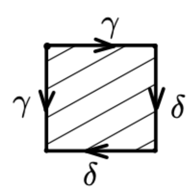
Топологија Б - домаћи задаци 2024/2025

У сваком испитном року долази по један од ових 20 задатака и носи 8 поена.

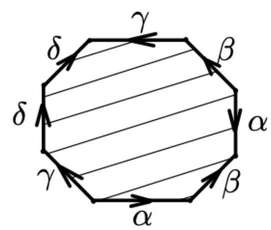
1. Ако су X и Y Хауздорфови простори и $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање, доказати да су онда и цилиндар и конус пресликавања f (M_f и C_f) такође Хауздорфови простори.

2. (а) Доказати да је количнички простор са прве (леве) слике хомеоморфан пројективној равни.

(б) Доказати да је простор X (слика десно) хомеоморфан некој затвореној површи и одредити ту површ (одредити њен род и утврдити да ли је оријентабилна).

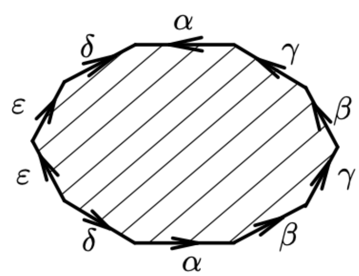


X :



3. Доказати да је простор X хомеоморфан некој затвореној површи и одредити ту површ (одредити њен род и утврдити да ли је оријентабилна).

X :



4. Нека су $f : X \to Y \times Z$ и $g : X \to Y \times Z$ непрекидна пресликавања и нека су $p_1 : Y \times Z \to Y$ и $p_2 : Y \times Z \to Z$ пројекције. Доказати да је $f \simeq g$ ако и само ако је $p_1 \circ f \simeq p_1 \circ g$ и $p_2 \circ f \simeq p_2 \circ g$.

5. Нека је Y путно повезана тополошка група (операција групе и инверз јесу непрекидна пресликавања) и $e \in Y$ њен неутрал. Нека је још X тополошки простор и $x_0 \in X$.

(а) Ако је $f : X \to Y$ непрекидно пресликавање, доказати да постоји непрекидно пресликавање $g : X \to Y$ такво да је $f \simeq g$ и $g(x_0) = e$.

(б) Ако су $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања таква да је $f(x_0) = g(x_0) = e$, доказати да важи еквиваленција

$$f \simeq g \qquad \iff \qquad f \simeq g \quad (\mathrm{rel}\{x_0\}).$$

6. Ако је $n \in \mathbb{N}$, доказати да је $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$ јаки деформациони ретракт од $D^n \times I$.

7. (а) Нека је $z_0 \in \mathbb{C} \setminus S^1$ и $f_0 : S^1 \to S^1$ пресликавање дато са $f_0(z) := \frac{z - z_0}{|z - z_0|}$. Ако је $|z_0| > 1$, доказати да је $f_0 \simeq \mathrm{const}$, а ако је $|z_0| < 1$, доказати да је $f_0 \simeq \mathbf{1}_{S^1}$.

(б) Нека је p полином са комплексним коефицијентима који нема нула на кружници S^1 и нека је $f : S^1 \to S^1$ пресликавање дато са $f(z) := \frac{p(z)}{|p(z)|}$. Доказати да је f хомотопски тривијално ако и само ако полином p нема нула у диску D^2.

8. Нека је X (путно повезан) простор са коначном фундаменталном групом и $f : X \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ непрекидно пресликавање које индукује нетривијалан хомоморфизам фундаменталних група ($f_* \neq 0$). Доказати да је f „на”.

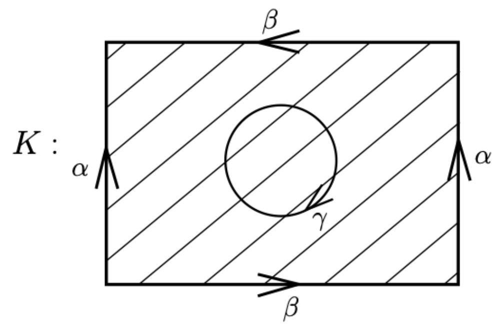
9. Нека је X тополошки простор. Доказати да су следећи искази међусобно еквивалентни.

(1) X је контрактибилан.
(2) За произвољан тополошки простор Y важи $X \times Y \simeq Y$.
(3) $X \times S^1 \simeq S^1$.

10. (а) Ако је A потпростор простора X, доказати да је $(X \times Y)/(A \times Y) \simeq X/A$ за сваки контрактибилан простор Y.

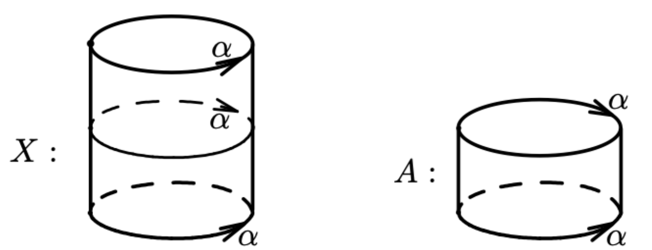
(б) Примером показати да количнички простори из дела (а) не морају бити хомотопски еквивалентни ако Y није контрактибилан.

11. На Клајновој боци K уочене су кружнице α, β и γ.



(а) Које од ових кружница су ретракти од K?
(б) Да ли је нека од ових кружница деформациони ретракт од K?

12. Простор X је количник цилиндра $C = S^1 \times I$ (в. слику).



(а) Одредити фундаменталну групу простора X.
(б) Испитати да ли је X хомеоморфан некој затвореној површи и, у случају да јесте, одредити ту површ (утврдити да ли је оријентабилна и одредити јој род).
(в) Ако је A „доња половина” овог цилиндра са наслеђеном идентификацијом, испитати да ли је A ретракт простора X.

