

Питања

- (1) Да ли постоји функција $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ (тј. таква да постоји n -ти извод $D^n f(x)$ за све $x \in \mathbb{R}$ и све $n \in \mathbb{N}$) таква да је $f(x) > 0$ за $x \in]0, 1[$ и $f(x) = 0$ за $x \notin]0, 1[$?
- (2) Да ли постоји непрекидна функција $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ за коју је $f'_-(x) = x$ и $f'_+(x) = 2x$ за све $x \in]0, 1[$?
- (3) Нека је $(F, +, \cdot, 0, 1)$ поље и $S \subset F \setminus \{0\}$ подскуп који је затворен у односу на операције поља и за који је $S \cap (-S) = \emptyset$, $F = (-S) \cup \{0\} \cup S$. Са $x < y \Leftrightarrow x - y \in S$ је дефинисана релација тоталног поретка на S , таква да је $F_+^* = S$ (доказати!). Ако је $(F, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ тотално уређено поље, да ли је релација поретка на њему дефинисана неким скупом S на претходно описан начин? Да ли је тај скуп јединствен?
- (4) Нека је F скуп свих рационалних функција на $\mathbb{R}$, тј. скуп функција облика $p(x)/q(x)$ где су $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ полиноми који немају заједничку нулу (у $\mathbb{C}$), при чему q није идентички једнак нули. Нека је $S \subset F$ скуп свих рационалних функција облика $p(x)/q(x)$ таквих да најстарији коефицијенти (коефицијенти уз x са највећим степеном) полинома p и q имају исти знак (овај скуп задовољава услове Питања 3). Да ли је поље са релацијом поретка дефинисаном подскупом S архимедско?
- (5) Да ли свако тотално уређено поље садржи потпоље рационалних бројева (прецизније: уређено потпоље изоморфно пољу рационалних бројева)? Да ли постоји тотално уређено поље у коме поље рационалних бројева није густо?
- (6) Нека су a и b рационални бројеви и $[a, b]_{\mathbb{Q}} := \{q \in \mathbb{Q} \mid a \leq q \leq b\}$. Да ли за произвољну непрекидну функцију $f : [a, b]_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{R}$ важи неко од следећих тврђења:
 - (а) f је ограничена;
 - (б) f је равномерно непрекидна;
 - (в) ако је $f(a)f(b) < 0$ онда је $f(c) = 0$ за неко $c \in]a, b[$;
 - (г) f има минимум и максимум?
 - (д) Да ли (г) важи ако је f равномерно непрекидна?
- (7) Нека су a, b и $[a, b]_{\mathbb{Q}}$ као у Питању 6. Функција $f : [a, b]_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{C}$ је *диференцијабилна у тачки* $q_0 \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$ ако постоји број $z'_0 \in \mathbb{C}$ за који важи $f(q_0 + h) - f(q_0) = z'_0 \cdot h + o(h)$ кад $\mathbb{Q} \ni h \rightarrow 0$. Да ли за такву функцију важи неко од следећих тврђења:
 - (а) ако је $f'(x) \equiv 0$ онда је $f \equiv \text{const}$;
 - (б) ако је $f([a, b]_{\mathbb{Q}}) \subset \mathbb{R}$ и $f(a) = f(b)$ онда је $f'(c) = 0$ за неко $c \in]a, b[$?
- (8) Нека је $S \subset \mathbb{C}$ затворен скуп. Да ли постоји функција $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ која је прекидна у свим тачкама скупа S и непрекидна на $\mathbb{C} \setminus S$?
- (9) Да ли за низ a_n из $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+p} - a_n| = 0$ за све $p \in \mathbb{N}$ следи да a_n конвергира?
- (10) Да ли постоји скуп X и низ $A_n \in \mathcal{P}(X)$ његових подскупова за који истовремено важи $\liminf A_n = \limsup A_n = \emptyset$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Card}(A_n) = \infty$?
- (11) Да ли постоји функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ чији је извод у некој тачки строго позитиван, а она није монотона ни у једној околини те тачке?

