

1 Додатак

Напомена. Овде се налазе задаци који су рађени на вежбама који се НЕ налазе у заједничком материјалу.

1.1 Рационалисање. Апсолутна вредност. Квадратна функција.

Задатак. Нека су a и b рационални бројеви такви да важи $b = (a + 4 + \sqrt{3})(-a - \sqrt{3})$. Колико износи $a + b$?

Задатак. Доказати неједнакости ($a, b, x, y \in \mathbb{R}$).

(а) $a^2 + b^2 \leq 2ab$

(б) $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca$

(в) $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

Задатак. Решити једначину $\sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - 8}} + \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - 8}} = 3$

Задатак. За које $a \in \mathbb{R}$ једначина $x - a = 2|2\sqrt{x^2 - a^2}|$ има максималан број решења?

Задатак. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ наћи број решења једначине

$$\sqrt{(x-6)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = a$$

Задатак. Рационалисати израз

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$$

1.2 Експоненцијална и логаритамска функција

Задатак. Наћи x ако је $\log_4 x + \log_{16} x + \log_2 x = 7$.

Задатак. Ако је $\log_{10} 2 = a$ и $\log_{10} 3 = b$, одредити $\log_9 20$.

Задатак. Ако је $\log_3 5 = a$ и $\log_5 7 = b$, наћи $\log_{105} 405$.

Задатак. Наћи $\log_{ab} \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, ако је $\log_{ab} a = 20$, $a, b > 0$, $ab \neq 1$.

1.3 Тригонометријске функције

Задатак. Израчунати $\cos \frac{\pi}{8}$.

Задатак. Израчунати $\sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

1.4 Графици и особине елементарних функција

Задатак. Одредити период функције $f(x) = \sin \frac{3x}{7} + \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{2x}{5}$.

Задатак. Ако је $f(x) = \cos x + \cos a_1x + \dots + \cos a_nx$ периодична, доказати да су a_1, \dots, a_n рационални.

1.5 Ирационалне једначине и неједначине

Задатак. Наћи број решења једначине $\sqrt[4]{x^4 + 1} + \sqrt[4]{x^4 - 1} = 1$.

1.6 Логаритамске и експоненцијалне једначине и неједначине

Задатак. Наћи скуп решења неједначине $\log_x(x^3 + 1) \log_{x+1} x > 2$.

1.7 Тригонометријске једначине и неједначине

Задатак. Доказати да за $x_1 \neq x_2$ на интервалу $(0, \pi)$ важи неједнакост

$$\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2}$$

1.8 Математичка индукција

Задатак. Доказати да је у сваком друштву број људи који се познају са непарним бројем људи - паран.

Задатак. Доказати да се n квадрата могу исећи на делове тако да се од њих може саставити нови квадрат.

1.9 Комбинаторика

Задатак. Колико има петоцифрених бројева у чијем запису нема цифара 6, 7, 8, 9?

Задатак. Колико има петоцифрених бројева у чијем запису нема понављања цифара?

Задатак. На колико начина 8 ученика могу поделити 8 различитих књига, тако да сваки ученик добије једну књигу?

Задатак. На колико начина од 10 различитих сувенира туриста може купити 3 различита сувенира?

Задатак. Колико има седмоцифрених бројева у чијем запису се три пута појављује цифра 1 и по два пута цифре 2 и 3?

Задатак. Колико се различитих речи може добити пермутовањем слова речи МАТЕМАТИКА?

Задатак. На колико начина од 2 математичара и 8 економиста можемо формирати петочлану комисију у којој ће бити бар један математичар?

Задатак. У соби се налази n сијалица, при чему се свака укључује посебним прекидачем. На колико начина соба може бити осветљена?

Задатак. Нека је $n \geq 2$. Колико има пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ у којима су елементи 1 и 2 суседни?

Задатак. На колико начина се n људи могу распоредити за округлим столом, ако се два распореда код којих сваки човек има истог суседа са десне стране међусобно не разликују?

Задатак. У равни је дато $n \geq 3$ тачака, тако да никоје три нису колинеарне. Колико је правих одређено датим тачкама.

Задатак. У простору је дато $n \geq 4$ тачака, тако да никоје 4 од тих тачака не припадају истој равни. Колико равни је одређено овим тачкама?

Задатак. На колико начина се могу поређати у низ n нула и k јединица, тако да никоје две јединице нису суседне, ако је $k \leq n + 1$?

Задатак. На полици се налази $n = 12$ књига. На колико начина се може изабрати $k = 5$ књига, тако да никоје две изабране књиге нису суседне?

Задатак. Са колико нула се завршава број $144!$?