

Automatsko rezonovanje – beleške sa predavanja Deduktivni sistemi

Milan Banković (po slajdovima Filipa Marića)

* Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Prolećni semestar 2026/27.

Pregled

- 1 Uvod
- 2 Pojam deduktivnog sistema
- 3 Prirodna dedukcija

Tri aspekta logičkog sistema

Sintaksa

- Opisuje **jezik** kojim zapisujemo logička tvrđenja.
- Odgovara na pitanje šta je **ispravno zapisano**?
- Precizno definisana sintaksa je neophodna za formalnu manipulaciju termovima i formulama kao objektima

Semantika

- Opisuje **značenje** termova i formula u konkretnim matematičkim strukturama
- Odgovara na pitanje šta je **logički tačno**?
- Semantički pojmovi: **zadovoljivost**, **valjanost**, **logička posledica**

Dedukcija

- Bavi se konstrukcijom **dokaza** nekog tvrdjenja koji potvrđuje njegovu tačnost
- Odgovara na pitanje šta je **dokazivo** u datom deduktivnom sistemu?
- Deduktivni pojmovi: **teorema**, **deduktivna posledica**

Dedukcija

Semantičke i deduktivne metode

- U iskaznoj logici, univerzalna tačnost (tautologičnost) nekog tvrđenja se može utvrditi **semantičkim metodama**:
 - utvrdi se da je formula tačna u svakoj valuaciji, ili
 - utvrdi se da njena negacija nije tačna ni u jednoj valuaciji
 - tablice istinitosti, DPLL, CDCL, ...
- U logici prvog reda, tako nešto nije moguće, zbog beskonačnosti domena
- Alternativa: konstruisati **konačan objekat** koji predstavlja **dokaz** da je formula valjana:
 - dokaz se konstruiše pomoću precizno zadatog skupa **pravila** (**deduktivni sistem**)
 - **teorema**: dokazivo tvrđenje
 - **saglasnost**: svaka teorema je valjana formula
 - **potpunost**: svaka valjana formula je teorema
 - saglasnost je obavezna, potpunost poželjna
- Dodatna pouzdanost: ispravnost dokaza se može nezavisno proveriti
- **Dokazivači teorema**: procedure za pretragu dokaza
- **Proveravači dokaza**: procedure za proveru ispravnosti dokaza

Pregled

1 Uvod

2 Pojam deduktivnog sistema

3 Prirodna dedukcija

Dedukcija

Deduktivni sistem

- Pravila izvođenja oblika: $\frac{P_1, \dots, P_n}{Q}$ ($P_1, \dots, P_n$ su premise, a Q je zaključak pravila)
- Aksiome: tvrđenja za koja pretpostavljamo da važe uvek
- Pretpostavke: dodatna tvrđenja za koje pretpostavljamo da važe u nekom kontekstu
- Dokaz: izvođenje iz aksioma i pretpostavki primenom pravila
- Dokaz je **konačna diskretna struktura** (obično niz, stablo ili DAG)
- $\Gamma \vdash F$: F je **deduktivna posledica** skupa Γ , tj. F je dokaziva iz skupa pretpostavki Γ (i aksioma)
- $\vdash F$: F je **teorema**, tj. dokaziva bez dodatnih pretpostavki (samo iz aksioma)
- Saglasnost: ako $\vdash F$, onda $\models F$
- Potpunost: ako $\models F$, onda $\vdash F$

Deduktivni sistemi

Refutacioni sistemi

- Dokazuju nezadovoljivost formule F tako što dokazuju $F \vdash \perp$
- Sistem zasnovan na pravilu rezolucije
 - primenjiv samo na formule u klauzalnoj formi
 - metod rezolucije pronalazi dokaze u ovom sistemu
- Sistem zasnovan na pravilima tabloa
 - metod tabloa konstruiše dokaze u ovom sistemu