- (12) Да ли постоји *монотона* функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за коју важи $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, али не и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$?
- (13) Да ли из непрекидности функције f на $[a, b]$ следи непрекидност функције $g(x) = \sup\{f(t) \mid a \leq t \leq x\}$?
- (14) Да ли из диференцијабилности функције f на $]a, b[$ следи диференцијабилност функције $g(x) = \sup\{f(t) \mid a < t \leq x\}$?
- (15) Да ли из диференцијабилности функције f на $]a, b[$ следи да функција $g(x) = \sup\{f(t) \mid a < t \leq x\}$ има леви и десни извод на $]a, b[$?
- (16) Да ли постоји полином трећег степена чији график пролази кроз тачке $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, такав да тангента на график у $(0, 0)$ образује са позитивним делом x -осе угао $\pi/4$? Ако постоји, да ли је јединствен?
- (17) Нека је $A \subset \mathbb{C}$, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ непрекидна функција и $z_n \in A$ Кошијев низ. Да ли одатле следи да је низ $f(z_n)$ Кошијев?
- (18) Нека је $B \subset \mathbb{C}$, $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ равномерно непрекидна функција и $z_n \in B$ Кошијев низ. Да ли одатле следи да је низ $f(z_n)$ Кошијев?
- (19) Нека су $a_0 < b_0 < a_1 < b_1 < \dots < a_n < b_n$ реални бројеви. Да ли полином $p(x) = \prod_{k=0}^n (x + a_k) + 2 \prod_{k=0}^n (x + b_k)$ има комплексну нулу?
- (20) Да ли је извод диференцијабилне парне функције непарна функција? Да ли је извод диференцијабилне непарне функције парна функција?
- (21) Да ли је извод диференцијабилне периодичне функције периодична функција?
- (22) Да ли неконстантна диференцијабилна периодична функција има најмањи позитивни период?
- (23) Да ли произвољна неконстантна периодична функција има најмањи позитивни период?
- (24) Да ли функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ може да има строги локални екстремум у непребројиво много тачака?
- (25) Да ли постоји непрекидна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ таква да за свако $y \in \mathbb{R}$ скуп $f^{-1}(y)$ има
(а) два елемента;
(б) три елемента?
- (26) Да ли постоји непрекидна бијекција
(а) реалне праве $\mathbb{R}$ на интервал $[0, 1]$;
(б) реалне праве $\mathbb{R}$ на круг $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$?
- (27) Нека је $b(\mathbb{C})$ скуп ограничених комплексних низова и $c_0(\mathbb{C})$ скуп комплексних низова који конвергирају ка 0 и нека је $\sim$ релација еквиваленције на $b(\mathbb{C})$ дефинисана са $\zeta_n \sim \eta_n \Leftrightarrow \zeta_n - \eta_n \in c_0(\mathbb{C})$. Да ли је $(b(\mathbb{C})/\sim, +, \cdot)$ поље?
- (28) Ако полином $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ има само реалне корене, да ли исто важи за полином $\frac{d}{dx}p$?
- (29) Да ли неконстантна периодична функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ има $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?
- (30) Да ли из $(\forall a \in \mathbb{R}) \lim_{n \rightarrow 0} f(a/n) = 0$ следи $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$?

Одговори: (1) Да. (2) Не. (3) Да. (4) Не. (5) Да. (6) Не. (7) Не. (8) Да. (9) Не. (10) Да. (11) Да. (12) Да. (13) Да. (14) Не. (15) Да. (16) Да. (17) Не. (18) Да. (19) Не. (20) Да. (21) Да. (22) Да. (23) Не. (24) Не. (25) (а) Не. (б) Да. (26) Не. (27) Не. (28) Да. (29) Не. (30) Не.

Задаци

- (1) Скицирати скуп $\{z \in \mathbb{C} \mid \min\{|z-1-i|, |z+1-i|, |z+i|\} \leq 2\}$ у комплексној равни $\mathbb{C}$.
- (2) Доказати да постоји реална функција f реалне променљиве, таква да је крива $z: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z(t) = t(1-t^2)^{-1} + i(t-2t^3)(1-t^2)^{-1}$ њен график у $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Испитати функцију f и нацртати њен график.
- (3) Балон се пење вертикално брзином 40 cm/s . У тренутку када је балон на висини 20 m кроз тачку испод њега пролази бициклиста који се креће брзином 5 m/s . Којом брзином се три секунде касније повећава растојање између бициклисте и балона?
- (4) У Декартовом xOy -координатном систему скицирати криву γ задату у поларним координатама (r, θ) једначином $r^2 \sin 2\theta = 2a^2$, где је $a > 0$. Нека је $P \in \gamma$ произвољна тачка. Доказати да је троугао који образују тангента на γ у P , права OP и x -оса једнакокрани.
- (5) Скицирати графике следећих функција:
 - (а) $f_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + (1-x)^{2n}}$, $x \geq 0$;
 - (б) $f_2(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (x/2)^{2n} + (1/x)^{2n}}$, $x > 0$;
 - (в) $f_3(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\cos^{2n} x + \sin^{2n} x}$, $x \in \mathbb{R}$;
 - (г) $f_4(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(e^n + x^n)}{n}$, $x \geq 0$
 - (д) $f_5(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{nx} + x}{e^{nx} + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (6) Одредити домене и испитати непрекидност следећих функција реалне променљиве x :
 - (а) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$
 - (б) $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k^{-x} 2^{-k}$
 - (в) $h(x) = \sup\{n^{-x} 2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- (7) Нека је $A(a_1, \dots, a_n)$ аритметичка, а $G(a_1, \dots, a_n)$ геометријска средина позитивних бројева $a_1, \dots, a_n$. Доказати да функција

