Таква функција f назива се потенцијалом векторског поља $\vec{F}$.

Векторско поле $\vec{F}: D \to \mathbb{R}^3$ дефинисано на отвореном скупу $D \subseteq \mathbb{R}^3$ назива се солеоидним ако постоји векторско поље $\vec{A}: D \to \mathbb{R}$ такво да је $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

$dod = 0 \Rightarrow$
- $\vec{F}$ потенцијално $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$
- $\Leftarrow$: зависи од $H^1_{dR}(D)$
- $\vec{F}$ солеоидно $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$
- $\Leftarrow$: зависи од $H^2_{dR}(D)$

③ M отворен скуп у $\mathbb{R}^3$, ∂M глатка површ

$\dim M = 3$, $\omega \in \Omega^2(M)$

$$\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

$$\boxed{\int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz = \int_{\partial M} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy}$$

Формула Гауса - Остроградског

$$\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\boxed{\int_M \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \int_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{S}}$$

Теорема о дивергенцији

④ $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ глатка површ

$\partial\Sigma$ глатка крива

$\omega \in \Omega^1(\partial\Sigma)$; $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$\int_{\partial\Sigma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Стоксова формула ↗

Дефиниција: Ако је M компактна многострукост и $\dim M = n$, свака форма $\omega \in \Omega^n(M)$ таква да је $\omega \neq 0$ у свакој тачки назива се формом запремине.

Тада је

$$\mathrm{Vol}_\omega(M) := \left| \int_M \omega \right|$$

запремина многострукости M у односу на форму ω.

Избор n-форме $\neq 0 \rightsquigarrow$ начин мерења запремине без додатне структуре не постоји „најбољи" избор форме запремине.

Али: ако је на M задата Риманова метрика (глатка фамилија скаларних производа на TM) онда постоји јединствена форма $\omega \in \Omega^n(M)$ таква да је $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$ за сваку оријентисану ортонормираку базу $e_1, \dots, e_n$ у сваком тангентном простору T_pM.

Другим речима: „најбоља" форма је она за коју је запремина јединичне кугле у тангентном простору $=1$. Ову форму зовемо формом запремине сагласном са Римановом метриком.

Задатак: Доказати да је ($\hat{}$ — „изостаје")

$$\omega := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j x_j \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

форма запремине на S^n сагласна са Римановом метриком на S^n насљеђеном од скаларног производа у $\mathbb{R}^{n+1}$.

Површина сфере $:= \int_{S^n} \omega$

Доказати да је збир запремине лопте $B^{n+1}(0;r)$ и r једнаке површине сфере $S^n(0;r)$.

4. Фуријеова анализа

Дефиниција: Тополошка група је уређена тројка $(G, \cdot, \tau)$ где је:

(1) $(G, \cdot)$ група

(2) (G, τ) тополошки простор

(3) пресликавања

$$G \times G \to G \qquad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

$$G \to G \qquad x \mapsto x^{-1}$$

су непрекидна.

У овом тексту ћемо увек претпостављати да је $(G, \cdot)$ Абелова (и користићемо адитивну $(G, +)$) и да је (G, τ) локално компактан тополошки простор.

Напомена: Тополошки простор је локално компактан ако свака тачка има компактну околину.

Пример: $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R}^n,+)$, $(\mathbb{Z}^n,+)$

$(S^1,\cdot)$, $((S^1)^n,+)$ $(S^1)^n =: T^n$ (торус)

Дефиниција: Лијева група је уређена $(G,\cdot,\mathcal{A})$, тј. је

(1) $(G,\cdot)$ група

(2) $\mathcal{A}$ глатка структура (атлас)

(3) операције су глатке.

Другим речима: Лијева група је глатка многострукост на којој су дефинисане и глатке операције групе.

$(G, +)$ Абелова Лијева група, $a \in G$

$\tau_a : G \to G$, $x \mapsto x + a$ (транслација)

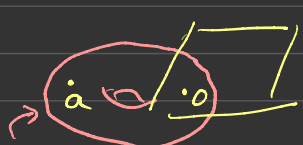
$0 \in G$ неутрал

$T_0 G$ Лијева алгебра Лијеве групе G

$\dim G = n$,

$\tilde{\mu}$ n-мерна антисиметрична форма на $T_0 G$

$\Rightarrow \mu_a := \tau_{-a}^* \tilde{\mu} \in \Omega^n(G)$



$\tau_{-a} a = 0$ $(\tau_{-a})_* : T_a G \to T_0 G$

μ је инваријантна у односу на транслације:

$(\forall b \in G)\ \tau_b^* \mu = \mu$

Харрова мера на G

Пример: $G = \mathbb{R}^p \times T^q$

$\mu = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \wedge d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_q$

је Хаарова мера:

$b \in G, \quad b = (b_1, \dots, b_{p+q})$

$\tau_b^* \mu = d(x_1 + b_1) \wedge \dots \wedge d(x_p + b_p) \wedge d(\theta_1 + b_{p+1}) \wedge \dots \wedge d(\theta_q + b_{p+q})$

$= dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \wedge \dots \wedge d\theta_1 \wedge \dots \wedge d\theta_q = \mu$

јер је $db_j = 0$ пошто је b константа.

Дефиниција: Хомоморфизам тополошке групе G у групу $(S^1, \cdot)$ назива се карактером групе G. Скуп свих непрекидних карактера групе G назива се дуалном групом групе G и означава са $\hat{G}$.

$\chi_1, \chi_2 : G \to S^1 \qquad \chi_1 \cdot \chi_2(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$

Дефиниција: Фуријеова трансформација

функције

$$f: G \longrightarrow \mathbb{C}$$

је функција

$$\hat{f}: \hat{G} \longrightarrow \mathbb{C}$$

дефинисана са

$$\hat{f}(\gamma) := \int_G f(x)\,\overline{\gamma(x)}\,dx$$

где је dx Хаарова мера на G.

