Sintaksa i semantika iskazne logike i logike prvog reda

1. Koja je osnovna razlika između *sintakse* i *semantike* u logici?
2. Ako je iskazna formula tačna za svaku valuaciju, za tu formulu kažemo da je:
   (a) zadovoljiva
   (b) tautologija (valjana formula)
   (c) kontradikcija
3. Da li formula $(A \Rightarrow B) \wedge \neg(\neg B \Rightarrow \neg A)$ ima model u iskaznoj logici?
   (a) Da
   (b) Ne
4. Kada za skup iskaznih formula F kažemo da je *zadovoljiv*?
5. Šta čini *signaturu* (ili jezik) logike prvog reda?
6. Za šta koristimo funkcijske, a za šta predikatske simbole u sintaksi logike prvog reda?
7. Koja je razlika između *terma* i *formule* u logici prvog reda? Kako se interpretiraju termovi, a kako formule?
8. Posmatrajmo formulu $(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(y)) \wedge R(x)$. Koje su promenljive u ovoj formuli slobodne, a koje vezane?
9. Šta je to *zatvorena formula* (ili rečenica) u logici prvog reda?
10. Šta znači da je struktura M *model* formule A prvog reda?
11. Ako je formula A logička posledica skupa formula Γ, to znači da:
    (a) Postoji bar jedan model skupa Γ u kome je formula A netačna.
    (b) Svaki model skupa Γ je ujedno i model formule A.
    (c) Formula A je tačna samo ako su sve formule u Γ netačne.
12. Kako glasi Teorema o kompaktnosti za iskaznu logiku?
13. Ako za formulu A važi da je $\models A$, šta je sa njenom negacijom $\neg A$?
    (a) Ona je takođe valjana.
    (b) Ona je nezadovoljiva (kontradikcija).
    (c) Ona je zadovoljiva, ali nije valjana.
14. Izraziti formulu $\exists x.P(x)$ na logički ekvivalentan način pomoću univerzalnog kvantifikatora.
15. Data je iskazna formula $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \vee r)$. Odredite istinitosnu vrednost formule A u valuaciji v za koju važi: $v(p) = 1$, $v(q) = 0$, $v(r) = 1$.
16. Da li je iskazna formula $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ zadovoljiva? Obrazložiti.
17. Neka je data formula prvog reda $\exists y.x < y$. Izvršiti zamenu $[x \mapsto f(y)]$ u ovoj formuli.
18. Rečenica logike prvog reda $\forall x.\exists y.P(x, y)$ je tačna u strukturi M ako i samo ako:
    (a) Postoji jedan element y iz domena koji je u relaciji sa svim elementima x.
    (b) Za svaki izabrani element x iz domena možemo pronaći (makar jedan) element y tako da važi $P(x, y)$.

(c) Za svaka dva elementa x i y važi $P(x, y)$.

19. Posmatrajmo strukturu $M = (\mathbb{N}, <)$ gde je domen skup prirodnih brojeva, a $<$ standardna relacija manje od. Da li je u ovoj strukturi tačna rečenica $\forall x.\exists y.x < y$? Ukratko obrazložite.
20. Data je formula $\forall x.\forall y.P(x, y) \Rightarrow P(y, x)$. Konstruišite jednostavnu strukturu M (odredite domen i relaciju P^M) koja služi kao *kontraprimer* za ovu formulu (tj. u kojoj je formula A netačna).
21. Ako znamo da za neke formule A, B, C važi $A, B \models C$, koja od sledećih tvrdnji je *tačna*?

    (a) Formula $A \land B \land C$ je tautologija.

    (b) Formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ je valjana (tačna u svakoj strukturi).

    (c) Formula $C \Rightarrow (A \lor B)$ je nezadovoljiva.
22. Pretpostavimo da imamo beskonačan skup iskaznih formula Γ takav da za svaki njegov konačan podskup postoji bar jedan model. Šta nam Teorema o kompaktnosti garantuje za ceo skup Γ?
23. Kako se formalno definiše pojam *valjane formule* ($\models A$) u logici prvog reda?
24. Da li je formula $\exists x.P(x) \lor Q(x)$ logički ekvivalentna formuli $(\exists x.P(x)) \lor (\exists x.Q(x))$?

    (a) Da

    (b) Ne
25. Koja od sledećih formula *nije* valjana u logici prvog reda?