Opšti deduktivni sistemi

- Dokazuju opšta tvrđenja oblika $\Gamma \vdash F$
- Hilbertov sistem: minimalistički sistem
- Prirodna dedukcija: razumljiv za čoveka
- Račun sekvenata: pogodan za automatizaciju

Pregled

- 1 Uvod
- 2 Pojam deduktivnog sistema
- 3 Prirodna dedukcija**

Prirodna dedukcija

Prirodna dedukcija

- Deduktivni sistem koji je najbliži načinu rezonovanja čoveka prilikom dokazivanja matematičkih tvrdjenja
- U iskaznoj varijanti, postoje **pravila uvođenja** i **pravila eliminacije** iskaznih veznika
- U sistemu prirodne dedukcije za logiku prvog reda dodatno postoje i pravila za uvođenje i eliminaciju **kvantifikatora**
- U prirodnoj dedukciji razlikujemo **klasičnu** i **intuicionističku** logiku

Pravila prirodne dedukcije za iskazne veznike

Negacija

$$\frac{\begin{array}{c} [A]^1 \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg A} \neg I^1$$

$$\frac{A \quad \neg A}{\perp} \neg E$$

Konjunkcija

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge E1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge E2$$

Disjunkcija

$$\frac{A}{A \vee B} \vee I1$$

$$\frac{B}{A \vee B} \vee I2$$

$$\frac{\begin{array}{cc} [A]^1 & [B]^2 \\ \vdots & \vdots \\ A \vee B & C \end{array}}{C} \vee E^{1,2}$$

Pravila prirodne dedukcije za iskazne veznike

Implikacija

$$\frac{\begin{array}{c} [A]^1 \\ \vdots \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B} \Rightarrow I^1$$

$$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B} \Rightarrow E$$

Logičke konstante

$$\frac{}{A} \perp \perp E$$

$$\frac{}{\top} \top I$$

Dokaz

Dokaz u prirodnoj dedukciji je stablo u čijim se čvorovima nalaze formule. U korenom čvoru se nalazi formula koja se dokazuje, u listovima se nalaze aksiome (tj. formule koje se mogu izvesti pravilima bez premisa) ili pretpostavke (od kojih neke mogu biti oslobođene primenom određenih pravila), a svaki čvor v koji nije list sadrži formulu koja se dobija od formula u čvorovima koji su deca čvora v , primenom nekog od pravila. Formula je teorema ako za nju postoji dokaz bez neoslobođenih pretpostavki.

- Pišemo: $H_1, \dots, H_k \vdash A$ ako postoji dokaz formule A sa neoslobodjenim pretpostavkama $H_1, \dots, H_k$
- Pišemo: $\vdash A$ ako postoji dokaz formule A bez neoslobodjenih pretpostavki

Prirodna dedukcija – primer

Primer

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(A \vee B)]^1 \quad \frac{[A]^2}{A \vee B} \vee I1}{\perp} \neg E \quad \frac{[\neg(A \vee B)]^1 \quad \frac{[B]^3}{A \vee B} \vee I2}{\perp} \neg E \\
 \frac{\perp}{\neg A} \neg I^2 \quad \frac{\perp}{\neg B} \neg I^3 \\
 \hline
 \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B} \Rightarrow I^1
 \end{array}$$

Klasična naspram intuicionističke logike

Klasična pravila

$$\frac{}{A \vee \neg A} \text{ ExcludedMiddle}$$

$$\frac{\neg \neg A}{A} \text{ DoubleNegation}$$

$$[\neg A]^1$$

$$\vdots$$

$$\frac{\perp}{A} \text{ Contradiction}^1$$

Prirodna dedukcija – primer

Primer

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{[\neg(\neg A \vee \neg B)]^2}{\frac{\perp}{A} \text{ Contr}^3} \quad \frac{\frac{[\neg A]^3}{\neg A \vee \neg B} \vee I1}{\neg E} \quad \frac{\frac{[\neg(\neg A \vee \neg B)]^2}{\frac{\perp}{B} \text{ Contr}^4} \quad \frac{[\neg B]^4}{\neg A \vee \neg B} \vee I2}{\wedge I} \\
 \frac{[\neg(A \wedge B)]^1}{\frac{\frac{\perp}{\neg A \vee \neg B} \text{ Contr}^2}{\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \vee \neg B} \Rightarrow I1} \quad \frac{A \wedge B}{\neg E}
 \end{array}$$

