АНАЛИЗА 1

Практикум 1: Елементарне функције

1. Рационалисати изразе (тј. трансформисати их тако да се у имениоцима разломака не појављују корени): $\frac{10}{3\sqrt[3]{5}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+1}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}$; $\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$.

2. Решити једначине:

   (а) $|5x+2|+x=19$;

   (б) $|1+x|-|x-1|=0$; $|x+8|+|x-2|=10$;

   (в) $|2-x|-|x-4|=|x-6|$;

   (г) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{4+4x+x^2}$;

   (д) $|x+2|+\sqrt{4x^2+8x+4}=|x+1|$;

   (ђ) $\sqrt{4x^2-12x+9}=2x-3$; $|x|+|x-1|=3$.

3. Решити неједначине:

   (а) $|x|\leq 3$; $|x|\geq 4$;

   (б) $|x-2|\leq 6$; $|3x+4|>4$;

   (в) $|2x-3|<x$; $|x-2|\leq|x+4|$;

   (г) $|x+2|>|x|$; $|x-2|>|x+1|-1$;

   (д) $||x|-3|\leq 1$; $||x+2|-|x-2||<1$.

4. Нацртати графике функција:

   (а) $y=|2x+1|-|x-2|$;

   (б) $y=|2x-1|-|x+2|$.

5. Одредити вредност параметра m за коју ће оба решења једначине $4x^2-2(m+1)x+m^2-3m-1=0$ бити једнака.

6. Одредити екстремне вредности функција $f(x,y)=x^2+3xy+\frac{5}{2}y^2-\frac{1}{2}y$ и $g(x,y)=x^4+y^4-4xy$

7. Одредити екстремне вредности реалних функција уколико постоје: $3x+2$; x^2+3x+3; $x^2+4x+\sqrt{3}$; x^2+x; $-2x^2+3x-1$. Испитати знак и нацртати графике ових функција.

8. Доказати неједнакости ($a,b,x\in\mathbb{R}$):

   (а) $a^2+b^2\geq 2ab$; $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$;

   (б) $x^2+2x+1\geq 0$; $x^2+x+1>0$.

АНАЛИЗА 1

Практикум 2: Елементарне функције

1. Из дефиниције извести следеће особине логаритма: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$, $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ $(a, b, c > 0)$.

2. Израчунати логаритме: $\log_3 243$, $\log_5 \frac{1}{125}$, $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$, $\log_{27} 81$ и $\log_{10} \frac{1}{\sqrt{1000}}$.

3. Упростити изразе $\ln \sqrt[4]{\frac{ab^5\sqrt{c^3}}{(a-b)^7}}$, $\ln \frac{\sqrt{ab^3c^5}}{\sqrt[3]{de^2f^5}}$.

4. Одредити домене функција:

   (а) $f(x) = \sqrt{\log_2 (x^2 - 5x + 6) - 1}$;

   (б) $f(x) = \ln\left(\log_3 \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1}\right)$.

5. Користећи адиционе формуле, доказати следеће идентитете:

   (а) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$; $\cos\gamma + \cos\delta = 2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$;

   (б) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$; $\cos\gamma - \cos\delta = -2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2}$;

   (в) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$; $\sin\gamma + \sin\delta = 2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$;

   (г) $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

   (д) $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$;

   (ђ) $\mathrm{tg}\ (\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$.

6. Написати у облику производа следеће изразе: $\sin x + \cos x$, $2\sin x - 3\cos x$, $1 - \sqrt{2}\cos\alpha + \cos 2\alpha$, $2\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1$.

7. Одредити области дефинисаности следећих функција:

   (а) $f(x) = \arcsin\sqrt{x^2 + x + 1}$;

   (б) $f(x) = \mathrm{arctg}\ (\arcsin(\ln\frac{x+3}{x+1}))$.

АНАЛИЗА 1

Практикум 3: Елементарне функције

1. Скицирати графике функција:

   (а) $y = x^2 - 4x + 3$; $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 6$;

   (б) $y = |x^2 + x|$; $y = |-x^2 + x| - x$;

   (в) $y = x^2 - 4|x| + 3$; $y = (3 - x)|x + 1|$;

   (г) $y = -|x^2 + 2x - 3| + x - 1$;.

2. Одредити домене и скицирати графике функција:

   (а) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{1-x}$; $y = \frac{1}{1-x^2}$;

   (б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x)$; $y = \log_2 |x|$; $y = |\log_{\frac{1}{2}} x|$; $y = |\log_{\frac{1}{2}} |x||$;

   (в) $y = a^{\log_a x}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $y = \log_3(x+1)$; $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$; $y = \frac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}$; $y = 0,5\log_2(x-1)^2$.

3. Одредити периоде функција:

   (а) $f(x) = \sin 2x$; $f(x) = \operatorname{tg} 5x$;

   (б) $f(x) = a\sin(bx + \varphi)$, где су $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $\varphi \neq 0$ константе.