    (a) $(\forall x.P(x) \land Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x.P(x)) \land (\forall x.Q(x)))$

    (b) $\exists x.P(x) \land Q(x) \Leftrightarrow ((\exists x.P(x)) \land (\exists x Q(x)))$

    (c) $(\forall x.P(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x))$
26. Neka je struktura $M = (\mathbb{Z}, f)$ gde je domen skup celih brojeva, a $f^M(x) = x + 1$ (funkcija sledbenika). Ako je valuacija $v(x) = 5$, odredite vrednost terma $f(f(x))$ u toj interpretaciji.
27. Ako su dve strukture M_1 i M_2 iste signature *izomorfne*, šta to znači za istinitost rečenica (zatvorenih formula) u tim strukturama?
28. Ako je skup formula $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nezadovoljiv, šta na osnovu toga možemo zaključiti o odnosu skupa Γ i formule A?

    (a) $\Gamma \models A$.

    (b) Skup Γ je prazan.

    (c) Formula A je kontradikcija.
29. Da li je iskazna formula $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ tautologija?

    (a) Da

    (b) Ne
30. Objasnite zašto se istinitost formule u datoj strukturi M mora definisati u odnosu na valuaciju v ako formula sadrži slobodne promenljive, dok za zatvorene formule (rečenice) valuacija uopšte nije potrebna.
31. Da li su iskazne formule $p \Rightarrow q$ i $\neg p \Rightarrow \neg q$ logički ekvivalentne? Obrazložiti.
32. Kako se veznik implikacije ($p \Rightarrow q$) može izraziti koristeći isključivo negaciju i konjunkciju?

Izračunljivost

1. Kako glasi Čerčova teza?
2. Šta podrazumevamo pod inutitivnim pojmom algoritma? Koje karakteristike neki postupak treba da ima da bismo ga smatrali algoritmom u intuitivnom smislu?
3. Navesti bar tri načina za formalno opisivanje izračunljivih funkcija.
4. Koje od sledećih instrukcija spadaju u bazični skup instrukcija URM mašine? (Zaokružiti sve tačne odgovore)
   (a) Instrukcija nule $Z(n)$
   (b) Instrukcija sledbenika $S(n)$
   (c) Instrukcija sabiranja $A(m, n)$
   (d) Instrukcija prenosa $T(m, n)$
   (e) Instrukcija uslovnog skoka $J(m, n, q)$
   (f) Instrukcija bezuslovnog skoka $U(q)$
5. Ako je početno stanje registara URM mašine $R_1 = 5$, $R_2 = 3$, a svi ostali registri su nule, koja će vrednost biti u registru R_1 nakon izvršenja instrukcije $T(2, 1)$?
6. Da li URM instrukcija skoka $J(m, n, q)$ menja sadržaj registara R_m ili R_n?
   (a) Da
   (b) Ne
7. Šta znači da se URM program P *zaustavlja* za date početne vrednosti registara? Koji uslov treba da bude ispunjen da bi URM program zaustavio svoj rad?
8. Ako URM program pokušava da izvrši instrukciju skoka $J(m, n, q)$ gde je q broj koji je strogo veći od ukupnog broja instrukcija u programu, šta se dešava?
   (a) Program ulazi u beskonačnu petlju.
   (b) Program prijavljuje grešku u izvršavanju (runtime error).
   (c) Program se zaustavlja.
   (d) Program automatski skače na prvu instrukciju (resetuje se).
9. Da li svaka izračunljiva funkcija mora biti totalna? Odgovor obrazložiti.
10. Napišite URM program koji vrši rotaciju vrednosti u registrima R_1, R_2 i R_3 (tj. premešta $R_1 \to R_2 \to R_3 \to R_1$).
11. Da li je klasa primitivno rekurzivnih funkcija podskup klase URM-izračunljivih funkcija? Odgovor obrazložiti.
12. Koja operacija (operator) omogućava uvođenje beskonačnih petlji i ne-totalnosti pri definisanju μ-rekurzivnih funkcija?
13. Šta od navedenog predstavlja funkciju sledbenika $S(x)$?
    (a) $S(x) = x - 1$
    (b) $S(x) = x + 1$
    (c) $S(x) = 2x$
    (d) $S(x) = 0$
14. Da li su funkcije projekcije $P^i_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_i$ primitivno rekurzivne funkcije?
    (a) Da
    (b) Ne