Pravila za kvantifikatore

Univerzalni kvantifikator

$$\frac{A[x \rightarrow y]}{\forall x.A} \quad \forall I$$

$$\frac{\forall x.A}{A[x \rightarrow t]} \quad \forall E$$

Egzistencijalni kvantifikator

$$\frac{A[x \rightarrow t]}{\exists x.A} \quad \exists I$$

$$\frac{\begin{array}{c} [A[x \rightarrow y]]^1 \\ \vdots \\ B \end{array}}{\exists x.A} \quad \exists E^1$$

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora

Uvođenje univerzalnog kvantifikatora

Pravilo za uvođenje univerzalnog kvantifikatora glasi:

$$\frac{A[x \rightarrow y]}{\forall x.A} \quad \forall I$$

uz dodatni uslov da se promenljiva y ne nalazi kao slobodna ni u $\forall x.A$ ni u bilo kojoj neoslobođenoj pretpostavci u stablu dokaza formule $A[x \rightarrow y]$. Intuitivno, ovo znači sledeće: ako formula A važi za neki element y o kome nemamo nikakvih pretpostavki (tj. potpuno je proizvoljan), tada A važi za svaki element x . Specijalno, ako uzmemo da je $x = y$, tada dobijamo oblik:

$$\frac{A}{\forall x.A} \quad \forall I$$

uz uslov da se promenljiva x ne nalazi slobodna u neoslobođenim pretpostavkama u dokazu formule A (tj. A važi za proizvoljan element x). Sledeći primer ilustruje neophodnost ovog dodatnog uslova.

Primer

Setimo se formule $p(x) \Rightarrow \forall x.p(x)$. Ova formula nije valjana, pa ne bi trebalo da bude ni dokaziva (ako želimo da naš deduktivni sistem bude saglasan). Ipak, kada ne bismo imali dodatni uslov u pravilu za uvođenje univerzalnog kvantifikatora, tada bismo mogli da iz pretpostavke $p(x)$ izvedemo $\forall x.p(x)$, a da zatim pravilom uvođenja implikacije izvedemo formulu $p(x) \Rightarrow \forall x.p(x)$ (uz oslobađanje pretpostavke $p(x)$), što bi značilo da je $p(x) \Rightarrow \forall x.p(x)$ teorema prirodne dedukcije.

Dodatni uslov u pravilu uvođenja univerzalnog kvantifikatora sprečava kreiranje ovakvog dokaza, zato što zabranjuje izvođenje univerzalno kvantifikovane formule $\forall x.p(x)$ iz pretpostavke $p(x)$ koja sadrži kvantifikovanu promenljivu x kao slobodnu.

Eliminacija univerzalnog kvantifikatora

Pravilo za eliminaciju univerzalnog kvantifikatora glasi:

$$\frac{\forall x.A}{A[x \rightarrow t]} \forall E$$

Ovo pravilo je prilično intuitivno: ako A važi za svako x , tada to x možemo zameniti bilo kojim termom t (tj. važi proizvoljna instanca (po x) formule A). Ograničenje za primenu ovog pravila je da term t ne sme sadržati promenljive koje bi zamenom x sa t u A postale vezane.