   (в) $f(x) = \sin 2x - \sin 5x$; $f(x) = \sin\frac{3x}{7} + \cos\frac{x}{7} + \operatorname{tg}\frac{2x}{5}$.

4. Испитати парност и непарност функција:

   (а) $f(x) = \frac{\operatorname{tg}\, x + \sin x}{\operatorname{ctg}\, x}$;

   (б) $f(x) = \sin x + \operatorname{cosec} x$;

   (в) $f(x) = \sin x - \cos x$;

   (г) $f(x) = 3^{|\sin x|}$.

5. Испитати ток и нацртати график функције:

   (а) $f(x) = \frac{3}{2} - \sin x$; $f(x) = -\cos 2x$;

   (б) $y = \sin\frac{x}{2}$; $f(x) = \operatorname{cosec} x$;

   (в) $f(x) = \frac{3}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

   (г) $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$;

   (д) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

   (ђ) $f(x) = \sin x + \cos x$; $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

АНАЛИЗА 1

Практикум 4: Ирационалне једначине и неједначине

1. Решити једначине:

   (а) $\sqrt{y+2}-\sqrt{y-6}=2$; $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$;

   (б) $\sqrt{\frac{x-5}{x+2}}+\sqrt{\frac{x-4}{x+3}}=\frac{7}{x+2}\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$;

   (в) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

   (г) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$;

   (д) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$;

   (ђ) $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$;

   (е) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}$.

2. У зависности од реалног параметра a, решити једначину:

   (а) $\sqrt{2-x}=-\frac{x}{2}+a$;

   (б) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$;

   (в) $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$.

3. Решити неједначине:

   (а) $\sqrt{x}>1$; $\sqrt{x}<1$; $\sqrt{x}>-1$; $\sqrt{x}<-1$;

   (б) $\sqrt{x^2-55x+250}<x-14$; $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+7x}>3$;

   (в) $\sqrt{x^2-x+1}<(x-1)^2+x^2$; $\frac{1-\sqrt{8x-3}}{4x}\geq 1$;

   (г) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-2}>\sqrt{4x-3}$; $\sqrt{3x^2-2x-1}\geq\sqrt{2x-2}$.

4. У зависности од реалног параметра a решити неједначину

$$\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}<\sqrt{2}.$$

5. Одредити области дефинисаности функција:

   (а) $f(x)=\ln\left(\log_6(\sqrt{x+78}-x)\right)$;

   (б) $f(x)=\sqrt{1+2x-\sqrt{x^2+3x+3}}$.

АНАЛИЗА 1

Практикум 5: Логаритамске и експоненцијалне једначине и неједначине

1. Решити једначине:

   (а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x}$;$(\sqrt{3})^{x^2-x} = 27$;

   (б) $3^{2x} - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$; $6 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 4^x = 0$; $|x+2|^{x^2+3x} = (x+2)^{x+15}$;

2. (а) Наћи број чији је логаритам за основу $\frac{1}{2}$ једнак 4.

   (б) Наћи x ако је $\log_x \frac{1}{8} = 3$.

3. Решити једначине:

   (а) $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$;

   (б) $\log_3(5 + 4\log_3(x-1)) = 2$; $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$;

   (в) $\log_4(x-2) + \log_{16}(x-2) + \log_2(x-2) = 7$; $\log_2(2^x+1) \cdot \log_2(2^{x+1}+2) = 2$;

   (г) $(\sqrt{x})^{\log_3 x - 1} = 3$; $\log_{2x} x + \log_{8x^2} x = 0$.

4. Решити неједначине:

   (а) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3 \frac{x+1}{x-1}\right) \geq 0$;

   (б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^x$;

   (в) $2^{x+2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$; $(1.25)^{1-x} < (0.64)^{2(1+\sqrt{x})}$;

   (г) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-7x}{2}} \geq 1$; $(x-3)^{2x^2-7x} > 1$;

   (д) $\log_2 \frac{x-1}{x+1} < 1$; $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3) \geq -3$; $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5)) > 0$; $\log_x \sqrt{x+12} > 1$.

5. Решити у скупу $[0, 2\pi]$ неједначину: $\log_{\mathrm{tg}\ x} \sin x - \log_{\mathrm{ctg}\ x} \cos x \geq 3$.

6. Доказати да је $a^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}$ за $a > 0, a \neq 1$ и $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

7. Доказати да за $a > 0,\ a \neq 1, x \neq 0$ важи $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$.

АНАЛИЗА 1

Практикум 6: Тригонометријске једначине и неједначине

1. Израчунати:
   (а) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$; $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$;
   (б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{3}\right)$; $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{8\pi}{3}\right)\right)$.