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{A(a_1, \dots, a_{n-1}, x)}{G(a_1, \dots, a_{n-1}, x)}$$

има минимум у тачки која је аритметичка средина бројева $a_1, \dots, a_{n-1}$.

- (8) Нека је $\zeta = a + ib$ тачка у комплексној равни и L права кроз ζ која сече реалну и имагинарну осу у тачкама x_0 и iy_0 . Доказати неједнакости
 - (а) $|x_0 + iy_0| \geq (|a|^{2/3} + |b|^{2/3})^{3/2}$
 - (б) $|x_0| + |y_0| \geq (\sqrt{|a|} + \sqrt{|b|})^2$
 - (в) $|x_0 y_0| \geq 4|ab|$.
- (9) Нека је z_n низ у $\mathbb{C}$.
 - (а) Доказати или оповргнути тврђење: низ z_n конвергира ако и само ако конвергира сваки његов подниз.
 - (в) Доказати или оповргнути тврђење: низ z_n има подниз који конвергира или подниз који је неограничен.
 - (б) Нека је z_n низ који не конвергира ка $\zeta \in \mathbb{C}$. Доказати или оповргнути тврђење: постоји подниз $z_{\varphi(n)}$ са својством да ниједан његов подниз не конвергира ка ζ .

- (10) Наћи све монотоне функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y)$.

- (11) Наћи лimes супериор и лimes инфериор низа $x_n \in \mathbb{R}$ дефинисаног са

$$x_0 = 0, \quad x_{2n} = \frac{x_{2n-1}}{2}, \quad x_{2n+1} = \frac{1}{2} + x_{2n}.$$

- (12) Нека је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која има леви извод $f'_-(x)$ у свакој тачки $x \in]a, b[$.

- (а) Доказати да ако f није монотона онда постоји $c \in]a, b[$ за које је $f'_-(c) = 0$.

- (б) Доказати да ако је $f(a) = f(b)$, онда је

$$\inf_{a < x < b} f'_-(x) \leq 0 \leq \sup_{a < x < b} f'_-(x).$$

- (в) Доказати да је

$$\inf_{a < x < b} f'_-(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \sup_{a < x < b} f'_-(x).$$

- (13) Функција $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ има непрекидан десни извод $f'_+(x)$ у свакој тачки $x \in]a, b[$. Доказати да је f диференцијабилна на $]a, b[$.

- (14) Нека је $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ двапут диференцијабилна функција и нека је $M_j := \sup_{x>0} |D^j f(x)|$ за $j \in \{0, 1, 2\}$. Доказати да је $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

- (15) Нека је $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ двапут диференцијабилна функција са ограниченим другим изводом, таква да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Доказати да је $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Показати контрапримером да тврђење не важи ако се изостави услов ограничености другог извода.

- (16) Нека су $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције. Доказати да је функција $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ диференцијабилна у тачкама x у којима је $f(x) \neq g(x)$ и у онима у којима је $f(x) = g(x)$ и $f'(x) = g'(x)$. Чему је једнак извод $h'(x)$ у тим тачкама? Шта је са осталим тачкама?

- (17) Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и нека је $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Доказати да је функција $g(x) = \sup\{t \mid f(t) < x\}$ непрекидна ако и само ако је f строго растућа.

- (18) Нека је $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција која задовољава асимптотску релацију $f(x) = o(x)$ кад $x \rightarrow +\infty$. Доказати да за функцију $g(x) := \sup_{0 \leq t \leq x} f(t)$ важи $g(x) = o(x)$ кад $x \rightarrow +\infty$.

- (19) Доказати да је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна ако и само ако за $x_1 < x_2 < x_3$ важи

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0$$

и да је строго конвексна ако и само ако важи строга неједнакост.

- (20) Низ a_n је задат са $a_0 = \sqrt{a}$ за $a \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$. Да ли $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ непрекидно зависи од a ?

- (21) Функције f и g су диференцијабилне у тачки a . Израчунати

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{x - a}.$$

- (22) Доказати да је ограничена конвексна функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ константна.