Primer

Podimo od pretpostavke $\forall x.\exists y.p(x, y)$. Ako ne bi bilo ograničenja u primeni pravila eliminacije univerzalnog kvantifikatora, tada bismo mogli da njegovom primenom iz ove pretpostavke izvedemo formulu $\exists y.p(y, y)$. Dalje bismo mogli primenom pravila uvođenja implikacije da izvedemo formulu $(\forall x.\exists y.p(x, y)) \Rightarrow \exists y.p(y, y)$ (uz oslobađanje pretpostavke). Za ovu formulu smo ranije konstatovali da nije valjana. Ovaj primer ilustruje neophodnost uvedenog ograničenja prilikom primene pravila eliminacije univerzalnog kvantifikatora.

Uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora

Pravilo za uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora glasi:

$$\frac{A[x \rightarrow t]}{\exists x.A} \exists/$$

Ovo pravilo je takođe prilično intuitivno: ako važi neka instanca (po x) formule A , tj. važi $A[x \rightarrow t]$ za neko t , tada znači da postoji neka vrednost promenljive x za koju je formula A tačna. Otuda, važi $\exists x.A$. Ograničenje za primenu ovog pravila je da term t ne sme sadržati promenljive koje bi postale vezane zamenom x sa t u A .

Primer

Podimo od pretpostavke $\forall y.p(y, y)$. Kada ne bi bilo dodatnog uslova u primeni pravila za uvođenje egzistencijalnog kvantifikatora, mogli bismo da njegovom primenom izvedemo npr. formulu $\exists x.\forall y.p(x, y)$. Sada bismo primenom pravila uvođenja implikacije, uz eliminaciju pretpostavke, dobili formulu $(\forall y.p(y, y)) \Rightarrow \exists x.\forall y.p(x, y)$. Ova formula nije valjana (uzmimo proizvoljnu strukturu sa bar dva elementa i interpretirajmo $p(x, y)$ kao „ x je jednako y ”).

Eliminacija egzistencijalnog kvantifikatora

Pravilo eliminacije egzistencijalnog kvantifikatora glasi:

$$\frac{\exists x.A \quad \begin{array}{c} [A[x \rightarrow y]]^1 \\ \vdots \\ B \end{array}}{B} \exists E^1$$

uz dodatni uslov da se promenljiva y ne pojavljuje kao slobodna ni u formuli B , ni u formuli $\exists x.A$, ni u neoslobođenim pretpostavkama u dokazu formule B , osim možda u samoj formulu $A[x \rightarrow y]$. Intuitivno, ovo znači sledeće: ako pretpostavimo da formula A važi za neki proizvoljan element y (tj. za element za koji nema nikakvih dodatnih pretpostavki), i ako iz te pretpostavke možemo da dokažemo formulu B , to znači da iz $\exists x.A$ možemo da dokažemo B .

Primer

Sledeći primer ilustruje neophodnost uvođenja dodatnih uslova u pravilo eliminacije egzistencijalnog kvantifikatora: pretpostavimo da imamo pretpostavku $\exists x.p(x)$. Kada ne bi bilo dodatnih uslova u pravilu za eliminaciju egzistencijalnog kvantifikatora, tada bismo mogli da (stavljanjem $A = B = p(x)$ i $y = x$) ovim pravilom izvedemo $p(x)$. Dalje bismo mogli da, primenom pravila uvođenja univerzalnog kvantifikatora, izvedemo formulu $\forall x.p(x)$ (jer jedina neoslobođena pretpostavka u dokazu formule $p(x)$, tj. formula $\exists x.p(x)$ ne sadrži slobodna pojavljivanja promenljive x). Dalje se primenom pravila uvođenja implikacije oslobađa pretpostavka $\exists x.p(x)$ i izvodi se formula $(\exists x.p(x)) \Rightarrow (\forall x.p(x))$, koja naravno ne bi trebalo da bude dokaziva, jer nije valjana. Dodatni uslov u pravilu eliminacije egzistencijalnog kvantifikatora sprečava ovakva izvođenja.