Пример: ① $(\mathbb{R},+)$ $\gamma \in \hat{\mathbb{R}}$ карактер

$$\gamma(x+t) = \gamma(x)\cdot\gamma(t) \quad (*)$$

$\gamma(0) = 1$ (неутрал иде у неутрал)

$I = \int_0^\varepsilon \gamma(t)\,dt \neq 0$ за мало $\varepsilon > 0$

$$I\cdot\gamma(x) = \int_0^\varepsilon \gamma(t)\cdot\gamma(x)\,dt = \int_0^\varepsilon \gamma(t+x)\,dt$$

$$= \int_x^{x+\varepsilon} \gamma(s)\,ds \Rightarrow \gamma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

у ① изводимо $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \Rightarrow$

$\gamma'(x) = c \cdot \gamma(x)$ где је $c = \gamma'(0)$

$\Rightarrow (e^{-cx}\gamma(x))' = 0 \Rightarrow e^{-cx}\gamma(x) \equiv D$

$\Rightarrow \gamma(x) = De^{-cx}$, $\gamma(0) = 1 \Rightarrow D = 1$

$\Rightarrow \gamma(x) = e^{-cx} \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow c = it$

$$\boxed{\gamma(x) = e^{-itx}}$$

Закључак: $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ $(\gamma \mapsto t)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\hat{f}: \mathbb{R} = \widehat{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$

$$\boxed{\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx}\, dt}$$

② $G = (\mathbb{S}^1, \cdot)$ $\mathbb{S}^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Као у ①: $\gamma \in \widehat{\mathbb{S}^1} \Rightarrow \gamma(x) = e^{-itx}$

међутим $\gamma(0) = \gamma(2\pi) \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$

Закључак: $\widehat{\mathbb{S}^1} = \mathbb{Z}$

$f: S^1 \to \mathbb{C}$ $\quad \hat{f}: \mathbb{Z} = \hat{S}^1 \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

③ $G = (\mathbb{Z}, +)$ $\quad \gamma \in \hat{\mathbb{Z}}$, $\gamma: \mathbb{Z} \to S^1$

$\gamma(1) = e^{i\theta} \Rightarrow \gamma(n) = \gamma(1+\dots+1) = \gamma(1)^n$

$\gamma(n) = e^{in\theta}$

Закључак: $\hat{\mathbb{Z}} = S^1$ $\quad (\gamma \mapsto e^{i\theta})$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ $\quad \hat{f}: \hat{\mathbb{Z}} = S^1 \to \mathbb{C}$

$$\hat{f}(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{in\theta}$$

Задатак: Доказати да је дуал групе $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ сама група $\mathbb{Z}_n$ и описати Фуријеову трансформацију.

Напомена: Специјално, за $n=2$: $\hat{\mathbb{Z}}_2 = \mathbb{Z}_2$. Група $\mathbb{Z}_2$ (у мултипликативном

група) је $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$. Она дејствује на $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) по правилу

$$(1, x) \mapsto x, \quad (-1, x) \mapsto -x.$$

Свака функција $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (или $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) може да се представи као збир парне и непарне:

$$f = f_p + f_n$$

где је

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad f_n(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Нпр: $e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$. Самим, свако $\mathbb{R}$-линеарно пресликавање може да се напише као збир $\mathbb{C}$-линеарног и $\mathbb{C}$-антилинеарног.

$\mathbb{Z}_n \leq S^1$



Опште је: $\widehat{\mathbb{Z}_n} = \mathbb{Z}_n = \{e^{2\pi i \frac{k}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1\}$

Функција $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ је n-хармонијска реда k ако је

$$f(e^{2\pi i/n} z) = e^{2\pi i k/n} f(z)$$

(уопштење парности и непарности које се добијају за $n=2$ и $k \in \{0,1\}$).

Свака функција $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ може да се представи као збир

$$f = f_0 + \ldots + f_{n-1}$$

где су

$$f_k(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(e^{2\pi i j/n} x) e^{-2\pi i j k/n}$$

n-хармонијске функције реда k.

Ова коначна верзија Примера 3 уопштава представљање (**) функције као збира парне и непарне.

Понтрјагинова дуалност: $\hat{\hat{G}} \cong G$

Компактно-дискретна дуалност:

G компактна $\Rightarrow$ $\hat{G}$ дискретна

G дискретна $\Rightarrow$ $\hat{G}$ компактна

Ово нећемо да доказујемо, али приметимо да то важи у претходним примерима.

Напомена: Веза Примера 2 и 3:

Претпоставимо да је

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$$

Пример 3

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \text{ где је } z = e^{i\theta}$$

Питање: Ако знамо g, како да израчунамо коефицијенте c_n?

Приметимо да је

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} e^{-il\theta}\, d\theta = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k\neq l \end{cases} = \delta_{kl}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-il\theta} = \frac{1}{2\pi}\sum c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} e^{-il\theta}\, d\theta$$

$$= \sum c_n \delta_{nl}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-in\theta}\, d\theta$$ Пример 2

Општија ситуација претходне напомене:

$(X, +, \cdot, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ пред-Хилбертов простор:

$(X, +, \cdot)$ векторски простор над $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ ермитска форма („скаларни производ")

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

$$\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$$

$$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle = \langle x, \bar{\alpha} y\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ норма (*)

Пример: $X = \mathcal{R}^2[a,b]$ простор класа еквиваленције $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ таквих да је $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$.

$$\boxed{\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx}$$

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Дефиниција: (1) Скуп $E \subseteq X$ вектора у X је линеарно независан ако за сваку коначну фамилију $f_1, \dots, f_\ell \in E$ важи

$$\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_\ell f_\ell = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$$

(2) Скуп $E \subseteq X$ је потпун (или комплетан) ако је скуп $\mathrm{Lin}(E)$

свих коначних линеарних комбинација вектора из E густ у X, тј.

$$\mathcal{L}in(E) := \{ \sum_{l=1}^{n} f_l \mid f_l \in E, n \in \mathbb{N} \}$$

$$\overline{\mathcal{L}in(E)} = X.$$

(3) Пребројив скуп $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ је база предхилбертовог простора X ако важи:

(3.1) $E = \{ f_j \mid j \in \mathbb{N} \}$ је линеарно независан

(3.2) $(\forall f \in X)$ може да се напише као

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f_n$$

ред који конвергира у $\|\cdot\|$ дефинисаној са (*)

за неке $c_n \in \mathbb{K}$

(4) Вектори $f, g \in X$ су **ортогонални** ако је $\langle f, g \rangle = 0$. Пишемо: $f \perp g$

(5) Скуп вектора $E \subseteq X$ је ортогонални ако $(\forall f, g \in E)\ f \perp g$

(6) Скуп $E \subseteq X$ је **ортонормиран** ако је ортогонални и $(\forall f \in E)\ \|f\| = 1$.

Пример: $\{e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ је ортогонални систем у $R^2[-\pi, \pi]$, а скуп $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\theta}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ је ортонормиран.

Напомена (из линеарне алгебре):
Ако је $\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$ скуп линеарно независних вектора тада постоји ортонормирани скуп $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ такав да је $\mathrm{Lin}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\} = \mathrm{Lin}\{\psi_1, \psi_2, \ldots\}$.