2. Решити по x једначине:
   (а) $\sin x = \sin\alpha$; $\cos x = \cos\alpha$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha$;
   (б) $\sin x = \cos x$; $\cos\pi x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2\sin 2x - 1 = 0$;
   (в) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$; $\sin 3x + \sin 12^\circ = 0$.

3. Да ли једначина $\sin x = \ln\sin x$ има решења?

4. Решити једначине:
   (а) $2\sin|x| - 1 = 0$; $\operatorname{tg}|x-2| = -1$;
   (б) $2\sin x\cos x - \sin x = 0$;
   (в) $\cos 3x + \cos 5x = 0$;
   (г) $\sin x + \cos x = 1 + \sin x\cos x$;
   (д) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
   (ђ) $\sin 3x + \cos 2x = 1$; $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2}\sin x\cos x$; $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

5. Решити неједначине:
   (а) $2\cos x + 1 < 0$; $\operatorname{tg}x - \sqrt{3} \le 0$;
   (б) $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} > 0$; $2\sin x + 1 > 0$;
   (в) $\sin x - \cos x > 0$;
   (г) $\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6} < \frac{1}{2}$;
   (д) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x > 0$;
   (ђ) $\cos x - \sin x < 1$; $\operatorname{tg} x - \sin x > 0$;
   (е) $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x \ge 1$;
   (ж) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$; $\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{4} < 0$;
   (з) $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} < 4\operatorname{tg} x$; $\sin 4x + \cos 4x\cdot\operatorname{ctg} 2x > 1$.

АНАЛИЗА 1

Практикум 7: Математичка индукција

1. Методом математичке индукције доказати једнакости:

   (а) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

   (б) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

   (в) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Дат је скуп са n елемената. Доказати да је број подскупова са k елемената једнак

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

   ($n! = 1 \cdot 2 \cdots n$; $0!$ је по дефиницији једнако 1)

3. Доказати следеће особине биномног коефицијента:

   (а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

   (б) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ за $n > 1$.

4. (Њутнова биномна формула) Ако су a и b реални бројеви, а n природан број, доказати да је

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{k}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{k}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

   (у последњем изразу сматрамо да је $\binom{n}{0} = 1$).

5. Извести формулу за $\sum_{k=1}^{n} k^4$ на следићи начин: Помоћу биномне формуле изразити $(n+1)^5 - n^5; n^5 - (n-1)^5; \ldots, 1^5 - 0^5$ и добијене изразе сабрати. Затим на десну страну применити добијене формуле из задатка 1.

6. Ако је n природан број, доказати неједнакости:

   (а) $2^n > n^2$, $n \geq 5$;

   (б) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, $n \geq 2$;

   (в) (Бернулијева неједнакост) Ако је $a > -1$, тада је $(1+a)^n \geq 1 + na$.

7. Доказати да за све природне бројеве n важи:

   (а) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

   (б) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, $n \geq 9$;

АНАЛИЗА 1

Практикум 8: Рекурентно задати низови

1. (а) Ако је $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ и $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, $n \geq 2$, доказати да је $a_n = 2^n + 1$, $n \geq 1$;

   (б) Ако је $a_{n+3} = -a_{n-2} + 17a_{n+1} - 15a_n$, $n \geq 0$ и $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, доказати да је $a_n = 3^n$.

2. Доказати да је збир првих n чланова аритметичког низа са првим чланом a_1 и разликом d једнак: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.

3. Наћи први члан и разлику аритметичког низа (a_n) у коме је $a_2 + a_5 - a_3 = 10$ и $a_2 + a_9 = 17$.

4. Нека су позитивни бројеви $a_1, \ldots, a_n$ узастопни чланови неког аритметичког низа. Доказати да је:

   (а) $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$;

   (б) $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$.

5. Доказати да је збир првих n чланова геометријског низа (b_n) чији је количник $q \neq 1$ једнак $S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

6. Израчунати збирове:

   (а) $1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n+1)q^n$;

   (б) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n$;

   (в) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$.

7. Доказати да су следећи низови периодични:

   (а) $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$, $n \geq 1$, $a, b \neq 0$, $a \neq -1$, $b \neq -1$, $a + b \neq -1$;

   (б) $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_n = x x_{n-1} x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $x \neq 0$.