Meta-tvrđenja o prirodnoj dedukciji

Teorema

Sistem prirodne dedukcije za klasičnu logiku prvog reda je saglasan, tj. u njemu je moguće dokazati samo valjane formule prvog reda.

Teorema

Sistem prirodne dedukcije za klasičnu logiku prvog reda je potpun, tj. u njemu je moguće dokazati svaku valjanu formulu prvog reda.

Teorema

U sistemu prirodne dedukcije za klasičnu logiku važi $\Delta \vdash F$ akko $\Delta \models F$ (čak i ako nisu sve formule iz Δ rečenice).

Primer

Dokažimo da važi $\vdash (\exists x. \forall y. p(x, y)) \Rightarrow (\forall y. \exists x. p(x, y))$. Dokaz se može predstaviti sledećim stablom:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{[\forall y. p(x', y)]^1}{p(x', y')}{\exists x. p(x, y')}{\exists I}}{\forall y. \exists x. p(x, y)}{\forall I} \\
 \frac{[\exists x. \forall y. p(x, y)]^2}{\forall y. \exists x. p(x, y)}{\exists E, 1} \\
 \frac{(\exists x. \forall y. p(x, y)) \Rightarrow (\forall y. \exists x. p(x, y))}{\Rightarrow I, 2}
 \end{array}$$

Intuitivno, dokaz teče na sledeći način: da bismo dokazali tvrđenje, treba da dokažemo da se formula $\forall y. \exists x. p(x, y)$ može dokazati iz $\exists x. \forall y. p(x, y)$ (nakon toga je dovoljno primeniti pravilo uvođenja implikacije). Da bismo ovo dokazali, treba da dokažemo formulu $\forall y. \exists x. p(x, y)$ polazeći od formule $\forall y. p(x', y)$ (tj. polazimo od toga da $\forall y. p(x', y)$ važi za neko proizvoljno x' o kome ništa drugo ne znamo). Zbog univerzalnog kvantifikatora važi $p(x', y')$ za to izabrano x' i za proizvoljno y' , odakle važi $\exists x. p(x, y')$ za proizvoljno y' . Zbog proizvoljnosti y' sada važi $\forall y. \exists x. p(x, y)$, što je i trebalo dokazati.

Primer

Dokažimo sledeću formulu: $(\neg \exists x.p(x)) \Rightarrow (\forall y.\neg p(y))$. Dokaz se može predstaviti sledećim stablom:

$$\begin{array}{c}
 \frac{[p(z)]^1}{\exists x.p(x)} \exists I \quad \frac{[\neg \exists x.p(x)]^2}{\frac{\frac{\perp}{\neg p(z)} \neg I, 1}{\forall y.\neg p(y)} \forall I} \neg E \\
 \hline
 (\neg \exists x.p(x)) \Rightarrow (\forall y.\neg p(y)) \Rightarrow I, 2
 \end{array}$$

Intuitivno: potrebno je dokazati formulu $\forall y.\neg p(y)$ iz pretpostavke $\neg \exists x.p(x)$. Neka $p(z)$ važi za neko proizvoljno z . Tada važi tvrđenje $\exists x.p(x)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom $\neg \exists x.p(x)$. Ovo znači da nije $p(z)$, tj. da važi $\neg p(z)$. Kako je z proizvoljno, tj. za njega ne važe nikakve dodatne pretpostavke, možemo da zaključimo da važi $\forall y.\neg p(y)$. Otuda sledi tvrđenje.