13. (а) Дате су три кружнице у еуклидском простору $\mathbb{R}^3$:

$$k_1 := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad k_2 := \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \quad k_3 := \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y-1)^2 + z^2 = 1\}.$$

Одредити следеће фундаменталне групе: $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus k_1)$, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (k_1 \cup k_2))$, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (k_1 \cup k_3))$, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (k_2 \cup k_3))$ и $\pi_1(\mathbb{R}^3 / k_1)$.

(б) Ако је $0 \leqslant k < n$ и ако је $S^k := \{(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k+1}^2 = 1\}$, одредити $\pi_1(\mathbb{R}^n / S^k)$.

14. Нека је $p : E \to B$ наткривање. Доказати наредних пет тврђења.

(а) Ако E има својство T_1, онда и B има то својство.
(б) Ако E има својство T_2 и ако је $p^{-1}(b)$ коначан скуп за све $b \in B$, онда и B има својство T_2.
(в) Ако је E компактан T_2-простор, онда је и B компактан T_2-простор.
(г) Ако је B многострукост, онда је и E многострукост (исте димензије као и B).
(д) Ако је E затворена многострукост, онда је и B затворена многострукост (исте димензије као и E).

15. Дат је Хауздорфов простор X и коначна група G (са неутралом e) која слободно дејствује на X. Нека је, за $g \in G$, са $\widetilde{g} : X \to X$ означен одговарајући хомеоморфизам. Нека је још X/G простор орбита овог дејства ($X/G := X/{\sim}$, при чему је $x \sim y$ ако и само ако је $y = \widetilde{g}(x)$ за неко $g \in G$).

(а) Доказати да за свако $x \in X$ постоји његова отворена околина U таква да је $U \cap \widetilde{g}(U) = \emptyset$ за све $g \in G \setminus \{e\}$.

(б) Доказати да за околину U из дела (а) важи да је $\widetilde{g}_1(U) \cap \widetilde{g}_2(U) = \emptyset$ за све $g_1, g_2 \in G$ такве да је $g_1 \neq g_2$.

(в) Доказати да је природна сурјекција $\pi : X \to X/G$ наткривајуће пресликавање.

(г) Ако је X просто повезан, доказати да је $\pi_1(X/G) \cong G$.

16. (а) Наћи нека два међусобно нехомеоморфна простора X и Y таква да је $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y) \cong \mathbb{Z}_4$.

(б) Да ли је могуће (у делу (а)) одабрати просторе X и Y тако да постоји наткривање $p : X \to Y$?

(в) Наћи неки простор Z такав да је $\pi_1(Z) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.

(г) Да ли је могуће (у деловима (а) и (в)) одабрати просторе X и Z тако да постоји наткривање $q : X \to Z$?

17. (а) Испитати да ли постоји наткривање $p : \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \vee S^2 \to S^2 \vee S^2$.

(б) Испитати да ли постоји наткривање $q : S^2 \vee S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \vee S^2$.

18. (а) Нека су $g, h \in \mathbb{N}_0$. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такво да је $g - 1 = n(h - 1)$, доказати да постоји n-лисно наткривање $M_g \to M_h$.

(б) Нека су $g, h \in \mathbb{N}$. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такво да је $g - 2 = n(h - 2)$, доказати да постоји n-лисно наткривање $N_g \to N_h$.

(в) Нека је $g \in \mathbb{N}_0$ и $h \in \mathbb{N}$. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такво да је $g - 1 = n(h - 2)$, доказати да постоји $2n$-лисно наткривање $M_g \to N_h$.

19. За тополошки простор X кажемо да је *H-простор* (или *јаки H-простор*) уколико постоји непрекидна бинарна операција $\mu : X \times X \to X$ са обостраним неутралом $e \in X$: $\mu(e, x) = \mu(x, e) = x$ за све $x \in X$ (не захтевамо асоцијативност операције μ, нити постојање инверза). Као што је уобичајено, пресликавање $I \to X \times X$ чије су координатне функције f и g означавамо са (f, g) (то је тзв. *сужени производ* пресликавања f и g).

(а) Ако је X H-простор са операцијом μ и неутралом e, $u, v : I \to X$ две петље у тачки e и $c_e : I \to X$ константна петља у тачки e, доказати да је
$$\mu \circ (u \cdot c_e, c_e \cdot v) = u \cdot v,$$
где је са $\cdot$ означена операција надовезивања петљи.

(б) Ако је X H-простор са операцијом μ и неутралом e, $\mu_* : \pi_1\big(X \times X, (e, e)\big) \to \pi_1\big(X, e\big)$ индуковани хомоморфизам и $u, v : I \to X$ две петље у тачки e, доказати да је
$$\mu_*[(u, v)] = [u] * [v],$$
где је са $*$ означена операција фундаменталне групе $\pi_1\big(X, e\big)$.

(в) Нека је $p : E \to B$ наткривање, при чему је E повезан и локално путно повезан простор. Ако је B H-простор, доказати да је онда и E H-простор.

20. (а) Ако су $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{F}_{S^2}$ и $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = S^2$, доказати да постоје $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in S^2$ такви да је $\{x, -x\} \subseteq F_i$ (другим речима, сфера S^2 се не може покрити трима затвореним скуповима тако да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака).

(б) Да ли се сфера S^2 може покрити трима отвореним скуповима тако да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака?

(в) Доказати да се сфера S^2 може покрити са четири отворена скупа тако да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака.

(г) Да ли се сфера S^2 може покрити са четири затворена скупа тако да ниједан од њих не садржи пар антиподалних тачака?