АНАЛИЗА 1

Практикум 9: Диференцне једначине

1. Решити диференцне једначине:
   (а) $x_{n+1} = -\frac{1}{10}x_n,\ n \geq 0,\ x_0 = a,\ a \in \mathbb{R}$;
   (б) $x_{n+1} = x_n + 8n,\ n \in \mathbb{N},\ x_1 = 1$;
   (в) $x_{n+1} = x_n + 2n - 2,\ n \geq 0,\ x_0 = 2$;
   (г) $x_{n+1} = x_n + a^{n+1},\ n \in \mathbb{N},\ x_1 = 1,\ a \neq 1$;
2. Израчунати збир $S_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n},\ n \in \mathbb{N}$.
3. Одредити експлицитан израз за Фибоначијеве бројеве, тј. наћи онај низ (f_n) који задовољава рекурентну релацију $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,\ \ n \in \mathbb{N}$ и почетне услове $f_1 = f_2 = 1$.
4. Одредити решење диференцне једначине $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n,\ n \in \mathbb{N}$ које задовољава услове:
   (а) $a_1 = 5,\ a_2 = 13$;
   (б) $a_1 = 5,\ a_2 = 19$;
   (в) $a_1 = 2,\ a_2 = -2$.
5. Решити диференцне једначине:
   (а) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n,\ n \geq 0,\ a_0 = 3,\ a_1 = 1$;
   (б) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1,\ n \in \mathbb{N}$;
   (в) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n,\ n \in \mathbb{N},\ a_1 = 4,\ a_2 = 12$;
   (г) $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1},\ n \geq 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 7$;
   (д) $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}),\ n \geq 2,\ a_0 = a,\ a_1 = b,\ a, b \in \mathbb{R}$;
   (ђ) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 4x_n,\ n \geq 0,\ x_0 = 1, x_1 = 1$.
6. Решити системе диференцних једначина:
   (а) $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n,\ b_{n+1} = a_n + 2b_n,\ n \in \mathbb{N},\ a_1 = 2,\ b_1 = 1$;
   (б) $x_{n+1} = 2x_n - y_n,\ y_{n+1} = x_n + 4y_n,\ n \geq 0,\ x_0 = 2,\ y_0 = 1$.
7. Доказати да се решење диференцне једначине

   $$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

   за које је $a_1 = a,\ a \in \mathbb{R}$, где су p, q, r, s дати реални бројеви, може представити у облику $a_n = \frac{x_n}{y_n}$, при чему низови (x_n) и (y_n) представљају решење система диференцних једначина:

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= px_n + qy_n, \\ y_{n+1} &= rx_n + sy_n, \end{aligned} \qquad n \in \mathbb{N},$$

   за које је $x_1 = a,\ y_1 = 1$.
8. Користећи претходни задатак решити следеће диференцне једначине:
   (а) $a_{n+1} = \frac{1-4a_n}{1-6a_n},\ n \in \mathbb{N},\ a_1 = \frac{3}{5}$;
   (б) $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3},\ n \in \mathbb{N},\ a_1 = 0$;
   (в) $x_{n+1} = \frac{1+x_n}{1-x_n},\ n \geq 0,\ x_0 = 0$.

РЕШЕЊА И УПУТСТВА

1. Елементарне функције

1.
$$\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

Помножимо и бројилац и именилац са $\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. Добијамо да је дати разломак једнак

$$\frac{\left(\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{6}.$$

5. Оба решења ће бити једнака ако и само ако је дискриминанта једнака нули, односно (после скраћивања са 2) ако је $(m+1)^2=4(m^2-3m-1)$. Следи да је $m\in\{-\frac{1}{3},5\}$.

6. Функција $g(x)$ нема максимум, јер за $y=0$, погодним избором вредности за x, можемо постићи да функција узима произвољно велике реалне вредности. Међутим, функција има минимум, што се види из следећег представљања:

$$f(x,y)=x^4+y^4-2x^2y^2+2x^2y^2-4xy+2-2=(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2-2\geq -2,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x^2-y^2=0$ и $xy=1$, тј. за $(x,y)\in\{(1,1),(-1,-1)\}$.

2. Елементарне функције

4. (а) Поткорена величина мора бити позитивна, па мора бити: $\log_2\left(x^2-5x+6\right)-1>0$. То значи да је $x^2-5x+6>2$. У том случају је и логаритам дефинисан. Решење ове квадратне неједначине је $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

(б) Да би израз $\ln\left(\log_3\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1}\right)$ био дефинисан, мора бити $\log_3\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1}>0$, а то ће бити испуњено ако и само ако је $\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1}>1$. Као прво, закључујемо да поткорена величина мора бити позитивна, и одатле следи да је и $x>1$ (да би цео разломак био позитиван, бројилац и именилац морају бити истог знака). Решавањем једначине $x^2+3x+2>0$ добијамо да је $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$, што заједно са условом $x>1$, даје $x>1$. Сада је потребно да буде $\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1}>1$. Пошто је $x-1>0$ и леву и десну страну неједнакости смемо помножити тим бројем а да се знак неједнакости не промени. Добијамо неједначину $\sqrt{x^2+3x+2}>x-1$ коју смемо и да квадрирамо јер су обе стране позитивне. Долазимо до неједначине $3x+2>-2x+1$, чије је решење $x>-\frac{1}{5}$. Дакле, домен функције f је $(1,+\infty)$.

6. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right);$

$1-\sqrt{2}\cos\alpha+\cos 2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sqrt{2}\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\sqrt{2}\cos\alpha(\sqrt{2}\cos\alpha-1);$
$2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1=2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\sqrt{3}\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=$
$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha-\frac{1}{2}\cos 2\alpha)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$

7. (а) Функција $\arcsin t$ је дефинисана за $t\in[-1,1]$. Пошто је корен увек позитиван, закључујемо да је $\sqrt{x^2+x+1}\leq 1$. Поткорена величина је увек позитивна (дискриминанта је мања од 0), па ову неједначину можемо да квадрирамо без промене знака. Добијамо њој еквивалентну $x^2+x\leq 0$ чије је решење $x\in[-1,0]$. Дакле, $D=[-1,0]$.

(б) Домен функције arctg је цео скуп реалних бројева, па је домен функције f једнак домену функције $\arcsin\left(\ln \frac{x+3}{x+1}\right)$. Мора бити $\ln \frac{x+3}{x+1} \in [-1,1]$, односно $\frac{x+3}{x+1} \in [\frac{1}{e}, e]$. Сада је једначина домена постала: $\frac{1}{e} \leq \frac{x+3}{x+1} \leq e$. Ако бисмо хтели да ову неједначину помножимо са $x+1$, морали бисмо да водимо рачуна о томе да ли је тај израз позитиван, или негативан. На тај начин би требало разматрати два случаја. Мање посла ћемо имати, ако једначину помножимо позитивним бројем $(x+1)^2$. Ту само морамо водити рачуна да овај број буде $\neq 0$. Према томе, мора бити $x \neq -1$ (дакле -1 није из домена функције). Неједначина постаје $\frac{1}{e}(x+1)^2 \leq (x+3)(x+1) \leq e(x+1)^2$. Десна неједначина се еквивалентно трансформише у $(e-1)x^2 + 2(e-2)x + (e-3) \geq 0$, тј.

$$((e-1)x + e - 3)(x+1) \geq 0. \tag{1}$$

Лева неједначина се трансформише, на сличан начин у $\left(\left(\frac{1}{e} - 1\right)x + \frac{1}{e} - 3\right)(x+1) \leq 0$. Ако последњу неједначину помножимо са $-e$, добијамо

$$((e-1)x + 3e - 1)(x+1) \geq 0. \tag{2}$$

Решење прве једначине је $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{3-e}{e-1}, +\infty\right)$, а друге је $x \in \left(-\infty, -\frac{3e-1}{e-1}\right] \cup [-1, +\infty)$. Домен функције f је кад се од пресека ова два скупа одузме $\{-1\}$:

$$D = \left(-\infty, \frac{1-3e}{e-1}\right] \cup \left[\frac{3-e}{e-1}, +\infty\right).$$

3. Елементарне функције

3. (в) Треба да нађемо најмањи позитиван реалан број T тако да буде $f(x+T) = f(x)$, односно $\sin(2x+2T) - \sin(5x+5T) = \sin 2x - \sin 5x$. То мора да важи за свако x. Стављањем $x = 2\pi$, добијамо: $\sin 2T - \sin 5T = 0$, а стављањем $x = \pi$, добијамо $\sin 2T + \sin 5T = 0$, одакле закључујемо да је $\sin 5T = 0$ и $\sin 2T = 0$. Одавде следи да је $T = k\pi$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Замењивањем у полазну једначину добијамо да је $\sin(2x+2k\pi) - \sin(5x+5k\pi) = \sin 2x - \sin 5x$ еквивалентно са $\sin 2x - (-1)^k \sin 5x = \sin 2x - \sin 5x$. Да би ово важило за свако x, k мора бити паран број. Најмање такво k је 2. Лако се проверава да је $T = 2\pi$ заиста период ове функције f;

У другом задатку функција није дефинисана за $\frac{2x}{5} \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, доносно за $x \in \left\{\frac{5\pi}{4} + \frac{5}{2}k\pi\right\}$. Због тога T мора бити целобројни умножак броја $\frac{5}{2}\pi$. Али, тада је функција tg $\frac{2x}{5}$ периодична, па је још потребно пронаћи оно T које поред услова да је $T = \frac{5}{2}l\pi$ за неко $l \in \mathbb{N}$ задовољава и услов

$$\sin\left(\frac{3x}{7} + \frac{3T}{7}\right) + \cos\left(\frac{x}{7} + \frac{T}{7}x\right) = \sin\frac{3x}{7} + \cos\frac{x}{7}.$$

Замењивањем $x = 14\pi$ и $x = \frac{14\pi}{3}$ добијамо једначине

$$\sin\frac{3T}{7} + \cos\frac{T}{7} = 1 \tag{1}$$

$$\sin\frac{3T}{7} + \cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{T}{7} - \sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{T}{7} = \cos\frac{2\pi}{3} \tag{2}$$