15. Definišite operaciju *supstitucije* (kompozicije) funkcija u kontekstu izgradnje rekurzivnih funkcija.
16. Koji od ponuđenih odgovora opisuje Akermanovu funkciju?
    (a) Ona je primitivno rekurzivna, ali nije uopšteno rekurzivna.
    (b) Ona je primer funkcije koja je totalna i izračunljiva, ali nije primitivno rekurzivna.
    (c) Ona nije izračunljiva ni na jednom poznatom modelu računanja.
17. Da li se svaka primitivno rekurzivna funkcija može izračunati URM programom koji garantovano nema beskonačne petlje (tj. uvek se zaustavlja)?
    (a) Da
    (b) Ne
18. Objasnite ukratko ideju kodiranja URM programa? Koje su najznačajnije posledice mogućnosti kodiranja programa.
19. Šta predstavlja univerzalni URM program? Koju funkciju on izračunava?
20. Kako se uređeni par (x, y) može bijektivno i efektivno kodirati jednim prirodnim brojem?
21. Navesti primere gde se u praksi koristi teorijski koncept univerzalnog programa?
22. Neka je P URM program, a $f_P^{(k)}$ parcijalna funkcija arnosti k koju taj program izračunava. Ako se program P ne zaustavlja za ulaznu k-torku $(x_1, \ldots, x_k)$, vrednost $f_P^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$ je:
    (a) Vrednost 0
    (b) Vrednost u registru R_1 u trenutku beskonačne petlje
    (c) Nedefinisana
    (d) Proizvoljan prirodan broj
23. Dat je sledeći URM program:

    ```
    1. J(1, 2, 4)
    2. S(1)
    3. J(1, 1, 1)
    ```

    Ako su početne vrednosti registara $R_1 = 2$ i $R_2 = 4$, odredite da li se program zaustavlja i koja je krajnja vrednost u registru R_1.
24. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za skup svih URM programa?
    (a) Skup URM programa je konačan.
    (b) Skup URM programa je prebrojivo beskonačan.
    (c) Skup URM programa je neprebrojiv (kardinalnosti kontinuuma).
25. Kako formalno definišemo parcijalnu funkciju koju izračunava dati URM program?
26. Na koji način možemo funkciju sabiranja $add(x, y) = x + y$ predstaviti pomoću primitivne rekurzije?
27. Da li postoji totalna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja *nije* URM-izračunljiva? Odgovor obrazložiti i navesti primer.
28. Operator primitivne rekurzije omogućava definisanje nove funkcija $f(y, x_1, \ldots, x_k)$ pomoću dve date funkcije $g(x_1, \ldots, x_k)$ i $h(y, x_1, \ldots, x_k, z)$. Koja je uloga funkcije $g(x_1, \ldots, x_k)$?

(a) Ona predstavlja rekurzivni korak.

(b) Ona predstavlja bazni slučaj rekurzije (za $y = 0$).

(c) Ona ograničava maksimalan broj iteracija petlje.

29. Objasnite zašto je funkcija prethodnika $prev(x)$ primitivno rekurzivna. Kako glasi njena formalna definicija preko operatora primitivne rekurzije?

30. Objasniti zbog čega parcijalna funkcija koja je definisana pomoću minimizacije (μ-operatora) nad primitivno rekurzivnom funkcijom ne mora biti definisana za svaki ulaz? U kojim slučajevima neće biti definisana?

31. Šta tvrdi Klinijeva teorema o normalnoj formi?

32. Na osnovu $s-m-n$ teoreme (teoreme o parametrizaciji), ako fiksiramo deo ulaznih argumenata neke izračunljive funkcije, šta nam ta teorema garantuje?

    (a) Da će novodobijena funkcija uvek biti primitivno rekurzivna.

    (b) Da postoji primitivno rekurzivna funkcija koja izračunava kôd novog programa koji odgovara preostalim argumentima.

    (c) Da će novodobijena funkcija biti totalna.

33. Ukratko objasniti kako se u postupku kodiranja URM programa obezbeđuje jednoznačnost?

34. Da li se iz kôda e nekog URM programa može efektivnim postupkom (algoritamski) rekonstruisati kompletan spisak instrukcija tog programa? Odgovor obrazložiti.