Eksplicitni konteksti

Izvođenje dokaza u prirodnoj dedukciji

- Dokazi u prirodnoj dedukciji se obično konstruišu primenom pravila **unazad**, polazeći od formule koju dokazujemo:
 - drugim rečima: da bih dokazao zaključak pravila Q , dovoljno je da dokažem sve njegove premise $P_1, \dots, P_k$
- Problem predstavljaju pravila koja oslobađaju pretpostavke:
 - primenom ovakvih pravila unazad dodajemo novu pretpostavku u skup pretpostavki koje možemo koristiti u dokazivanju premisa
 - sada je potrebno u svakoj grani dokaza pamti pretpostavke koje su nam na raspolaganju
- Ovaj problem se rešava eksplicitnim navođenjem **konteksta**:
 - u svakom čvoru stabla sada nije formula, već kontekst oblika $\Gamma \vdash A$ čije je intuitivno značenje: „dokazujem A pod pretpostavkama Γ ”
 - u korenu stabla je tvrdjenje $\Gamma \vdash A$ koje dokazujemo (Γ može biti i prazno)
- Neophodno je najpre i sama pravila formulisati na takav način

Pravila sa kontekstima

Negacija

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \perp} \neg E$$

Konjunkcija

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge E1$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge E2$$

Disjunkcija

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee I1$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee I2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \vee E$$

Pravila sa kontekstima

Implikacija

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \Rightarrow I$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \Rightarrow E$$

Logičke konstante

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp E$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top I$$

Pravila klasične logike

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \text{ExclMiddle}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg A}{\Gamma \vdash A} \text{DoubleNeg}$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{Contr}$$

„Važi po pretpostavci“

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ass}$$

Pravila sa kontekstima

Univerzalni kvantifikator

$$\frac{\Gamma \vdash A[x \rightarrow y]}{\Gamma \vdash \forall x.A} \quad \forall I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A[x \rightarrow t]} \quad \forall E$$

Egzistencijalni kvantifikator

$$\frac{\Gamma \vdash A[x \rightarrow t]}{\Gamma \vdash \exists x.A} \quad \exists I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.A \quad \Gamma, A[x \rightarrow y] \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad \exists E$$

Primer

Primer

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg(A \vee B) \vdash \neg(A \vee B) \quad \frac{A \vdash A}{A \vdash A \vee B} \vee I1}{\neg(A \vee B), A \vdash \perp} \neg E \quad \frac{\neg(A \vee B) \vdash \neg(A \vee B) \quad \frac{B \vdash B}{B \vdash A \vee B} \vee I2}{\neg(A \vee B), B \vdash \perp} \neg E \\
 \frac{\neg(A \vee B), A \vdash \perp}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A} \neg I \quad \frac{\neg(A \vee B), B \vdash \perp}{\neg(A \vee B) \vdash \neg B} \neg I \\
 \hline
 \frac{\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B}{\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B} \Rightarrow I
 \end{array}$$

Napomena

Zbog kompaktnosti zapisa, mi smo na pojedinim mestima iz skupa pretpostavki uklanjali pretpostavke koje nisu potrebne u nastavku te grane dokaza:

- formalno, trebalo bi uvesti i strukturna pravila kojima se brišu nepotrebne pretpostavke, zamenjuje redosled pretpostavki, uklanjaju duplikati iz skupa pretpostavki i sl.

Primer

Primer

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\forall y.p(x', y) \vdash \forall y.p(x', y)}{\forall y.p(x', y) \vdash p(x', y')}{\forall y.p(x', y) \vdash \exists x.p(x, y')}{\forall y.p(x', y) \vdash \forall y.\exists x.p(x, y)} \quad \begin{array}{l} \forall E \\ \exists I \\ \forall I \end{array} \\
 \frac{\exists x.\forall y.p(x, y) \vdash \exists x.\forall y.p(x, y) \quad \forall y.p(x', y) \vdash \forall y.\exists x.p(x, y)}{\exists x.\forall y.p(x, y) \vdash \forall y.\exists x.p(x, y)} \quad \exists E \\
 \frac{\exists x.\forall y.p(x, y) \vdash \forall y.\exists x.p(x, y)}{\vdash (\exists x.\forall y.p(x, y)) \Rightarrow (\forall y.\exists x.p(x, y))} \Rightarrow I
 \end{array}$$