Замењивањем једначине (1) у једначину (2) добијамо $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\cos\frac{T}{7} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{T}{7}$, односно $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{T}{7} + \frac{\pi}{3}\right)$. Решења ове једначине у $(0, 2\pi]$ су $\frac{T}{7} = \frac{\pi}{3}$ и $\frac{T}{7} = 2\pi$. Ако је $\frac{T}{7} = \frac{\pi}{3}$, онда је $\sin\left(\frac{3x}{7} + \pi\right) + \cos\left(\frac{x}{7} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{3x}{7} + \cos\frac{x}{7}$ за свако x. Међутим, већ за $x = 0$ то не важи. Према томе, $\frac{T}{7} = 2m\pi$. За свако $m \in \mathbb{N}$ ово јесте период функције $\sin\frac{3x}{7} + \cos\frac{x}{7}$, па још само треба изабрати m тако да буде и $T = \frac{5}{2}l\pi$ за неко $l \in \mathbb{N}$. То значи да је $14m = \frac{5}{2}l$. Најмање m које ово задовољава је $m = 5$. Закључујемо да је $T = 70$.

5. (д) Искористити да је $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

4. Ирационалне једначине и неједначине

1. (а) $y=7$; $x=6$.

   (б) Да би корени били дефинисани, мора бити $x\in[-3,5)^C=(-\infty,-3)\cup[5,+\infty)$. Пошто је лева страна позитивна, мора бити и десна, па је $x\geq -2$. Због тога је $x\geq 5$. Сада и лева и десна страна могу да се помноже са $\sqrt{(x-4)(x+2)}$ и квадрирају. Добија се

   $$\sqrt{(x-5)(x+3)}+\sqrt{(x-4)(x+2)}=7.$$

   Уведимо смену $z=\sqrt{(x+2)(x-4)}$. Тада једначина постаје $\sqrt{z^2-7}+z=7$. Решење ове једначине је $z=4$. Из $(x-4)(x+2)=16$ добијамо $x=6$ или $x=-4$, али само $x=6$ задовољава услов $x\geq 5\rightarrow x=6$.

   (в) $x\in[5,10]$.

   (г) Мора бити $x\leq a^2$, $x\leq b^2$ и $a+b\geq 0$. Под тим условима можемо квадрирати и леву и десну страну. Добијамо да је једначина еквивалентна са: $a^2+b^2-2x+2\sqrt{a^2b^2-(a^2+b^2)x+x^2}=a^2+b^2+2ab$. Сређивање последње једначине доводи до:

   $$\sqrt{a^2b^2-x(a^2+b^2)+x^2}=ab+x.$$

   Лева страна је позитивна, па мора бити $x\geq -ab$. Под том претпоставком можемо квадрирати и леву и десну страну. Добијамо: $x(a+b)^2=0$. Ако је $a+b=0$, тада је $a=-b$, што уз услов $x\geq -ab$ даје $x\geq a^2$. Како је и $x\leq a^2$, добијамо да је $x=a^2$. У том случају се лако проверава да ово заиста јесте решење дате једначине. Ако је $a+b\neq 0$, једино $x=0$ може да буде решење полазне једначине. Замењивањем $x=0$ у полазну једначину, добијамо $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b$, односно $|a|+|b|=a+b$, што јесте тачно само у случају $a,b\geq 0$. Дакле решење једначине је:

   $$x=\begin{cases}0, & a,b\geq 0\\ a^2, & a=-b\\ \text{нема решења}, & \text{иначе.}\end{cases}$$

   Једначина $\sqrt{x-a}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$ може имати решења само при услову $a+b\geq 0$. Лако се добија да су, у том случају, једина решења $x=a$ и $x=-b$.

   (д) И леву и десну страну степенујемо са 3. Добијамо $3x-3+3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3})=12(x-1)$. Када ову једначину поделимо са 3 и искористимо да је $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12x-1}$, добијамо да је полазна једначина еквивалентна са: $\sqrt[3]{12x(2x-3)(x-1)}=3(x-1)$. Степеновањем са 3 добијамо $12x(2x-3)(x-1)=27(x-1)^3$, односно $(x-1)(9x^2-18x+9-8x^2+12x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x-3)^2=0$. Решења су $x=1$ и $x=3$.

   Друга једначина се решава на сличан начин и добија се да је скуп њених решења једнак $\left\{8,8-\frac{12\sqrt{21}}{7},8+\frac{12\sqrt{21}}{7}\right\}$.

   (ђ) Поткорени изрази могу да се лепо раставе на чиниоце. Под условом да су они дефинисани (а тај услов се лако одређује), једначина може да се квадрира... Решења су $x=-1$ и $x=5$.