Он се конструише Грам-Шмитовим поступком.

$$\varphi_1 = \frac{\psi_1}{\|\psi_1\|}, \quad \varphi_2 = \frac{\psi_2 - \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle \varphi_1}{\|\psi_2 - \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle, \varphi_1\|}, \ldots$$

$$\varphi_n = \frac{\psi_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \psi_n, \varphi_j \rangle \varphi_j}{\|\psi_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \psi_n, \varphi_j \rangle \varphi_j\|}$$

Пример: Скуп $\{1, x, x^2, \ldots\}$ није ортогонален у $\mathbb{R}^2[-1,1]$, али јесте потпун и линеарно независан. Применом Грам-Шмитовог поступка добијамо скуп полинома $\{P_0(x), P_1(x), \ldots\}$ који се називају Лежандровим полиномима.

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \ldots$$

$$P_i \perp P_j \quad \text{за} \quad i \neq j$$

Дефиниција: Нека је $\{e_1, e_2, \dots\}$ ортонормиран систем у унитарном простору X и нека је $f \in X$. Бројеви $\langle f, e_j \rangle$ називају се **Фуријеовим коефицијентима** вектора f. Ред $\sum \langle f, e_n \rangle e_n$ назива се **Фуријеовим редом** вектора f.

Ознака

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

или

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad \{c_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$$

значи: $\sum \langle f, e_n \rangle e_n$ (или $\sum c_n e_n$) је Фуријеов ред вектора f.

Напомена: $f_n = \sum c_n e_n \Rightarrow c_n = \langle f, e_n \rangle$

$\Leftarrow$? ← једна од следећих тема

Напомена: Ако је систем $\{e_1, e_2, \dots\}$ само ортогонален (а не и ортонормиран) онда је

$$f \sim \sum \frac{\langle f, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n$$

Лема: Нека је $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ортонормиран систем и f произвољан вектор. Тада је вектор

$$h = f - \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j$$

ортогонален на простор $\mathcal{L}in(\{e_1, \dots, e_n\})$.

Доказ: $h \perp \mathcal{L}in(\{e_1, \dots, e_n\}) \Leftrightarrow (\forall l)\ h \perp e_l$

(линеарност $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

$$\langle h, e_l \rangle = \langle f, e_l \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle \underbrace{\langle e_j, e_l \rangle}_{\text{"}\delta_{jl}\text{"}}$$

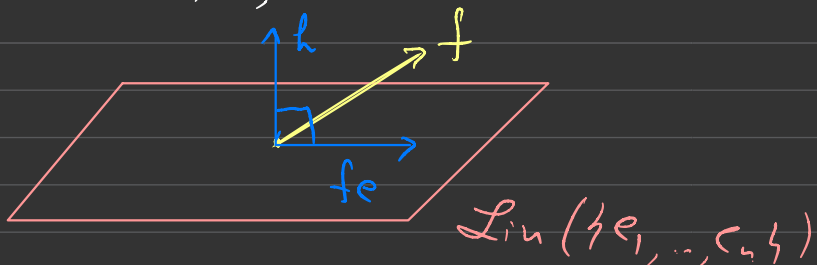
$$= \langle f, e_l \rangle - \langle f, e_l \rangle = 0$$

∎

Последица: Сваки вектор f може да се напише као

$$f = f_e + h$$

где је $f_e \in \mathcal{L}in(e_1, \dots, e_n)$ и $h \perp \mathcal{L}in(e_1, \dots, e_n)$



Лема (Питагорина теорема):

Нека је $g \perp h$ и $f = g + h$. Тада је

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$$

Доказ: $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle g+h, g+h \rangle =$

$= \langle g, g \rangle + \langle g, h \rangle + \langle h, g \rangle + \langle h, h \rangle =$

$= \|g\|^2 + \|h\|^2$

$\langle g, h \rangle = 0$, $\langle h, g \rangle = 0$

∎

Последица 1: Ако је $f_1, \dots, f_n$ ортогонални систем и $f = f_1 + \dots + f_n$, онда је

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2.$$

Последица 2: Ако је $e_1, \dots, e_n$ ортонормирани систем и $f = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$, онда је

$$\|f\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2.$$

(*) **Тврђење:** Нека је $e_1, \dots, e_n$ ортонормирани систем и f произвољан вектор. Тада је $f_e := \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j$ најближи вектор у $\mathcal{L}in(\{e_1, \dots, e_n\})$ вектору f. Другим речима за $g = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$ важи $\|f - f_e\| \leq \|f - g\|$. $\in \mathcal{L}in\{e_1, \dots, e_n\}$

Доказ: $\|f - g\|^2 = \|f - f_e + f_e - g\|^2$

$f - f_e \in \mathcal{L}in(\{e_1, \dots, e_n\})^{\perp}$

$= \|f - f_e\|^2 + \|f_e - g\|^2 \geq \|f - f_e\|^2$ ▨

Твърдение (Бесселова неравенство):
Ако $e_1, \dots, e_n$ е ортонормирана система, тогава за всеки вектор f в X

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

Доказ: $f = f_e + h$, $f_e \perp h$

$$f_e = \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j.$$

Питагорова теорема $\Rightarrow \|f\|^2 = \|f_e\|^2 + \|h\|^2$

$$\Rightarrow \|f\|^2 \geq \|f_e\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2$$

Последица 2 ↑ ∎

Лема: (1) $X \times X \to \mathbb{C}$, $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ е непрекъснато

(2) $f = \sum_{j=1}^{n} f_j \Rightarrow \langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle f, f_j \rangle$

(3) $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ ортонормирана система и

$f = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$, $g = \sum_{j=1}^{\infty} b_j e_j$, onda je

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \overline{b_j} \quad (**)$$

Dokaz: (1) sledi iz Koši–Švarcove nejednakosti, a (2) i (3) slede iz (1) i linearnosti $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ▨

Teorema: Ako je $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ortonormiran sistem, sledeći iskazi su ekvivalentni:

(a) sistem $\{e_1, e_2, \ldots\}$ je potpun

(β) za svaki vektor f važi

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

(b) za svaki vektor f važi

Parsevalova jednakost:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

Доказ: (а) $\Rightarrow$ (б) следи из Теореме (*), јер ако је систем $\{e_j\}$ потпун, свако f може произвољно добро да се апроксимира линеарним комбинацијама вектора e_j, а парцијалне суме реда у (б) су управо вектор f_n из Теореме (*).

(б) $\Rightarrow$ (в) је Теорема (**)

(в) $\Rightarrow$ (а) следи из Питагорина теорема

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2 \xrightarrow{(в)} 0$$ ▨

Последица: Ортонормиран систем вектора је потпун ако и само ако је база.