35. Navedite jedan tipičan primer primene s-m-n teoreme u dokazima u teoriji izračunljivosti?

36. U Klinijevoj teoremi o normalnoj formi, svaka μ-rekurzivna funkcija se može predstaviti u obliku koji koristi samo jednu primenu operatora μ, tj. u obliku:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = P(\mu z[Q(x_1, \ldots, x_k, z) = 0])$$

    gde su P i Q primitivno rekurzivne funkcije. Koja je uloga funkcije P?

    (a) Ona simulira rad URM mašine korak po korak.

    (b) Ona iz kôda uspešnog završetka izračunavanja (z) izdvaja krajnji rezultat (sadržaj registra R_1).

    (c) Ona proverava da li je program sa indeksom e ušao u beskonačnu petlju.

37. Formulišite Kliniijevu teoremu o fiksnoj tački (teoremu o rekurziji).

38. Ako je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totalna izračunljiva funkcija koja transformiše kôdove programa, teorema o fiksnoj tački nam garantuje postojanje kôda n takvog da važi:

    (a) $h(n) = n$ (funkcija h bukvalno ne menja broj n).

    (b) $\phi_{h(n)} = \phi_n$ (programi sa indeksima $h(n)$ i n izračunavaju istu funkciju).

    (c) $\phi_n(x) = h(x)$ za svako x.

39. Zašto je teorema o fiksnoj tački konceptualno važna za programiranje?

40. Napisati URM program koji udvostručuje vrednost na ulazu ($f(x) = 2x$).

Problemi odlučivanja

1. Kako se problem odlučivanja (gde je odgovor ,,da” ili ,,ne”) formalno reprezentuje u teoriji izračunljivosti? Preko kog matematičkog objekta?

2. Šta intuitivno znači kada za neki problem kažemo da je ,,poluodlučiv”? Kako

se ponaša algoritam (URM program) za proveru pripadnosti tom skupu ako mu prosledimo element koji *ne pripada* skupu?

3. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ skup. Kako definišemo karakterističnu funkciju skupa A, u oznaci $\chi_A(x)$? Šta treba da važi za tu funkciju da bi skup A bio rekurzivan?
4. Da li je karakteristična funkcija $\chi_A(x)$ rekurzivnog skupa A uvek totalna funkcija?
   (a) Da
   (b) Ne
5. Da li postoji algoritam (URM program) koji za bilo koji dati URM program P i bilo koji ulaz x može da utvrdi da li će program P ispisati nulu u registru R_1? Obrazložiti odgovor (na osnovu koje teoreme to znamo?)
6. Koje od sledećih svojstava URM programa predstavlja semantičko svojstvo na koje se može primeniti Rajsova teorema?
   (a) "Program P sadrži tačno 5 instrukcija skoka."
   (b) "Program P računa totalnu funkciju $f(x) = x^2$."
   (c) "Program P koristi registar R_{10} tokom rada."
7. Neka je $A = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna funkcija}\}$. Da li je skup A rekurzivno nabrojiv?
   (a) Da
   (b) Ne
8. Ako je skup A rekurzivan (odlučiv), a skup B se dobija kao komplement skupa A, šta možemo zaključiti o skupu B?
   (a) Skup B je rekurzivno nabrojiv, ali nije rekurzivan.
   (b) Skup B je takođe rekurzivan (odlučiv).
   (c) Skup B je neodlučiv.
9. Formulišite Rajsovu teoremu.
10. Da li je relacija $T(e, x, y)$, koja označava da se program sa kôdom e za ulaz x zaustavlja nakon najviše y koraka, odlučiva? Odgovor obrazložiti.
11. Opšti problem zaustavljanja („$\phi_x(y) \neq -$?") je neodlučiv. Koji od sledećih problema su takođe garantovano neodlučivi:
    - „$\phi_x(x) \neq -$?"
    - „$\phi_x(c) \neq -$?" za neku fiksiranu konstantu c
    - „$\phi_c(x) \neq -$?" za neku fiksiranu konstantu c
12. Polukarakteristična funkcija skupa A, u oznaci $\overline{\chi}_A(x)$, za $x \notin A$ ima vrednost:
    (a) 0
    (b) -1
    (c) Nedefinisana je
13. Definišite kada za skup $A \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da je polurekurzivan (rekurzivno nabrojiv)?
14. Da li je svaki rekurzivan skup ujedno i rekurzivno nabrojiv? Obrazložiti odgovor.
15. Ako je skup A polurekurzivan, ali ne i rekurzivan, kakav je njegov komplement B?
    (a) Takođe je rekurzivno nabrojiv.
    (b) Može biti rekurzivno nabrojiv, ali nije rekurzivan.
    (c) Nije rekurzivno nabrojiv.