   Друга једначина се слично решава: $x=2$ и $x=4$

   (е) Квадрирањем (под условом да су коренови дефинисани) добијамо:

   $$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=0\Rightarrow x-\frac{1}{x}=0\ \text{ и }\ (x^2+x)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

   Закључујемо да је $x=-1$, и то јесте решење.

2. (а) Као прво мора бити $x \leq 2$ и $x \leq 2a$. Полазна једначина је еквивалентна са $\sqrt{2-x} = \frac{2-x}{2} + a - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2-x}-1)^2 = 3-2a$. Сада добијамо и услов $3-2a \geq 0$, односно $a \leq \frac{3}{2}$. Решења последње једначине су $x = 2a-2 \pm 2\sqrt{3-2a}$. Треба још да проверимо да ли ова решења задовољавају добијене услове. Први услов $x \leq 2$ задовољава и веће решење $2a-2+2\sqrt{3-2a}$, јер се при услову $a \leq \frac{3}{2}$ неједнакост $\sqrt{3-2a} \leq 2-a$ може квадрирати и добити да је она еквивалентна са $(a-1)^2 \geq 0$. Треба да испитамо да ли ова решења задовољавају $x \leq 2a$. Решење $2a-2-2\sqrt{3-2a}$, очигледно задовољава овај услов. Размотримо сада релацију $2a-2+2\sqrt{3-2a} \leq 2a$. Она је еквивалентна са $\sqrt{3-2a} \leq 1$, односно, после дозвољеног квадрирања, $3-2a \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$. Дакле:

$$x = \begin{cases} 2a-2-2\sqrt{3-2a}, & \text{за } a < 1 \\ 2a-2 \pm \sqrt{3-2a}, & \text{за } 1 \leq a \leq \frac{3}{2} \\ \text{нема решења}, & a > \frac{3}{2} \end{cases}$$

(б) Закључујемо да је $x \geq 0$, $a \geq \sqrt{a+x} \Rightarrow a^2 - a \geq x \geq 0 \Rightarrow a = 0$ или $a \geq 1$. За $a = 0$, x мора бити 0, и провером се утврђује да $x = 0$ при овом услову заиста јесте решење. Претпоставимо да је $a \geq 1$. У том случају полазна једначина може да се квадрира. Добија се: $a - \sqrt{a+x} = x^2 \Leftrightarrow a + x - x^2 = x + \sqrt{a+x} \Leftrightarrow (\sqrt{a+x}+x)(\sqrt{a+x}-x) = x + \sqrt{a+x}$. Пошто је $x + \sqrt{a+x} > 0$ можемо скратити и леву и десну страну. Добијамо: $\sqrt{a+x} = x+1 \Rightarrow x^2+2x+1 = a+x \Leftrightarrow x^2+x+1-a = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$. Пошто мора бити $x > 0$, добијамо $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$ за $a \geq 1$.

(в) Једначина се једноставно решава степеновањем са 3. Решења су $x = 0$ и $x = \frac{63}{65}a$.

3. (а) $(1, +\infty)$; $[0, 1)$; $[0, +\infty)$; $\emptyset$.

(б) $x \geq 50$; $[0, 5]$.

(в) Неједначинаје еквивалентна са $\sqrt{x^2-x+1} < 2(x^2-x)+1$. Нека је $t = x^2 - x$. Пошто су обе стране веће од 1, можемо квадрирати неједначину. Добијамо: $t + 1 < 4t^2 + 4t + 1 \Leftrightarrow t(4t+3) > 0$. Одавде закључујемо да је $t > 0$ или $t < -\frac{3}{4}$. Случај $t < -\frac{3}{4}$ је немогућ, а за $t > 0$ је $x < 0$ или $x > 1$. Дакле, решење је $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$;
Друга једначина нема решења: Из $8x > 3$ закључујемо да је и $x > 0$, па моземо и леву и десну страну да помножимо са $4x$. Једначина постаје: $1 - 4x \geq \sqrt{8x-3}$. Добијамо да је $\frac{3}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$, што је немогуће.

(г) Прва једначина нема решења јер је $4x - 3 > 3x - 5$ за оне x-еве за које су дефинисане поткорене величине; Решење друге неједначине је $[1, +\infty)$.

4. Мора бити $a > 0$, $x > 0$ и $\sqrt{x} > a$. Квадрирањем се добија: $2a + 2\sqrt{a^2-x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-x} < 1 - a \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a^2 - x < a^2 - 2a + 1 \Rightarrow x > 2a - 1$. То значи да је $0 \leq x \leq a^2$ за $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, а $2a - 1 < x \leq a^2$ за $\frac{1}{2} < a < 1$

5. (а) $D = [-78, 3)$;

(б) $x^2 + 3x + 3 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Треба још да буде $1 + 2x \geq \sqrt{x^2+3x+3}$. То значи да је $1 + 2x \geq 0$ и $1 + 4x + 4x^2 > x^2 + 3x + 3$. Решење друге неједначине је скуп $(-\infty, -1] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$. Пресек са скупом $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ чини тражени домен $D = [\frac{2}{3}, +\infty)$.