Доказ: ($\Leftarrow$): важи увек

($\Rightarrow$) је (а) $\Rightarrow$ (б) у претходној теореми. ▨

Теорема: Нека је X Хилбертов простор, $\{e_1, e_2, \ldots\}$ ортонормиран систем и $f \in X$ произвољан вектор. Тада важи:

(1) Фуријеов ред $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ конвергира ка неком вектору $f_e \in X$.

(2) $f = f_e + h$, где је $h \perp \mathrm{Lin}(\{e_1, e_2, \ldots\})$.

Доказ: (1) Из Бесселове неједнакости следи да ред $\sum |\langle f, e_n \rangle|^2$ конвергира. Пошто је (на основу Питагорине теореме)

$$\left\| \sum_{j=m}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j \right\|^2 = \sum_{j=m}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2,$$

ред $\sum \langle f, e_n \rangle e_n$ задовољава Кошијев услов, па због комплетности X конвергира.

(2) $(\forall j)\ \langle h, e_j \rangle = \langle f, e_j \rangle - \langle f_e, e_j \rangle$

$= \langle f, e_j \rangle - \langle f, e_j \rangle = 0.$ ▨

Теорема: Нека је X пред-Хилбертов простор и $\{f_1, f_2, \dots\}$ систем линеарно независних вектора.

(1) Да би овај систем био потпун неопходно је да у X не постоји вектор који је различит од 0 и ортогоналан на све f_j.

(2) Ако је простор X Хилбертов, услов из (1) је и довољан за потпуност система $\{f_1, f_2, \dots\}$.

Доказ: (1) Претпоставимо супротно: $h \neq 0$, $(\forall j)\ h \perp f_j$. Тада је, на основу Питагорине теореме

$$\left\| h - \sum_{j=1}^{n} c_j f_j \right\|^2 = \|h\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j f_j \right\|^2 \geq \|h\|^2 > 0,$$

$h \notin \overline{Lin(\{f_1, f_2, \dots\})}$, тј. систем $\{f_1, f_2, \dots\}$ није потпун.

(2) Нека је $\{e_1, e_2, \dots\}$ ортонормиран систем добијен из $\{f_1, f_2, \dots\}$ Грам–Шмитовим поступком. Тада сваки вектор $f \in X$ може да се напише (на основу (2) у претходној теореми) као $f = f_e + h$, где је $f_e = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ и $h \perp Lin(\{e_1, e_2, \dots\})$. Пошто је $Lin(\{e_1, e_2, \dots\}) = Lin(\{f_1, f_2, \dots\})$ одавде следи да је $h = 0$, па је $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$. Ово важи за свако $f \in X$, што доказује да је $\overline{Lin(\{f_1, f_2, \dots\})} = \overline{Lin(\{e_1, e_2, \dots\})} = X$. ▨

Задатак: Нека је $f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ непрекидна функција, таква да је

$(\forall n\in\{0,1,2,\dots\})\ \int_{-1}^{1} x^n f(x)\,dx=0.$

Доказати да је $f\equiv 0$.

Упутство: Користећи Вајерштрасову теорему о апроксимацији непрекидних функција полиномима, доказати да је систем $\{1,x,x^2,\dots\}$ тотални у нед-Хилбертовом простору $X=C_{\mathbb{C}}[-1,1]$ са скаларним производом

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx \qquad (*)$$

и применити претходну теорему.

Задатак: Показати да је систем $1, x, x^2, \ldots$ линеарно независан и потпун у Леж-Хилбертовом простору $C_{\mathbb{C}}[-1,1]$ са скаларним производом (*) из претходног задатка, али да он није база у том простору. Упоредити ово са једним од претходних тврђења да је сваки потпун ортонормиран систем база.

Упутство: Ако би систем $1, x, x^2, \ldots$ био база, свако $f \in C_{\mathbb{R}}[-1,1]$ би могло да се напише као ред $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ који конвергира у норми $\|\cdot\|$ индукованој скаларним производом (*).

Пошто општи члан конвергентног реда тежи нули, одатле следи $\|c_n x^n\| \to 0$.

Из (*) закључити да је

$$\|c_n x^n\| = |c_n| \cdot \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

и да, због $\|c_n x^n\| \to 0$, за довољно велико и важи

$$|c_n| < \sqrt{2n+1}.$$

Користећи ову неједнакост доказати да степени ред $\sum c_n x^n$ конвергира на интервалу $]-1,1[$ и да $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ важи и у смислу конвергенције за свако $x \in]-1,1[$. Одатле би следило $f \in C^\infty]-1,1[$, међутим то није тачно за произвољно $f \in C[-1,1]$.

Напомена: У претходном задатку само претпоставимо да је

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (А)$$

у смислу конвергенције у (Х) и закључимо да ред $\sum c_n x^n$ конвергира за све $x \in]-1,1[$. То само значи да је

$$g :]-1,1[\to \mathbb{C}, \quad g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (Б)$$

добро дефинисана функција. Пошто су (А) и (Б) конвергенције у различитим нормама, није очигледно да је $f = g$ на $[-1,1]$. Међутим,

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} |f-g|^2 \le \| f - \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \|^2 \to 0,$$

норма (Х)

па је $f \equiv g$ на $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ за свако $\varepsilon > 0$.

Тригонометријски Фуријеови редови

$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ је ортонормиран систем у пред-Хилбертовом простору $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ са скаларним производом

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx.$$

Фуријеов ред функције $f \in \mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ је

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (*)$$

где су c_n Фуријеови коефицијенти

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

Користећи Ојлеров идентитет

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

добијамо други запис за $(*)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (**)$$

Tjge je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Izraz $(**)$ je Fourierov red funkcije $f \in \mathcal{R}^2]-\pi, \pi[$ u Fourierovom redu u odnosu na ortonormirani sistem $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \mid n \in \mathbb{N}_+\right\}$.

Zadatak: Da li je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$ Fourierov red neke funkcije $f \in \mathcal{R}^2]-\pi, \pi[$

Rešenje: NE!

Uputstvo: $\sum \frac{1}{n}$ divergira, a za Fourierov red važi Beselova nejednakost.

Питање конвергенције тригонометријског Фуријеовог реда може се посматрати на два начина (реди се о две различите конвергенције):

(1) конвергенција у просторима $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$, тј. у норми

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

(2) конвергенција реда $\sum c_n e^{inx}$ за конкретно (или можда свако) $x \in [-\pi,\pi]$.

(1) Конвергенција у $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ следи из општих теорема о Фуријеовим редовима у пред-Хилбертовом простору (видети Последицу ! са прошлог часа).