16. Šta tvrdi Postova teorema?
17. Rajsova teorema se bavi odlučivošću svojstava kojih objekata?
    (a) Sintaksne strukture URM programa (npr. broj instrukcija).
    (b) Funkcija koje URM programi izračunavaju (semantička svojstva).
    (c) Vremenske složenosti izvršavanja programa.
18. Navedite jedan primer netrivijalnog semantičkog svojstva programa na koje se može primeniti Rajsova teorema.
19. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$. Znamo je da je skup A rekurzivno nabrojiv ako i samo ako postoji izračunljiva funkcija f takva da je $A = dom(f)$. Kako iz te funkcije f eksplicitno konstruišemo polukarakterističnu funkciju $\overline{\chi}_A(x)$?
20. Zbog čega se za polurekurzivne skupove kaže i da su ,,rekurzivno nabrojivi"?
21. Ukratko skicirati ideju dokaza Postove teoreme (bez tehničkih detalja).
22. Definišimo skup $K_0 = \{\pi(e,x) \mid \phi_e(x) \neq -\}$, gde je $\pi(e,x)$ kôd para (e,x) prirodnih brojeva. Ako sa $\overline{K_0}$ označimo komplement ovog skupa, koje od sledećih tvrđenja je tačno?
    (a) K_0 je rekurzivno nabrojiv, a $\overline{K_0}$ nije rekurzivno nabrojiv.
    (b) K_0 nije rekurzivno nabrojiv, a $\overline{K_0}$ jeste rekurzivno nabrojiv.
    (c) Nijedan od ta dva skupa nije rekurzivno nabrojiv.
23. Neka je $A = \{e \mid \text{program } P_e \text{ sadrži najviše 10 instrukcija}\}$. Da li se Rajsova teorema može primeniti na ovaj skup kako bi se dokazala njegova neodlučivost? Obrazložiti odgovor.
24. U kontekstu Rajsove teoreme, šta formalno znači da je svojstvo funkcija $\mathcal{F}$ *netrivijalno*?
25. Neka je $T = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$. Primenom Rajsove teoreme ili nekako drugačije, dokazati da ovaj skup nije rekurzivan.
26. Za skup $T = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$ važi da:
    (a) Jeste rekurzivno nabrojiv, ali nije rekurzivan.
    (b) Nije rekurzivno nabrojiv, ali je njegov komplement $\overline{T}$ rekurzivno nabrojiv.
    (c) Ni on, ni njegov komplement nisu rekurzivno nabrojivi.
27. Neka je $f(e,x,s)$ funkcija koja vraća 1 ako se program e na ulazu x zaustavlja u tačno s koraka, a 0 u suprotnom. Ova funkcija je:
    (a) Primitivno rekurzivna.
    (b) μ-rekurzivna, ali nije totalna.
    (c) Dokazano neizračunljiva.
28. Zaokružiti tačne odgovore:
    (a) problem zadovoljivosti u iskaznoj logici je odlučiv
    (b) problem tautologičnosti (valjanosti) u iskaznoj logici je odlučiv
    (c) problem $\Gamma \models A$ u iskaznoj logici je odlučiv ako je Γ konačan skup
    (d) problem $\Gamma \models A$ u iskaznoj logici je odlučiv ako je Γ beskonačan skup.
29. Ako je Γ proizvoljni beskonačan rekurzivan skup iskaznih formula, a A je proizvoljna iskazna formula, tada znamo da problem $\Gamma \models A$ nije odlučiv, ali da jeste poluodlučiv. Na osnovu čega tvrdimo njegovu poluodlučivost?

30. Koja je osnovna ideja na kojoj se bazira Tjuringov dokaz neodlučivosti problema valjanosti u logici prvog reda?

31. Zaokružiti tačno tvrđenje:

    (a) Problem zadovoljivosti formule prvog reda je poluodlučiv

    (b) Problem *nezadovoljivosti* formule prvog reda je poluodlučiv

    (c) I problem zadovoljivosti i problem nezadovoljivosti formule prvog reda su poluodlučivi, ali nisu odlučivi

    (d) Ni problem zadovoljivosti ni problem nezadovoljivosti formule prvog reda nisu poluodlučivi.