- (23) Нека је E скуп свих низова $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ таквих да постоји $k \in \mathbb{Z}$ (које може да буде различито за различите a) са својством $a_n = 0$ за све $n < k$. У скупу E дефинисане су операције сабирања и множења помоћу

$$(a + b)_n = a_n + b_n, \quad (a \cdot b)_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}.$$

- (а) Доказати да је $(E, +, \cdot)$ са овако дефинисаним операцијама поље. (Ово поље се назива пољем формалних редова $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$; дефинисане операције уопштавају правило множења коефицијената полинома; реч *формалних* значи да не постављамо питање конвергенције претходне суме, као ни домена променљиве T , већ је користимо само као другу ознаку за низ a , ради лакшег памћења и извођења дефинисаних операција поља.)
- (б) Доказати да *лексикографски поредак*

$$a <_L b \Leftrightarrow a_{\min\{n \mid a_n \neq b_n\}} < b_{\min\{n \mid a_n \neq b_n\}}$$

дефинише релацију поретка $a \leq_L b \Leftrightarrow (a = b \vee a <_L b)$ и да је $(E, +, \cdot, \leq_L)$ тотално уређено поље.

- (в) Доказати да у пољу $(E, +, \cdot, \leq_L)$ не важи Архимедова аксиома.

- (24) Нека је $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ функција дефинисана на интервалу $I \subset \mathbb{R}$. *Лежандровом трансформацијом* функције f назива се функција

$$f^*(t) = \sup_{x \in I} (tx - f(x)).$$

Нека је I^* домен функције f^* , тј. $I^* = \{t \in \mathbb{R} \mid f^*(t) \neq \infty\}$. Доказати:

- (а) Скуп I^* је или празан, или једна тачка, или интервал.
- (б) Ако је функција f конвексна, онда је $I^* \neq \emptyset$ и $(f^*)^* = f$ (тј. Лежандрова трансформација је *инволутивна*).
- (в) Доказати да за све $(x, t) \in I \times I^*$ важи неједнакост

$$xt \leq f(x) + f^*(t).$$

- (г) Извести из (в) доказ неједнакости

$$xt \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}t^q \quad \text{за} \quad 1/p + 1/q = 1$$

и неједнакости

$$xt \leq e^x + t \log(t/e).$$

- (д) Ако је f диференцијабилна и конвексна, доказати да је $f^*(t) = tx(t) - f(x(t))$ где је $x(t)$ решење једначине $t = f'(x)$ по x (дајући при томе аргумент зашто та једначина има решење). Каква геометријска интерпретација Лежандрове трансформације се може дати на основу тога?

- (25) Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ конвексна функција и нека је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Доказати да је $f \equiv 0$.

- (26) Доказати да за сваку конвексну функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ постоји (коначан или бесконачан) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$.

- (27) Нека су $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне функције које задовољавају $f'(x) = g(x)$, $f''(x) = -f(x)$ за све x и нека је $h(x) = (f(x))^2 + (g(x))^2$. Ако је $h(0) = 5$, наћи $h(10)$.

- (28) Функција $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ се назива *полунепрекидном одозго* у тачки $a \in A$ ако је

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) \leq f(a),$$

а *полунепрекидном одоздо* ако је

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a).$$

- (а) Доказати да је функција непрекидна у тачки a ако и само ако је полунепрекидна и одоздо и одозго у тој тачки.
 (б) Доказати да је карактеристична функција отвореног скупа полунепрекидна одоздо, а карактеристична функција затвореног скупа полунепрекидна одозго.
 (в) Испитати полунепрекидност функције

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n \frac{n}{n+1}, & \text{ако је } x = \frac{m}{n} \text{ нескратив, } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{за } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- (г) Доказати да је *Риманова функција*

$$\mathcal{R}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ако је } x = \frac{m}{n} \text{ нескратив, } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{за } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

полунепрекидна одозго у свакој тачки, а да је скуп њених прекида густ у $\mathbb{R}$.

- (д) Доказати да је супремум фамилије функција полунепрекидних одоздо полунепрекидан одоздо. Формулисати и доказати дуално твђење за инфимум.
 (29) Дужине катета правоуглог троугла су a и 1 , а дужина хипотенузе је s . Угао између катете дужине 1 и хипотенузе је s радијана. Израчунати лимесе следећих израза кад $s \rightarrow \pi/2$:
 (а) $s - a$
 (б) $s^2 - a^2$
 (в) $s^3 - a^3$.
 (30) Испитати функцију $f(x) = |x + 2|e^{-1/x}$ и нацртати њен график.