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ (или, еквивалентно,

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\}$ је

ортонормиран систем. Да бисмо

доказали да је он база (тј. да

сваку функцију $f \in \mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$ можемо

да развијемо у Фуријеов ред) довољно

је (на основу Последице !) да

докажемо да је он тоталан, тј. да је

његов линеални омотач густ у $\mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$.

Подсетимо: На основу Вајерштрасове

теореме овај линеални омотач је густ

у простору 2π-периодичних непрекидних

функција $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ са нормом

$$\|f\|_\infty := \sup_{-\pi \le x \le \pi} |f(x)|.$$

Остаје да докажемо да ту апроксимацију у норми $\|\cdot\|_\infty$ следи апроксимација у норми $\|\cdot\|_2$ и да свака функција из $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ може произвољно добро да се апроксимира 2π-периодичном непрекидном функцијом.

Теорема: Свака функција $f \in \mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ може произвољно добро да се апроксимира у норми $\|\cdot\|_2$:

(а) функцијом која је ограничена на $]-\pi,\pi[$ и интеграбилна на $[-\pi,\pi]$.

(б) део-по-део константном функцијом

(в) непрекидном функцијом

(г) тригонометријским полиномом.

Доказ: (а) $f \in \mathcal{R}^2[-\pi,\pi] \overset{(*)}{\iff} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < +\infty$.

f интеграбилна по Риману $\Rightarrow$ f ограничена

$\Rightarrow$ тврђење (а) је нетривијално само ако се ради о функцији f за коју је интеграл на десној страни еквиваленције $(*)$ несвојствен. Претпоставимо да је он несвојствен у граничним тачкама (случај унутрашњих тачака разматра се аналогно).

По дефиницији несвојственог интеграла:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \lim_{\delta \to 0_+} \int_{-\pi+\delta}^{\pi-\delta} |f(x)|^2 dx.$$

Одатле следи $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ тако да функција

$$f_\delta(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-\pi+\delta, \pi-\delta] \\ 0, & x \notin [-\pi+\delta, \pi-\delta] \end{cases}$$

задовољава $\|f - f_\delta\|_2 < \varepsilon$.

(3) Из (а) следи да је довољно доказати тврђење (3) за ограничену функцију облика f_δ. Интеграл ограничене интеграбилне функције може произвољно добро да се апроксимира доњом Дарбуовом сумом $\sum m_j \Delta x_j$, придруженом некој подели $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_{\ell-1} < x_\ell = \pi$.

Нека је $g(x) = m_j$ за $x_{j-1} < x < x_j$.

Тада је

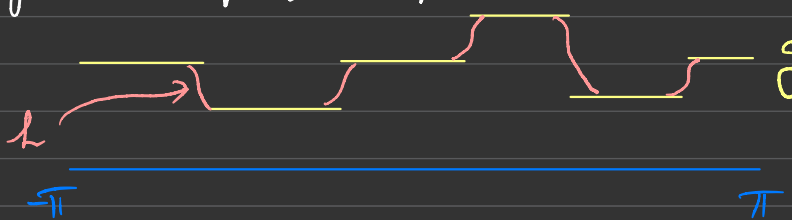
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_\delta(x) - g(x)|^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f_\delta + g| \cdot |f_\delta - g| dx$$

$$\le 2 \underbrace{\max |f_\delta|}_{M} \int_{-\pi}^{\pi} |f_\delta(x) - g(x)| dx$$

$$= 2M \left(\int_{-\pi}^{\pi} f_\delta(x) dx - \sum m_j \Delta x_j \right)$$

$$< 2M\varepsilon.$$

(в) Довољно је доказати да функције g из (б) могу довољно добро да се апроксимирају непрекидним функцијама:

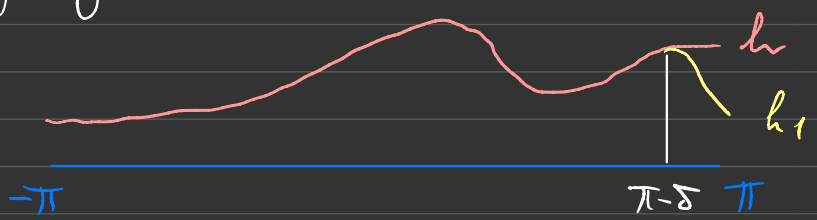


h је непрекидна и разликује се од g само на интервалима око тачака у којима је g прекидна. Тих интервала има коначно много и за дато $\varepsilon > 0$ могу да се изаберу тако да буду довољно мали да важи

$$\|g-h\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-h(x)|^2 dx < \varepsilon$$

(г) Довољно је да докажемо да

свака функција h из (B) може да се апроксимира тригонометријским полиномом да бисмо применили II Вајерштрасову теорему потребна нам је (сем непрекидности) и периодичност.



Бирамо h_1 тако да буде непрекидна и $h_1(x) = h(x)$ за $x \in [-\pi, \pi-\delta]$ и $h_1(-\pi) = h_1(\pi)$. На основу II Вајерштрасове теореме постоји тригонометријски полином $T(x)$ такав да је

$$\|T - h_1\|_\infty < \varepsilon/4\pi,$$

а $\delta > 0$ можемо да изаберемо тако да буде $\|h - h_1\|_2 < \varepsilon/2$. Тада је

$$\|T - h\|_2 \leq \|T - h_1\|_2 + \|h_1 - h\|_2$$

$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |T - h_1|^2 \, dx} + \|h_1 - h\|_2$$

$$< 2\pi \|T - h_1\|_\infty + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \square$$

Последица: Нека је $PC([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$ пред-Хилбертов простор део-по-део непрекидних функција (тј. простор функција $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ за које постоји подела интервала $[-\pi, \pi]$ тачка да је f непрекидна у унутрашњости сваког интервала поделе) са скаларним

производом

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \quad (*)$$

Тада важи:

(а) Тригонометријски Фуријеов ред произвољне функције $f \in PC([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ конвергира ка f у норми изведеној из скаларног производа $(*)$.

(б) Ако тригонометријски ред $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ конвергира ка функцији f у норми изведеној из скаларног производа $(*)$, онда је он њен Фуријеов ред.

(в) Ако функције $f, g \in PC([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ имају исти Фуријеов ред, онда је $f \equiv g$.

Доказ следи из општих тврђења у пред-Хилбертовим просторима:

(а) је последица чињенице да је сваки потпун ортонормиран систем база и чињенице да су парцијалне суме Фуријеовог реда сваког вектора линеарне комбинације ортонормираног система које најбоље апроксимирају тај вектор.

