

Задаци

- (1) Нека је

$$p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right).$$

Наћи граничну вредност низа $x_n = \sqrt[n]{p_n}$.

- (2) Израчунати

$$\int_0^4 \frac{|x-1|}{|x-2|+|x-3|} dx.$$

- (3) Израчунати

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x}{1+e^x} dx.$$

- (4) Израчунати

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2012} x}{\sin^{2012} x + \cos^{2012} x} dx.$$

- (5) Нека су
- $a_1, \dots, a_k$
- позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_k^n} = \max_{1 \leq j \leq k} a_j.$$

Нека је $f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ непрекидна функција. Доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 (f(t))^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \max_{0 \leq t \leq 1} f(t).$$

Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n e^{-nx} dx.$$

- (6) Нека је
- $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$
- функција интеграбилна по Риману. Доказати да ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_1^2 f(2^{-n}x) dx$$

конвергира и израчунати његов збир.

- (7) Доказати да за
- $x, y \in \mathbb{R}$
- важи формула

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

где су $\sinh, \cosh$ хиперболички синус и косинус, а $i = \sqrt{-1}$.

- (8) Нека је
- $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$
- неапсолутно конвергентан ред комплексних бројева. Доказати да за сваки број
- $\zeta \in \mathbb{C}$
- постоји низ
- $\mu_n \in \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
- такав да је

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n z_n = \zeta.$$

- (9) Нека је $\tau(n)$ број делитеља природног броја n . Доказати да за $|z| < 1$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) z^n.$$

Доказати да је укупан број ненегативних решења независних Диофантових једначина¹

$$\begin{aligned} x + 2y &= n - 1, \\ 2x + 3y &= n - 3, \\ 3x + 4y &= n - 5, \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

једнак $n + 2 - \tau(n + 2)$.

- (10) Доказати да су функције

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{за } x \neq 0 \\ 0 & \text{за } x = 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & \text{за } x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, m, n \text{ нескративи} \end{cases}$$

интеграбилне по Риману на сваком интервалу $[a, b]$, али да њихова композиција $f \circ g$ није ни на једном.

- (11) Нека је $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ неапсолутно конвергентан ред у $\mathbb{R}$ и $s_n = |a_0| + \dots + |a_n|$. Наћи граничну вредност низа

$$b_n = \frac{\text{sign}(a_n)}{\sqrt{1 + s_n}}.$$

Да ли ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира?

- (12) Испитати конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n} \right)^2.$$

- (13) Конволуција низова a_n и b_n комплексних бројева је низ

$$a_n \star b_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Ако низ a_n конвергира ка a_{∞} и ред $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ апсолутно конвергира, доказати да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \star b_n = a_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

- (14) Нека је $a_n = (-1)^n (n+1)^{-1/2}$ и $c_n = a_n \star a_n$. Доказати да ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, а ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ дивергира. Овај пример показује да је могуће да се формалним Кошијевим множењем два конвергентна реда добије дивергентан ред.
- (15) Нека је $a_0 = 2$, $b_0 = -1$ и $a_n = 2^{n-1}$, $b_n = 1$ за $n \geq 1$. Доказати да редови $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ дивергирају, а да ред $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \star b_n)$ конвергира. Овај пример показује да је могуће да се формалним Кошијевим множењем два дивергентна реда добије конвергентан ред.

¹тј. број решења $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ прве једначине + број решења $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ друге + $\dots$.

- (16) Нека је $f : [1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

конвергира. Доказати да постоји неограничен растући низ a_n такав да је

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n).$$

- (17) Наћи све непрекидне функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ за које је

$$\int_0^x e^t f(x-t) dt = \sin x$$

за све $x \in \mathbb{R}$.

- (18) Наћи све интеграбилне функције $f[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ за које је

$$f(x) = \frac{f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{x+1}{3}\right) + f\left(\frac{x+2}{3}\right)}{3}$$

за све $x \in [0, 1]$ и $f(1/\pi) = 1$.

- (19) Нека је $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција, таква да низ

$$z_n = \int_0^1 f(n+t) dt$$

конвергира ка z_∞ . Доказати да низ

$$\zeta_n = \int_0^1 f(nt) dt$$

конвергира и наћи његову граничну вредност.

- (20) Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција. Претпоставимо да важи

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$$

за сваку непрекидну функцију $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Доказати да је $f \equiv 0$.

Питања

- (1) Да ли тврђење у задатку (20) важи ако се претпоставка у њему замени слабијом претпоставком

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$$

за сваку непрекидну функцију $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ такву да је $g(a) = g(b) = 0$?

- (2) Нека је a_n низ реалних бројева, такав да ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ конвергира. Да ли конвергира ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^4$?
- (3) Да ли постоји низ реалних бројева a_n , такав да ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, а ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^3$ дивергира?
- (4) Да ли постоји непрекидна позитивна функција $f : [1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ таква да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ конвергира, а интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ дивергира?
- (5) Да ли постоји непрекидна позитивна функција $f : [1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ таква да ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ дивергира, а интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ конвергира?

- (6) Да ли постоји непрекидна позитивна функција $f : [1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ таква да интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ конвергира, а $f(x)$ не тежи нули кад $x \rightarrow +\infty$?
- (7) Да ли постоји непрекидна позитивна функција $f : [1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ која је неограничена на сваком интервалу $[a, +\infty[$, $a > 0$, а интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ конвергира?
- (8) Нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ неапсолутно конвергентан ред. Да ли постоји низ b_n који конвергира ка нули, такав да ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ дивергира?
- (9) Да ли постоји степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ који конвергира у само једној тачки $z \in \mathbb{C}$?
- (10) Да ли постоји функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ чији Меклоренов ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ конвергира за све $x \in \mathbb{R}$, али једнакост $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ важи само у тачки $x = 0$?
- (11) Нека је x_n низ позитивних бројева, такав да је $\liminf x_n = 0$. Да ли постоји низ позитивних бројева a_n који конвергира ка нули, такав да $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ дивергира и да је $\liminf a_n/x_n = 0$? Да ли постоји низ позитивних реалних бројева b_n такав да ред $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ конвергира и да је $\limsup b_n/x_n = 0$? Да ли постоје нивои позитивних реалних бројева c_n и d_n такви да ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ конвергира, ред $\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ дивергира и $c_n/d_n = x_n$?
- (12) Нека су $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ конвергентни редови са позитивним члановима. Да ли ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$$

конвергира?

- (13) Да ли постоје опадајући нивои позитивних реалних бројева a_n и b_n такви да редови $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ дивергирају, а ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$$

конвергира?

- (14) Нека је функција $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ интеграбилна по Риману. Да ли је функција $x \mapsto f(|x|)$ интеграбилна по Риману на интервалу $[-1, 1]$?
- (15) Нека функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ има коначан лимес у свакој тачки. Да ли је f интеграбилна по Риману?
- (16) Нека је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена. Да ли је функција $h(x) = \inf\{f(t) \mid t \in [a, x]\}$ интеграбилна по Риману?
- (17) Нека су функције $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интеграбилне по Риману. Да ли је функција $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ интеграбилна по Риману?
- (18) Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција класе C^1 . Да ли конвергира низ

$$z_n = \int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt?$$

- (19) Нека је $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Шта је $f(\mathbb{C})$?
- (20) Нека је $g(z) = \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$. Шта је $g(\mathbb{C})$?

Одговори: Да. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\mathbb{C}$.