5. Логаритамске и експоненцијалне једначине и неједначине

1. (в) Пошто је домен функције $(x+2)^{x+15}$ једнак $(-2, +\infty)$, закључујемо да се уз ову претпоставку може обрисати апсолутна заграда. Добијамо
$(x+2)^{x^2+3x} = (x+2)^{x+15}$, па је $x^2 + 3x = x + 15$. Решења ове једначине су $x = -5$ и $x = 3$, међутим само ово друго задовољава услов $x > -2$, па је једино решење $x = 3$.

2. (а) $\frac{1}{16}$.

6. Тригонометријске једначине и неједначине

5. (ж) Сви квадратни триноми се лепо растављају.

   (з) У првој неједнакости за $x \neq k\pi$, можемо и леву и десну страну помножити са $\cos^2 x$. Добијамо $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, односно $2x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$.

   Као прво, мора бити $\sin 2x \neq 0$, односно $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Под тим условима је $\sin 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}(\sin 2x \sin 4x + \cos 2x \cos 4x) = \frac{1}{\sin 2x}\cos(4x - 2x) = \operatorname{ctg} 2x > 1$. То значи да $2x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$, односно $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right) + \frac{k\pi}{2}$.

8. Рекурентно задати низови

6. (а) Означимо

$$S = 1 + 3q + 5q^2 + \cdots + (2n+1)q^n. \tag{1}$$

   Тада је

$$qS = q + 3q^2 + 5q^3 + \cdots + (2n+1)q^{n+1}. \tag{2}$$

   Из (1) и (2) добијамо да је $S - qS = (1-q)S = 1 + 2q + 2q^2 + \cdots + 2q^n - (2n+1)q^{n+1}$, односно $(1-q)S = 1 + 2q\frac{1-q^n}{1-q} + (2n+1)q^{n+1}$.

9. Диференцне једначине

1. (а) $x_n = c \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^n$. За $n = 0$ мора бити $x_0 = a$, одакле добијамо $c = a$. Према томе, $x_n = a \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^n$.

   (б) Решење одговарајуће хомогене једначине је $X_n = c$. Партикуларно решење нехомогене једначине потражимо у облику: $p_n = \alpha n^2 + \beta n$. Замењивањем овог израза у једначину $p_{n+1} = p_n + 8n$, закључујемо да је $\alpha = 4$ и $\beta = -4$. То значи да је решење облика $x_n = c + 4n^2 - 4n$. Како је $x_1 = 1$, добијамо да је $c = 1$, што значи да је $x_n = (2n-1)^2$

   (в) Поступамо као у претходном задатку. Решење хомогене једначине је $X_n = c$, а партикуларно решење се тражи у облику $p_n = \alpha n^2 + \beta n$. Када то уврстимо у једначину $p_{n+1} = p_n + 2n - 2$, добијамо да је $\alpha = 1$ и $\beta = -3$. Опште решење је $x_n = c + n^2 - 3n$. Коефицијент c одређујемо из услова $x_0 = 2$. Добијамо $c = 2$, и коначно, $x_n = n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$.

   (г) Решење хомогене једначине је $x_n = c$. Партикуларно решење нехомогене једначине потражимо у облику $p_n = \alpha a^n$. Замењивањем у полазну једначину добијамо: $\alpha a^{n+1} = \alpha a^n + a^n$, односно $(\alpha a - \alpha - 1)a^n = 0$. Изаберимо α тако да буде $\alpha a - \alpha - a = 0$, односно $\alpha = \frac{a}{a-1}$. Решење полазне једначине је $x_n = c + \frac{a^{n+1}}{a-1}$. Заменом почетног услова добијамо $1 = c + \frac{a^2}{a-1}$ и $c = \frac{a^2-a+1}{1-a}$. Решење једначине је $x_n = \frac{a^2-a+1-a^{n+1}}{1-a}$.

2. $S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Решење хомогене једначине $S_{n+1} = S_n$ је $S_n = c$, за неку реалну константу c. Партикуларно решење ћемо потражити у облику $P_n = \frac{an+b}{3^n}$. Из једначине $\frac{a(n+1)+b}{3^{n+1}} == \frac{3an+3b+n+1}{3^{n+1}}$ изједначимо коефицијенте уз n и слободне чланове и добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} a &= 3a + 1 \\ a + b &= 3b + 1 \end{aligned}$$

   из кога одређујемо $a = -\frac{1}{2}$ и $b = -\frac{3}{4}$. Одавде је $S_n = c - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$. Из услова $S_1 = \frac{1}{3}$, добијамо да је $c = \frac{3}{4}$. Одавде следи $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.