(б) и (в) следе из опште чињенице о јединствености разлагања произвољног вектора f пред-Хилбертовог простора по ортонормираној бази — доказаћемо сада ово опште тврђење:

Нека је $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ ортонормиран систем и $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Тада из Парсевалове једнакости следи

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

Следи још: $f = 0 \Rightarrow (\forall n)\ a_n = 0$.

Ако је $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$, онда је

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) e_n,$$

одакле следи $(\forall n)\ a_n - b_n = 0$ тј.

$(\forall n)\ a_n = b_n$. ▨

Задатак: Формулисати и доказати претходно тврђење за простор $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ уместо $PC([-\pi,\pi], \mathbb{C})$.

Упутство: Вектори простора $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ су класе еквиваленције функција.

(2) Конвергенција у коначној тачки x:

Лема (Риман – Лебегова): Нека је функција $f:]\alpha,\beta[\to \mathbb{C}$ локално интеграбилна и да је апсолутно интеграбилна у обичном Римановом или у несвојственом смислу. Тада је

$$\lim_{\mathbb{R}\ni\lambda\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x) e^{i\lambda x} dx = 0.$$

Доказ: Довољно је доказати тврдње за реалну функцију f (зашто? – Задатак!). Нека је $\varepsilon > 0$. Из апсолутне интеграбилности f следи да постоји интервал $[a,b] \subseteq]\alpha,\beta[$ такав да је

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \varepsilon \quad (*)$$

Зато, за свако интервал $[a,b] \subseteq]\alpha,\beta[$ је

$$\left| \int_\alpha^\beta f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| =$$

$$\left| \int_\alpha^a f(x) e^{i\lambda x} dx + \int_b^\beta f(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq$$

$$\leq \int_\alpha^a |f(x)| dx + \int_b^\beta |f(x)| dx$$

(јер је $|e^{i\lambda x}| = 1$), па егзистенција интервала $[a,b] \subseteq]\alpha,\beta[$ за који важи $(*)$ следи из дефиниције апсолутне интеграбилности (у својственом или у несвојственом смислу).

Одатле следи да је довољно да докажемо тврдњу за функцију $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, тј. да можемо да

искључимо тачке α и β из доказа. Тако можемо да поступимо са свим ситуационим тачкама (тј. тачкама у околини којих је интеграл несвојствен) и да претпоставимо да је функција $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ интеграбилна и апсолутно интеграбилна у обичном Римановом смислу. Тада постоји доња Дарбуова сума $\sum m_j \Delta x_j$ која одговара некој подели $a=x_0<x_1<\dots<x_{k-1}<x_k=b$, таква да важи

$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{j=1}^{k} m_j \Delta x_j < \varepsilon.$$

Нека је $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ део-по-део константна функција таква да је

$g(x) = m_j$ за $x_{j-1} \le x < x_j$. Тогда је $g(x) \le f(x)$ и важи

$$0 \le \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx - \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x) - g(x)| \cdot |e^{i\lambda x}| dx =$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \sum m_j \Delta x_j < \varepsilon.$$

Одатле следи да је довољно да доказемо тврђење за g уместо f. Али за g се овај интеграл експлицитно израчунава:

$$\int_a^b g(x) e^{i\lambda x} = \sum_{j=1}^{\ell} \int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x} dx =$$

$$= \frac{1}{i\lambda} \sum_{j=1}^{\ell} m_j e^{i\lambda x} \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \xrightarrow{R \ni \lambda \to \infty} 0$$

јер је

$$\left| \frac{1}{i\lambda} \sum_{j=1}^{\ell} m_j e^{i\lambda x} \Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \right| \le \frac{2}{|\lambda|} \sum_{j=1}^{\ell} |m_j|.$$



Последица: Ако $f :]\alpha, \beta[\to \mathbb{C}$ задовољава услове претходне леме, онда је

$$\lim_{\mathbb{R} \ni \lambda \to \infty} \int_\alpha^\beta f(x) \cos \lambda x \, dx = 0$$

$$\lim_{\mathbb{R} \ni \lambda \to \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Задатак: Доказати, без позивања на Риман – Лебегову лему, специјалан случај претходног тврђења: За $f \in \mathcal{R}^2]-\pi, \pi[$ важи

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

Упутство: Применити Бесселову неједнакост.

Дефинишемо: Тригонометријски полином

$$D_n(x) = \sum_{l=-n}^{n} e^{ilx}$$

називамо Дирихлеовим језгром.

Тригонометријским полиномом

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^{n} D_l(x)$$

називамо Фејеровим језгром.

Лема: За свако $n \in \mathbb{N}$ важи:

(а) $D_n(x) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$

(б) $F_n(x) = \dfrac{1}{n+1} \cdot \dfrac{1-\cos(n+1)x}{1-\cos x} \geq 0$

(в) $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)\,dx = 1$

(г) $F_n(x) \leq \dfrac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)}$ за $0 < \delta < |x| < \pi$

(g) функције D_n и F_n су 2π-периодичне и парне.

(ђ) $(\forall \delta \in]0,\pi[)$ $\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi D_n(x)\,dx = 0$.

Доказ: (а) Из дефиниције Дирихлеовог језгра следи (после сређивања и сабирања)

$$(e^{ix}-1)\,D_n(x) = e^{i(n+1)x} - e^{-inx} \quad (D)$$

Када одавде изразимо D_n и применимо Ојлеров идентитет добијамо (а).

(б) Ако убацимо (*) у дефиницију F_n добијамо

$$(n+1)\,F_n(x)\,(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1) =$$

$$= (e^{-ix}-1)\sum_{k=0}^{n}(e^{i(k+1)x} - e^{-ikx})$$

$$= 2 - e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x}.$$

Одатле (уз помош Дирихлеовиот идентитет) добиваме (б)

(в) следи од дефинициите D_n и F_n и од

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\,dx = \begin{cases} 2\pi & n=0 \\ 0 & n\in\{1,2,3,\dots\}. \end{cases}$$

(г) следи од (б) и монотоноста на косинусот на $[0,\pi]$.

(д) следи од дефинициите F_n и D_n (или од (а) и (б)).

(ѓ) следи од (а) и (последиците) Риман-Лебегови леми примената на функцијата

$$f(x) = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$$

на интервалот $]\delta,\pi[$. ▨

Напомена: Свака функција

$$f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

може (уз измену вредности у једној од крајњих тачака домена, $\pm\pi$, ако је $f(-\pi) \neq f(\pi)$) да се продужи до 2π-периодичне функције

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Пошто вредност функције у једној тачки не утиче на Фуријеове коефицијенте (јер се они израчунавају интегралом) сматраћемо да је то увек урађено, тј. подразумеваћемо да је функција коју посматрамо у Фуријеов ред 2π-периодична.

Нека је $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ Фуријеов ред 2π-периодичне функције f и нека је

$$s_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

n-това парцијална сума. Из израза за Фуријеове коефицијенте следи

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\,dt}_{c_k} \cdot e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \underbrace{\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}}_{D_n(x-t)}\,dt$$

Другим речима

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\,dt.$$

смена $s = x - t$ и 2π-периодичност D_n и f.

Теорема: Нека функција $f :]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{C}$ задовољава услове Риман – Лебегове леме и нека је $0 < \delta < \pi$. Тада за свако $x \in]-\pi, \pi[$ важи

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} f(x-t) D_n(t)\, dt + \int_{\delta}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt \right) = 0.$$

Доказ: Нека је $g :]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{C}$

$$g(t) := \begin{cases} \dfrac{f(x-t)}{\sin \frac{t}{2}} & \text{за } \delta \leq |t| \leq \pi \\ 0 & \text{за } |t| < \pi. \end{cases}$$

Тада је

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) f(x-t) D_n(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right) t\, dt \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

на основу Риман – Лебегове леме. ▨

Последица (Принцип локализације):
Нека функције $f, g :]-\pi, \pi[\to \mathbb{C}$ задовољавају услове Риман – Лебегове леме и нека у некој околини V тачке $x_0 \in]-\pi, \pi[$ важи $f|_V \equiv g|_V$.
Тада Фуријеови редови

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad \text{и} \quad g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx}$$

функција f и g или оба конвергирају на истој ведности или оба дивергирају.
Доказ: Парцијална сума Фуријеовог реда функције f у тачки x_0 је

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_n(t)\, dt.$$

На основу претходне теореме $\lim_{n\to\infty} S_n(x_0)$ зависи само од рестрикције $f|_V \equiv g|_V$. ▨

Напомена: Мако су Фуријеови коефицијенти (па тиме и Фуријеов ред) дефинисани помоћу интеграла по целом домену $[-\pi, \pi]$ функције f, конвергенција Фуријеовог реда у тачки x_0 зависи, на основу претходне Последице (Принципа локализације) и Теореме пре ње, само од понашања функције f у некој (произвољно малој) околини тачке x_0, и испитивање те конвергенције се своди на изучавање интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x_0-t)\,D_n(t)\,dt$$

за произвољно мало $\delta > 0$.

Дефиниција: Функција $f: V \to \mathbb{C}$, дефинисана на некој пробушеној околини V тачке $x \in \mathbb{R}$, задовољава **Липшицев услов** ако важи:

(1) постоје оба једностранна лимеса

$$f(x_-) := \lim_{t \to 0_+} f(x-t) \quad \text{и} \quad f(x_+) := \lim_{t \to 0_+} f(x+t)$$

(2) За неко $\delta > 0$ оба интеграла

$$\int_0^\delta \frac{f(x-t) - f(x_-)}{t}\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x_+)}{t}\,dt$$

апсолутно конвергирају.

Пример: За $0 < \alpha \leq 1$ **функције класе** C^α се дефинишу као функције за које постоји $C > 0$ такво да за све x, y у њој важи $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$ (уопштење Липшицових функција).

Функције класе C^α задовољавају Липшицев услов, јер су непрекидне и

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \le \frac{C}{|t|^{1-\alpha}}$$

а $\int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$ конвергира за $0<\alpha\le 1$.

Задаци: ① Функција је део-по-део глатка (класе C^1) ако има део-по-део непрекидан извод. Доказати да део-по-део глатка функција задовољава Липшицев услов.

② Доказати да функција

$$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x)=\operatorname{sgn} x$$

задовољава Липшицев услов у свакој тачки $x\in\mathbb{R}$ (укључујући и нулу).

Теорема (Динијев довољан услов конвергенције Фуријеовог реда): Нека је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-периодична функција која задовољава услове Риман-Лебегове леме. Ако f задовољава Динијев услов у тачки $x \in \mathbb{R}$, онда њен Фуријеов ред $\sum c_n e^{inx}$ конвергира у тој тачки и важи:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}$$

Доказ: $S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt$

$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} \right) f(x-t) D_n(t)\, dt =$ смена $s = -t$

$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \left(f(x-t) + f(x+t) \right) D_n(t)\, dt$ и тачно су D_n

Ако у последњем интегралу изразу у загради додамо и одузмемо $f(x_-) + f(x_+)$, после груписања сабирака и уз коришћење чињенице да је

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_\pm)\, D_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} f(x_\pm) \int_0^{\pi} D_n(t)\, dt$$

D_n је парна функција

$$= \frac{1}{\pi} f(x_\pm) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\, dt}_{=2\pi} = \frac{f(x_\pm)}{2},$$

добијамо

$$S_n(x) = \frac{f(x_-)+f(x_+)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x-t) - f(x_-)\right) D_n(t)\, dt$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x+t) - f(x_+)\right) D_n(t)\, dt \qquad (*)$$

У последња два сабирка имамо

$$\left(f(x\pm t) - f(x_\pm)\right) D_n(t) = \frac{f(x\pm t) - f(x_\pm)}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

$(**)$ $\qquad D_n(t) =$

Пошто је

$$2 \sin \frac{t}{2} \sim t \quad \text{кад} \quad t \to 0$$

из Динијевог услова следи да функције

$$\frac{f(x \pm t) - f(x_\pm)}{\sin \frac{t}{2}}$$

задовољавају услове Риман–Лебегове леме, па последња два сабирка у (*), са подинтегралним функцијама написаним помоћу (**) теже нули кад $n \to \infty$. Одатле следи, пређашњом на $\lim_{n \to \infty}$ у (*), да је

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}$$



Напомена: Из претходне теореме видимо да не можемо да очекујемо да Фуријеов ред функције у тачки x увек конвергира ка вредности $f(x)$ функције у тој тачки. То је и природно: ако се две функције разликују у коначно много тачака, њихови Фуријеови коефицијенти који се израчунавају помоћу интеграла, (а тиме и њихови Фуријеови редови) ће бити једнаки. Самим тим, бар у тачкама у којима се те две функције разликују, Фуријеов ред бар једне не конвергира ка вредности функције.

У једној од претходних теорема (у тригонометријску конвергенцију у простору $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ и у норми $\|\cdot\|_2$) смо доказали да ако две (део-по-део) непрекидне функције f и g имају исте Фуријеове редове, онда је $f \equiv g$. Међутим, то не значи да Фуријеов ред непрекидне функције у свакој тачки конвергира ка вредности функције у тој тачки (иначе би Фуријеове $f \equiv g$ било очигледно!), нити да уопште конвергира у свакој тачки. Постоје низови непрекидних функција чији Фуријеов ред дивергира у неодређено много тачака!

Задатак (из Анализе 1): Доказати да ако низ s_n конвергира, онда конвергира и низ аритметичких средина

$$\sigma_n := \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1}$$

и важи $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} s_n$.

Из претходног задатка, применивши на тригонометријске суме $s_n(x)$ функционог реда, изузевши конвергенције низа

$$\sigma_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1}$$

аутоматски изузевши конвергенције функционог реда. Занимљиво је да нам конвергенција низа $\sigma_n(x)$ некад даје боље резултате: уопштити

Претходну Напомену о конвергенцији Фуријеовог реда (даље низа $S_n(x)$) и следећу теорему о конвергенцији низа $\sigma_n(x)$:

Теорема (**Фејерова**): Нека је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-периодична функција, апсолутно интеграбилна на $[-\pi, \pi]$. Тада важи:

равномерно конвергира

(1) $f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \sigma_n \rightrightarrows f$.

(2) $f \subset x_0 \Rightarrow \sigma_n(x_0) \to f(x_0)$.

Доказ: Пошто је

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt,$$

где је D_n Дирихлеово језгро, из дефиниције низа $\sigma_n(x)$ и из дефиниције Фејеровог језгра следи

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,F_n(t)\,dt,$$

где је F_n Фејерово језгро. Пошто је

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1 \qquad F$$

следи:

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)\,F_n(t)\,dt$$

Користимо $F_n \geq 0$

па је

$$|\sigma_n(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| \cdot F_n(t)\,dt \qquad *$$

Доказаћемо (1), (2) се доказује слично.

Нека је $\varepsilon > 0$. Пошто је f 2π-периодична и непрекидна, из Канторове теореме следи да је равномерно непрекидна, па постоји $\delta > 0$ такво да важи

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad A$$

Из чињенице доказане непрекидности

$$F_n(t) \le \frac{2}{(n+1)(1-\cos\delta)} \quad \text{за} \quad 0 < \delta \le |x| \le \pi$$

следи да $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ такво да за

$n \ge n_0$ и $\delta \le |x| \le \pi$ важи

$$F_n(t) \le \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}, \qquad (5)$$

где је $\|f\|_\infty = \max |f|$.

Посматрајмо интеграл на десној

страни у (*) као

$$\int_{-\delta}^{\delta} + \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right)$$

и процените сваки од ова два

сабирка посебно.

Из (A) и (F) следи

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| \cdot F_n(t)\, dt < \pi\varepsilon$$

а из (Б) следи да је за $n \geq n_0$

$$\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) |f(x-t) - f(x)| F_n(t)\, dt < \pi\varepsilon.$$

Сабирањем последње две неједнакости

закључујемо (из (*)) да је

$$(\forall x)\ |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

што значи да $\sigma_n \rightrightarrows f$.

Задатак: Доказати (2) ▨

Напомена: Претходна теорема даје нам

још један доказ II Вајерштрасове

теореме о равномерној апроксимацији

непрекидних 2π-периодичних функција

тригонометријским полиномима и

експлицитну конструкцију низа σ_n

који апроксимира дату функцију f.

Задатак: Нека је $f \subset x_0$. Доказати да тригонометријски Фуријеов ред функције f у тачки x_0 или дивергира или конвергира ка $f(x_0)$.

Диференцирање Фуријеовог реда

Теорема: Нека је $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ непрекидна и део-по-део диференцијабилна функција, таква да је $f(-\pi) = f(\pi)$. Ако је њен Фуријеов ред

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

онда је Фуријеов ред њеног извода:

$$\boxed{f' \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\, c_n e^{inx}.}$$

Другим речима, Фуријеов ред првог извода такве функције може да се добије формалним диференцирањем Фуријеовог реда саме функције.

Доказ следи из парцијалне интеграције:

Фуријеови коефицијенти функције f' су

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi} f(x)e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot(-in)e^{-inx}dx =$$

$$= \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = in\,c_n \quad \blacksquare$$

Овде је искоришћена претпоставка $f(-\pi) = f(\pi)$, због које је први сабирак у претходном реду једнак 0.

Напомена: Претходна теорема тврди да Фуријеов ред функције f (која задовољава услове Теореме) може да се диференцира члан-по-члан и да се тиме добија Фуријеов ред првог извода f', мада ниједан од ова два Фуријеова реда не мора да конвергира у конкретним тачкама.

Последица: Нека је $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ функција класе C^{k-1} која има део-по-део непрекидан извод реда k, таква да је $(\forall j\in\{0,1,2,\dots k-1\})\ f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$. Тада њени Фуријеови коефицијенти задовољавају асимптотску релацију

$$|c_n| = \frac{|\gamma_n|}{n^k} = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{kad} \quad n \to \infty,$$

gde je γ_n niz za koji važi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n|^2 < +\infty.$$

Dokaz: Neka su γ_n Furijeovi koeficijenti k-tog izvoda $f^{(k)}(x)$. Primenom uzastopne parcijalne k-puta dobijamo $\gamma_n = (in)^k c_n$, tako je

$$|c_n| = |\gamma_n| / n^k.$$

Iz Besselove nejednakosti sledi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\gamma_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(x)|^2 dx < +\infty,$$

odakle sledi $|\gamma_n| \to 0$ kad $n \to \infty$. ▨

Задатак: Нека је $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ функција која задовољава услове претходне последице. Доказати да њен Фуријеов ред конвергира апсолутно и равномерно на $[-\pi, \pi]$.

Упутство: Применити да важи неједнакост

$$\frac{|\gamma_n|}{n^k} \leq \frac{1}{2}\left(|\gamma_n|^2 + \frac{1}{n^{2k}}\right)$$

и применити претходну Последицу. Знајући да ред $\sum \frac{1}{n^p}$ конвергира за $p > 1$ и Вајерштрасов став о равномерној и апсолутној конвергенцији.

Задатак (интеграција Фуријеовог реда): Нека је $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ део-по-део непрекидна функција. Доказати да ако

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

може да се интеграли члан-по-члан:

$$\int_0^x f(t)\,dt = c_0 x + \sum_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_n}{in}\left(e^{inx} - 1\right)$$

Овде важи $=$, а не само $\sim$!

Упутство: Применити теорему о диференцирању Фуријеовог реда и претходни задатак на функцију

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - c_0 x.$$